Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102347**

ID профиля: **320383**

Вариант 20

Чистовик.

№1

Пусть d – разность прогрессии, т.е. $a_n = a_1 + (n-1)d$.
Тогда перепишем условие следующим образом:

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+10d) > S+15 \\ S+39 > (a_1+7d)(a_1+8d) \end{cases}, \text{ при этом } S = 5a_1+10d$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} a_1^2+15a_1d+50d^2 > 5a_1+10d+15 \\ 5a_1+10d+39 > a_1^2+15a_1d+56d^2 \end{cases}$$

$\Downarrow$ (сложим нер-ва)

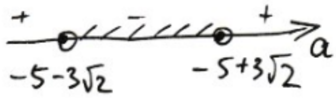
$24 > 6d^2 \Leftrightarrow 4 > d^2$. Т.к. прогрессия состоит из целых чисел, то и $d \in \mathbb{Z}$. Кроме того, прогрессия возрастающая $\Rightarrow d > 0$. Откуда получаем единственную возможность $d = 1$. Значит, изначальные нер-ва можно переписать:

$$\begin{cases} a_1^2+10d+25 > 0 \\ a_1^2+10d+7 < 0 \end{cases} \qquad a_1^2+10d+25 = (a_1+5)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -5$$

Найдём корни $a_1^2+10d+7=0$ $\quad a = \frac{-10 \pm \sqrt{72}}{2} = -5 \pm 3\sqrt{2}$.

Заметим, что $4 < 3\sqrt{2} < 5$ (т.к. $16 < 18 < 25$).

Т.к. $-5-3\sqrt{2} < a_1 < -5+3\sqrt{2}$, и



$a_1 \in \mathbb{Z}$, то $-10 < a_1 < 0 \Rightarrow$

возможны случаи $a_1=-9, a_1=-8, \dots, a_1=-6, a_1=-4, a_1=-3, \dots, a_1=-1$

Нетрудно понять, что все эти значения подходят.

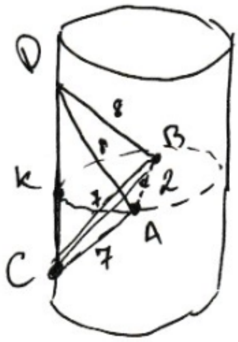
Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$.

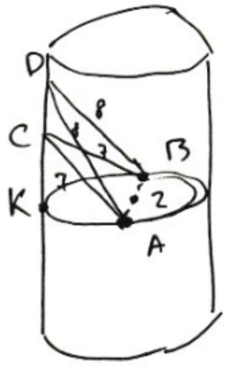
Чистовик.

МАТЕМАТИКА, 11кл.
в. 20

№2

Пусть R – радиус цилиндра. Заметим, что $AB \leq 2R \Leftrightarrow R \geq \frac{AB}{2} = 1$. Причём, это значение достигается, когда AB – диаметр окружности, лежащей в плоскости α, параллельной основанию. Возможны два случая: C и D лежат по одну сторону от α, C и D лежат по разные стороны от α. Пусть O – середина AB, K – пересечение CD и α.



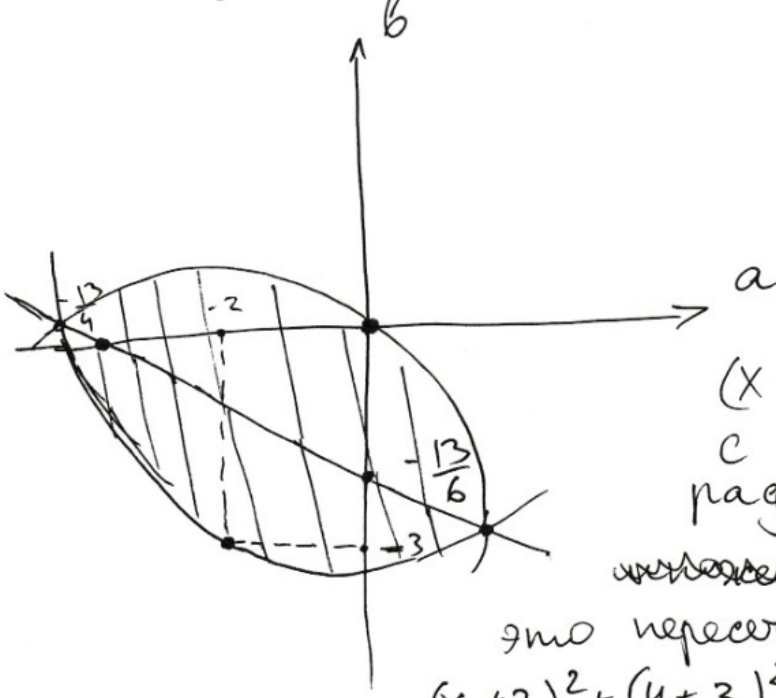


$OK = R = 1$, $CO = \sqrt{CA^2 - AO^2} = \sqrt{49-1} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ (т.к. CO – медиана в равнобедренном треугольнике, то и высота). Кроме того, очевидно $CD \perp \alpha$ (т.к. и C, и D лежат в пл-ти, перпендикулярной AB и проходящей через O). Значит, $CK = \sqrt{CO^2 - OK^2} = \sqrt{48-1} = \sqrt{47}$. Аналогично $DO = \sqrt{64-1} = \sqrt{63}$, $DK = \sqrt{63-1} = \sqrt{62}$. 1 сл.) $CD =$ ~~$DK-DO$~~ $DK - CK = \sqrt{62} - \sqrt{47}$. 2 сл.) $CD = DK + CK = \sqrt{62} + \sqrt{47}$.

