Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102308**

ID профиля: **275671**

Вариант 20

Вариант 20. Часть 1. Математика, 11 кл

$\boxed{\text{Чистовик №1}}$

№1

Пусть d – разность арифметической прогрессии.

Тогда $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_5 = 5a_1 + 10d$

$$\begin{cases} a_6 a_{11} > S + 15 \\ a_8 \cdot a_9