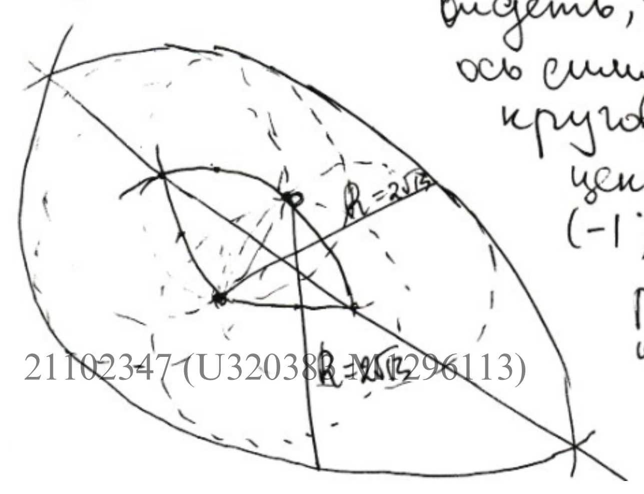
Ответ: $CD = \sqrt{62} - \sqrt{47}$; $CD = \sqrt{62} + \sqrt{47}$

№3

Рассмотрим сначала второе неравенство. Если $-4a-6b \le 13$, то оно приобретает вид $(a+2)^2+(b+3)^2 \le 13$. Если $13 < -4a-6b$, то $a^2+b^2 \le 13$. В осях ab этому условию удовлетворяют множества, одно из которых является пересечением круга $(a+2)^2+(b+3)^2 \le 13$ и полуплоскости $-4a-6b \le 13$, а второе – пересечением круга $a^2+b^2 \le 13$ и полуплоскости $-4a-6b > 13$ (см. рис.).



Это же множество точек можно изобразить в осях xy. Оно является множеством возможных центров кругов с радиусом $\sqrt{13}$ (т.к. $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13$ – круг с центром в точке $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{13}$). Таким образом, ~~множество~~ фигура M в осях xy – это пересечение ~~[illegible]~~ круга $(x+2)^2+(y+3)^2 \le (2\sqrt{13})^2$ с полуплоскостью $-4x-6y \le 13$ вместе с пересечением круга $x^2+y^2 \le (2\sqrt{13})^2$ с полуплоскостью $-4x-6y > 13$ (см. рис.). Нетрудно видеть, что прямая $-4x-6y=13$ – ось симметрии двух рассматриваемых кругов (середина отрезка, соединяющего центры кругов имеет координаты $(-1; -\frac{3}{2})$, $4+9=13$, а также расстояния от точки $(-\frac{13}{4}; 0)$ до центров кругов равны:



Чистовик

$\left(-\frac{13}{4}+2\right)^2+(-3)^2=\frac{25}{16}+9=\frac{169}{16}=\left(-\frac{13}{4}\right)^2$). Значит, ~~[illegible]~~ прямая $-4x-6y=13$ разбивает фигуру М на две равные части. Найдём точки, в которых круг $x^2+y^2=52$ пересекает прямую $-4x-6y=13$.

$x=-\frac{3}{2}y-\frac{13}{4} \Rightarrow \frac{9}{4}y^2+\frac{39}{4}y+\frac{169}{16}+y^2=52 \Leftrightarrow$

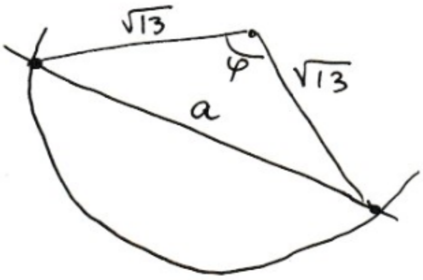
$52y^2+156y+169-52\cdot16=0 \Leftrightarrow 52y^2+156y-663=0 \Leftrightarrow$

$4y^2+12y-51=0 \Rightarrow y_{1,2}=\frac{-12\pm\sqrt{144+816}}{8}=\frac{-12\pm\sqrt{960}}{8}=$

$=\frac{-12\pm4\sqrt{60}}{8}=\frac{-3\pm\sqrt{60}}{2}$ Если $y=\frac{-3-\sqrt{60}}{2}$, то $x=$

$=\frac{9+3\sqrt{60}}{4}-\frac{13}{4}=\frac{-4+3\sqrt{60}}{4}$. Если $y=\frac{-3+\sqrt{60}}{2}$, то $x=$

$=\frac{9-3\sqrt{60}}{4}-\frac{13}{4}=\frac{-4-3\sqrt{60}}{4}$.



Заметим, что $a^2=\left(\frac{-4+3\sqrt{60}}{4}+\frac{4+3\sqrt{60}}{4}\right)^2+$

$+\left(\frac{-3+\sqrt{60}}{2}+\frac{3+\sqrt{60}}{2}\right)^2=\left(\frac{3\sqrt{60}}{2}\right)^2+\left(\sqrt{60}\right)^2=60\cdot\frac{13}{4}=\frac{195}{2}$ (см. рис.)

Тогда $26-2\cdot13\cdot\cos\varphi=\frac{195}{2} \Leftrightarrow 26(1-\cos\varphi)=\frac{195}{2} \Leftrightarrow$

~~$1-\cos\varphi=\frac{195}{2\cdot26}=\frac{15}{4} \Leftrightarrow \cos\varphi=\frac{4}{4}-\frac{15}{4}=-\frac{11}{4}$~~ $1-\cos\varphi=\frac{15}{2} \Leftrightarrow$

$\cos\varphi=-6,5$. Если бы я не обсчитался где-то, то искомая площадь легко бы нашлась, как

$S=2\cdot\left(\pi\cdot(\sqrt{13})^2\cdot\frac{\varphi}{2\pi}-\frac{1}{2}\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}\sin\varphi\right)$.

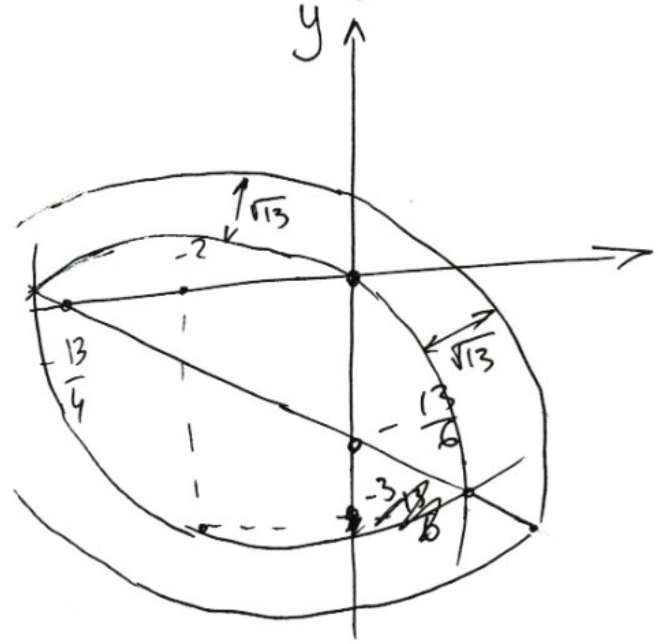
Черновик

$-4a-6b \leq 13$

$b \geqslant -\frac{2}{3}a - \frac{13}{6}$

$b=0 \Rightarrow -\frac{2}{3}a = \frac{13}{6}$

$a = -\frac{13}{4}$



$\times\, 15 \cdot 13$: 45, + 15, 195

$a^2+b^2 \leq -4a-6b$

$\Updownarrow$

$(a+2)^2+(b+3)^2 \leq 13$

$\times\, 52 \cdot 16$: 312, + 52, 832

$\times\, 16 \cdot 51$: 16, + 80, 816

$a^2+b^2 = -(4a+6b) \Rightarrow$

$4a+6b=-13$

$a^2+b^2=13$

$a = -\frac{13}{4} - \frac{3}{2}b$

$-4a = 6b+13$

$4a+6b=-13$

$a^2+b^2=-4a-6b$

$a^2+b^2=13$

$832 - 169 = 663$

$\frac{169}{16} + \frac{39}{4}b + \frac{9}{4}b^2 = 13$

$\times\, 13 \cdot 16$: 78, + 13, 208

$36b^2 + 156b + 169 = 13 \cdot 16$

$36b^2+156b-39=0$

$(a+2)^2+(b+3)^2 \leq 13$

$832 - 169 = 663$

$a^2+b^2 \leq 13$

$-1, -\frac{3}{2}$

$\times\, 52 \cdot 16$: + 312, 52, 832

$960 \,|\, 16$: -96, 00, 60

$b = -156 \pm$

$4+9=13$

$\frac{D}{4} = 78^2 + 36 \cdot 39 = 39(2 \cdot 39 \cdot 2 + 36) =$

$= 39 \cdot 4(39+9) = 39 \cdot 4 \cdot 48 =$

$= 39 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 3$

$= 39 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 3$

$663 \,|\, 13$: -65, 13, 51

$\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 9 = \frac{25}{16} + 9 =$

$= \frac{169}{16} = \left(-\frac{13}{4}\right)^2$

$9 \cdot 16 = 144$

$960 = 4 \cdot 240 =$

$= 4 \cdot 4 \cdot 60$

$51 \cdot 13 =$

$= 510 + 153 =$

$= 663$

$a = -\sqrt{13}$

$b = 0$

$$\begin{cases} (1-a)^2 + b^2 \leq 13 \\ a^2+b^2 \leq \min(-4a-6b, 13) \end{cases}$$

$4\sqrt{13} > 13$

$\Updownarrow$

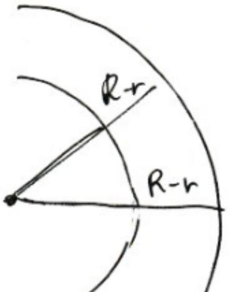
$4 > \sqrt{13}$

$\Updownarrow$

$16 > 13$

$4 \cdot 13 = 52$

~~$(2\sqrt{13} - a)$~~



$2\sqrt{13}$

$\sqrt{13}, \sqrt{13}$

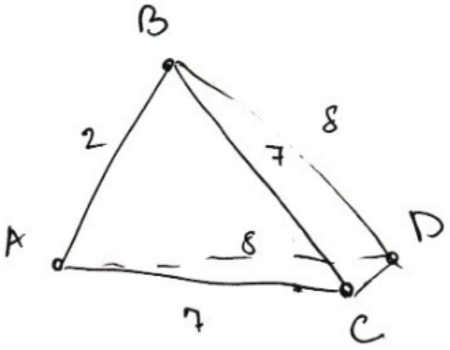
$\sqrt{195}$

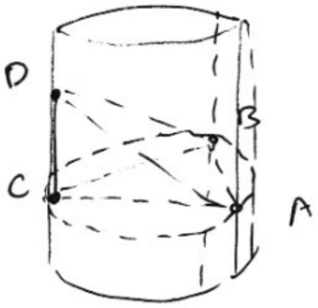
$2\sqrt{13} > \sqrt{195}$

$4 \cdot 13 > 195$

$$\begin{cases} (-2\sqrt{13}-a)^2 + b^2 \leq 13 \\ a^2+b^2 \leq \min(-4a-6b, 13) \end{cases}$$

Черновик.





$R_{ABC} \geqslant R_ц$

$R_{ABD} \geqslant R_ц$

$AB \leq 2R$

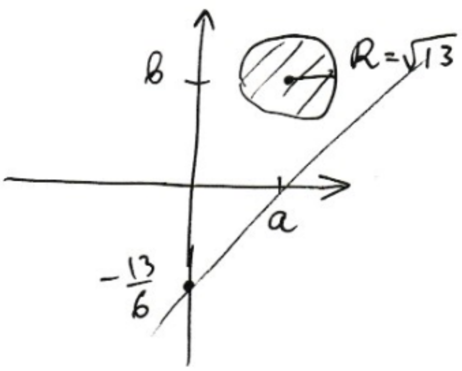
$\frac{AB}{2} \leq R \iff 1 \leq R$

$\boxed{-4a-6b \leq 13} \Rightarrow$

$a^2+4a+b^2+6b \leq 0$

$(a+2)^2+(b+3)^2 \leq 13$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 13$



$-4a-6b \leq 13$

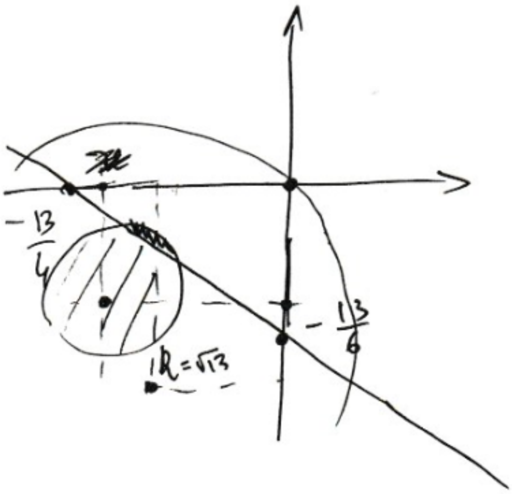
$a \geqslant -\frac{3}{2}b - \frac{13}{4}$

$b \geqslant -\frac{2}{3}a - \frac{13}{6}$

$b=0 \Rightarrow -\frac{2}{3}a - \frac{13}{6} = 0$

$-2a = \frac{13}{2}$

$a = -\frac{13}{4}$



$4 > \sqrt{13} > 3$

$a_1\ ,\ a_1+d\ ,\ a_1+2d, \dots$ Черновик.

$S = a_1 + a_1+d + a_1+2d + \dots + a_1+4d = 5a_1 + 10d$

$$\begin{cases}(a_1+5d)(a_1+10d) > 5a_1+10d+15\\(a_1+7d)(a_1+8d) < 5a_1+10d+39\end{cases}$$

~~48~~
$-5, -4, -3, -2, -1, 0,$
$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$
$S = -15$ $S+15=0$
$a_6 \cdot a_{11} = 0$

$$\begin{cases}a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 > 5a_1+10d+15\\a_1^2 + 15a_1d + 56d^2 < 5a_1+10d+39\end{cases}$$

$-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2,$
$-1, 0, 1, 2, 3$
$S = -30$

$a_1^2 + a_1(15d - 5) + 50d^2 - 10d - 15 > 0$

$a_6 \cdot a_{11} = -3 \cdot 2 = -6$
$-6 > -30+15$

$\mathcal{D} = 225d^2$

$$\begin{array}{r} \times\,15\\ 15\\ \hline 75\\ +\,15\;\\ \hline 225\end{array}$$

$50d^2 + d(15a_1 - 10) + a_1^2 - 5a_1 - 15 > 0$

$a_8 \cdot a_9 = 0$
$0 < 9$

$\mathcal{D} = 225a_1^2 - 300a_1 + 100 - 4a_1^2 + 20a + 60 =$

$= 221a_1^2 - 280a_1 + 160 < 0$

$\mathcal{D} = 280^2 - 4 \cdot 160 \cdot 221$

$\frac{\mathcal{D}}{4} = 140^2 - 160 \cdot 221 = 10(14 \cdot 140 - 16 \cdot 221)$

$65 - 35 = 30$

$6d^2 < 24$
$d^2 < 4$

$d = 1$

$a_1^2 + 15a_1 + 50 > 5a_1 + 10 + 25$

~~$a_1^2 - 5a_1 + 30 > 0$~~

~~a_1^2~~ $a_1^2 + 10a_1 + 15 > 0$ ~~$\sqrt{12}$~~ ≈ 3
~~$3\sqrt{2}$~~

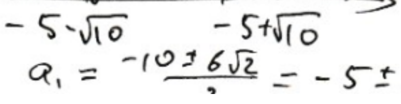
$\mathcal{D} = 100 - 60 = 40$

$a_1 = \frac{-10 \pm 2\sqrt{10}}{2} = -5 \pm \sqrt{10}$

~~$a_1^2 + 15$~~

$a_1^2 + 15a_1 + 56 < 5a_1 + 10 + 39$
$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

$-9 < -5-3\sqrt{2} \leq a_1 \leq -5+3\sqrt{2} <$



$\mathcal{D} = 100 - 28 = 72 = 4 \cdot 18 =$
$= 36 \cdot 2 = (6\sqrt{2})^2$ $a_1 = \frac{-10 \pm 6\sqrt{2}}{2} = -5 \pm 3\sqrt{2}$

Часть 2

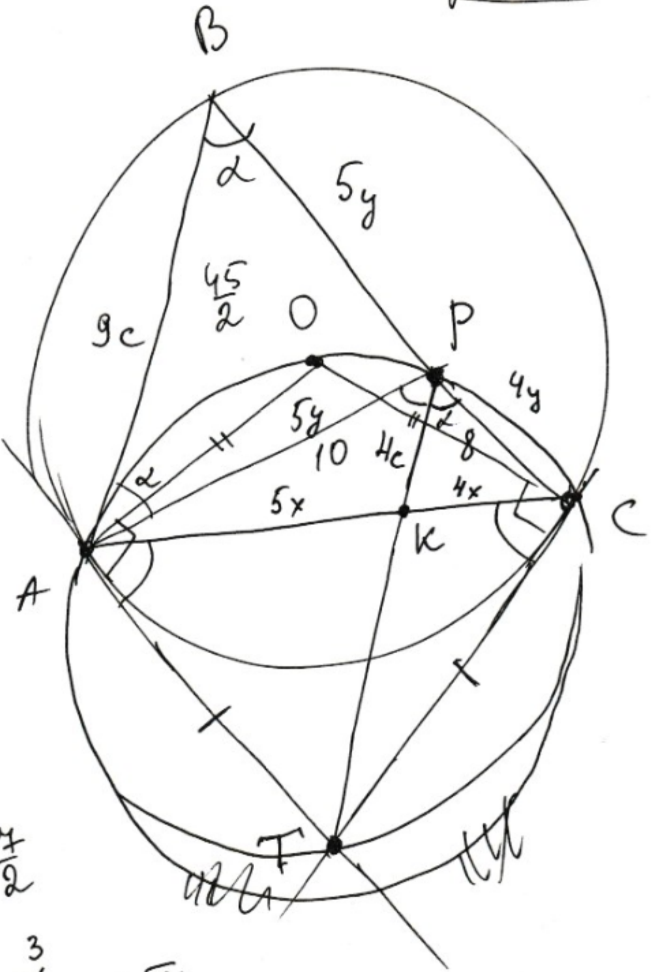
Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102347**

ID профиля: **320383**

Вариант 20

Черновик.



$2\cdot\frac{8\sqrt5}{3}\cdot 6\cdot\frac{2\sqrt5}{\cancel{3}}=$

$=4\cdot8\cdot2=64$

$\frac{18}{4}\cdot9=\frac{81}{2}$

$2\cdot\frac{\cancel{8\sqrt5}}{\cancel{3}}\cdot\overset{2}{\cancel{6}}\cdot\frac{2\sqrt5}{\cancel{5}}=$

$=64$

~~$tg\angle ABC$~~

$tg\alpha=\frac{1}{2}$

$36-64=-28$

$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{4}$

$28\cdot9=$

$=180+72=$

$=252$

$\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{1}{4}$

$320-252=$

$=68$

$4\sin^2\alpha=1-\sin^2\alpha$

$\sin\alpha=\frac{\sqrt5}{5}$

$-68\,|\,17$

$\;\;\;4$

-28

-28

$\;\;0$

$\cos\alpha=\cancel{3}\;\frac{2\sqrt5}{5}$

12 9

6

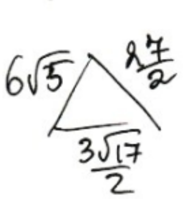
$\frac{6}{4}\cdot9=$

$=\frac{27}{2}$

$\frac{\overset{2}{\cancel{8}}\sqrt5}{\cancel{3}}\cdot\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\cancel{4}}=6\sqrt5$

$\frac{18}{4}\cdot5=\frac{45}{2}$

$6\sqrt5$



$c^2+y^2-2cy\cos\alpha=x^2$

$\frac{1}{2}\cdot81cy\sin\alpha=\frac{81}{2}$

$cy\sin\alpha=1$

$c^2+y^2=x^2+4$

$c^2+y^2-\frac{4\sqrt5}{5}cy=x^2$

$cy\cdot\frac{\sqrt5}{5}=1$

$cy=\sqrt5$

$36\cdot9=$

$=360-36=$

$=324$

$\times\begin{array}{r}64\\9\\\hline 576\end{array}$

$\frac{1}{\cancel{2}}5y\cdot5y\cdot\sin2\alpha=\frac{45}{\cancel{2}}$

$5y^2\cdot\sin2\alpha=9$

27

$12\sqrt5$

$3\sqrt{17}$

$144\cdot5=720$

$9\cdot17=153$

$27^2=729$

$\cdot27\cdot27$

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=$

$=2\cdot\frac{\sqrt5}{5}\cdot\frac{2\sqrt5}{\cancel{5}}=\frac{4}{5}$

$64\cdot9=$

$=8^2\cdot3^2=$

$=24^2$

$y^2-4=9$

$y=\frac{3}{2}$

~~2407~~

$480+96=$

$=576$

$\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\sin\alpha\cdot\cancel{3}6\cdot\overset{2}{\cancel{4}}c=8$

$\frac{\sqrt5\cdot6}{5}\cdot2=8$

3

$-\begin{array}{r}644\\576\\\hline 68\end{array}$

44

$\times\begin{array}{r}27\\27\\\hline 189\end{array}$

$+\begin{array}{r}54\\\hline 729\end{array}$

$2x-8=x-4$

$x=12$

$\log_{64}44$

Черновик.

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2}$, $b = 2^{\beta_1} \cdot 5^{\beta_2}$, $c = 2^{\gamma_1} \cdot 5^{\gamma_2}$

$(a-1)(a^2+2a+2) =$
$= a^3 - a^2 + 2a^2 - \cancel{2a} + \cancel{2a} - 2 =$
$= a^3 + a^2 - 2 =$
$= a^2(a+1) - 2$

$\min(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = 1$ $\max(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = 17$

$\min(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = 1$ $\max(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = 16$

$3 \cdot 2 \cdot$ $ab + a + b + 1 = (a+1)(b+1) = 16 \cdot 15$

~~$3 \cdot 2 \cdot 17 + 3 \cdot 2 \cdot 16 = 6 \cdot 16 \cdot 17 > 6^2 \cdot 16 \cdot 15$~~

$3 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 16 = 6^2 \cdot 16 \cdot 17$

$36 \cdot 16 \cdot 15 = 36 \cdot 4 \cdot 60 = 36 \cdot 240 = 8640$

$$\begin{array}{r} \times\ 240 \\ 36 \\ \hline 144\ \ \\ +\ 72\ \ \ \\ \hline 8640 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 36 \\ 24 \\ \hline 144 \\ +\ 72\ \ \\ \hline 864 \end{array}$$

$720 + 144 = 864$

$(a-1)(a^2+2a+2) =$
$= a^3 + 2a^2 + \cancel{2a} - a^2 - \cancel{2a} - 2 =$
$= a^3 + a^2 - 2$

$\log_2 4 = 2$ ~~$\log_4 2 = \frac{1}{2}$ $\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$~~

$\log_4 4 = 1 = \frac{1}{2} \log_2 4$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$, $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$, $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$2 \log_{2x-8}(x-4)$, $\frac{1}{2} \log_{x-4}(5x-26)$, $2 \log_{5x-26}(2x-8)$

$a^2(a+1) = 2 \log_{2x-8}(x-4) \log_{x-4}(5x-26) \log_{5x-26}(2x-8) =$

$$= 2 \frac{\cancel{\ln(x-4)}}{\cancel{\ln(2x-8)}} \cdot \frac{\cancel{\ln(5x-26)}}{\cancel{\ln(x-4)}} \cdot \frac{\cancel{\ln(2x-8)}}{\cancel{\ln(5x-26)}} = 2$$

$a^3 + a^2 - 2 = 0$

$a^2 + 2a + 2 >$
$> a^2 + 2a + 1 \geq 0$

$a^3 + a = 2$

$a^3 + a - 2 = 0$

$(a-1)(a^2 + a$

$(a-1)(a^2 + a + 2) = 0$

$D < 0$

$$\begin{array}{l|l} a^3 + a - 2 & a - 1 \\ \cline{2-2} -\ a^3 - a^2 & a^2 + a + 2 \\ \hline \quad -\ a^2 + a - 2 & \\ \quad\ \ a^2 - a & \\ \hline \qquad -\ 2a - 2 & \\ \qquad\ \ 2a - 2 & \\ \hline \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$100 - 96 = 4$

$\frac{10 \pm 2}{2}$

$4, \ 6$

$$\begin{array}{l|l} a^3 + a^2 - 2 & a - 1 \\ \cline{2-2} -\ a^3 - a^2 & a^2 + 2a + 2 \\ \hline \quad -\ 2a^2 - 2 & \\ \quad\ \ 2a^2 - 2a & \\ \hline \qquad -\ 2a - 2 & \\ \qquad\ \ 2a - 2 & \\ \hline \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$4 - 4 \cdot 2$

$169 - 168 = 1$

$\frac{13 \pm 1}{2}$ $6, 7$

№4

Заметим, что $a=2^{\alpha_1}\cdot 5^{\alpha_2}$, $b=2^{\beta_1}\cdot 5^{\beta_2}$, $c=2^{\gamma_1}\cdot 5^{\gamma_2}$ (других делителей не может быть, так как иначе НОК этих чисел также имел бы этот делитель.)

Теперь условие равносильно следующему:

$\min(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=1$, $\min(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)=1$;

$\max(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=17$, $\max(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)=16$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ попарно различны, а также $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$ попарно различны. Тогда выбрать среди $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ то число, которое может быть равно 1, есть 3 способа, одно из оставшихся сделать 17 есть 2 способа. Третье число может принимать любые нат. значения от 2 до 16, т.е. всего 15 вариантов. Итак, получаем $3\cdot2\cdot15$ способов. Аналогично рассуждая для $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$, получим $3\cdot2\cdot14$ способов. Итого уже $6^2\cdot15\cdot14$ способов. Пусть теперь среди $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ есть два равных. Выбрать эту пару есть $C_3^2=\frac{3\cdot2}{2}$ способов, при этом эти два числа могут быть равны 1 или 17, т.е. $\frac{3\cdot2}{2}\cdot2=3\cdot2=6$ способов. $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$ выбираются, как мы уже знаем, $3\cdot2\cdot14$ способами – итого $6^2\cdot14$. Аналогично, когда среди $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$ есть пара равных, а среди $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ – нет, ~~способов~~ получим $6^2\cdot15$ способов. И в последнем случае, когда и среди $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$, и среди $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$ есть пара равных, получим $6\cdot6=6^2$ способов. Итого всего троек (a,b,c) –

$6^2(15\cdot14+15+14+1)=6^2\cdot16\cdot15=8640$

Ответ: 8640

21102347 (U320383 M1296114)

Чистовик.

МАТЕМАТИКА, 11кл.

В.20

№5

На ОДЗ справедливы равенства: $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 2\log_{2x-8}(x-4)$, $\log_{(x-4)^2}(5x-26) = \frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)$, $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = 2\log_{5x-26}(2x-8)$. Заметим, что произведение этих чисел равно $2\cdot\log_{2x-8}(x-4)\cdot\log_{x-4}(5x-26)\cdot\log_{5x-26}(2x-8) = 2\log_{x-4}(x-4)\cdot\log_{2x-8}(5x-26)\cdot\log_{5x-26}(2x-8) = 2\cdot\log_{5x-26}(5x-26)\cdot\log_{2x-8}(2x-8) = 2$ (дважды воспользовались св-ом, что $\log_a b\cdot\log_c d = \log_c b\cdot\log_a d$).

Пусть два из данных чисел равны a, а другое — $a+1$. Тогда $a^3+a^2=2 \Leftrightarrow (a-1)(a^2+2a+2)=0$. При этом $a^2+2a+2\neq 0$, т.к. $D=4-8<0$. Значит, $a=1$.

Осталось разобрать три случая.

1) $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=1$, $\log_{(x-4)^2}(5x-26)=1$, $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=2$

$\Downarrow$

$\sqrt{2x-8}=x-4$

$\Downarrow$

$2x-8=x^2-8x+16$

$\Downarrow$

$x^2-10x+24=0$

$\Downarrow$

$(x-4)(x-6)=0$

$x=4$ — не подх., т.к. тогда $\sqrt{2x-8}=0$

Значит, $x=6$.

Подставим $x=6$

$\log_4 4=1$

верно

Подставим $x=6$

$\log_2 4=2$

верно

2) $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=1$, $\log_{(x-4)^2}(5x-26)=2$, $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=1$.

Такой случай невозможен, т.к. аналогично случаю 1, получим $x=6$, но $\log_{(6-4)^2}(5\cdot 6-26)\neq 2$.

3) $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=2$, $\log_{(x-4)^2}(5x-26)=1$, $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=1$.

$(x-4)^2=5x-26 \Rightarrow x^2-13x+42=0 \Rightarrow (x-6)(x-7)=0$

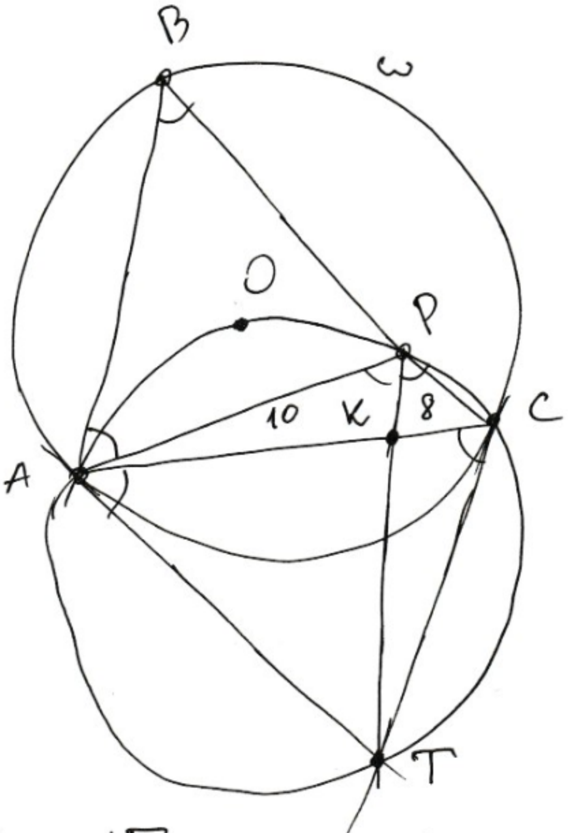
Случай $x=6$ уже разобран в 1).

Если $x=7$, то $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{\sqrt{6}}(3) \neq 2$.

Противоречие.

Ответ: при $x = 6$.

№6



а) Заметим для начала, что T лежит на окр., описанной около AOC, т.к. $\angle TAO + \angle TCO = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ AOCT – вписанный. Значит, $\angle TPC = \angle TAC$. Но $\angle TAC = \angle ABC$ (угол между касательной и секущей равен вписанному), значит, $\angle TPC = \angle ABC \Rightarrow TP \parallel AB$. Кроме того, $\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{AK}{KC}$ (т.к. имеют общую высоту) $\Rightarrow$

$\frac{AK}{KC} = \frac{5}{4}$. Т.к. $KP \parallel AB$, то $BP : PC = AK : KC = 5:4 \Rightarrow$

$\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}} = \frac{BP}{PC} = \frac{5}{4}$ (они имеют общую высоту) $\Rightarrow$

$S_{ABC} = S_{ABP} + S_{ACP} = S_{ACP} \cdot \frac{5}{4} + S_{ACP} = S_{ACP} \cdot \frac{9}{4} = 18 \cdot \frac{9}{4} =$
$= \frac{81}{2}$.

б) Заметим, что $\angle ACT = \angle TAC$, т.к. $AT = TC$, как отрезки касательных $\Rightarrow \angle APT = \angle ACT = \angle TAC = \angle TPC \Rightarrow$
PK – бис-са в $\triangle APC \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AK}{KC} = \frac{5}{4}$, но $\frac{BP}{PC} = \frac{5}{4} \Rightarrow$
$AP = BP$. Пусть $\angle ABC = \beta \Rightarrow \angle BAP = \beta \Rightarrow S_{ABP} =$
$= \frac{1}{2} \cdot BP^2 \cdot \sin(180^\circ - 2\beta) = \frac{1}{2} BP^2 \cdot \sin 2\beta$. Из пункта
а) $S_{ABP} = \frac{45}{2}$. Т.к. $tg\,\beta = \frac{1}{2}$, то $\sin\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow$
$\sin 2\beta = 2 \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta = \frac{4}{5}$. Итак, $\frac{1}{2} \cdot BP^2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{45}{2} \Rightarrow$
$BP = \frac{15}{2}$.

Т.к. $\frac{BP}{PC}=\frac{5}{4}$, то $PC=\frac{12}{2}=6$.

Значит, $8=S_{KPC}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot PK\cdot\sin\beta=3\cdot PK\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow$

$PK=\frac{8\sqrt{5}}{3}$. Тогда $KC^2=PK^2+PC^2-2\cdot PK\cdot PC\cdot\cos\beta=$

$=\frac{64\cdot 5}{9}+36-2\cdot\frac{8\sqrt{5}}{3}\cdot 6\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{320}{9}+36-64=$

$=\frac{320+324-576}{9}=\frac{68}{9}=\left(\frac{2}{3}\cdot\sqrt{17}\right)^2\Rightarrow KC=\frac{2\sqrt{17}}{3}$.

~~Из подобия ABC и KPC, следует $\frac{AC}{KC}=\frac{9}{4}\Rightarrow$~~
~~($\angle ABC=\angle KPC$, $\angle BCA$ - общий)~~
~~$AC=\frac{9}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{17}=\frac{3\sqrt{17}}{2}$.~~

~~т.к. $AK=\frac{5}{4}KC$, то~~
~~$AC=AK+KC=\frac{9}{4}KC$~~

~~Ответ: а) $\frac{81}{2}$. б) $\frac{3\sqrt{17}}{2}$~~

Т.к. $AK=\frac{5}{4}KC$, то $AC=\frac{9}{4}KC=\frac{9}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{17}=\frac{3\sqrt{17}}{2}$.

Ответ: а) $\frac{81}{2}$; б) $\frac{3\sqrt{17}}{2}$.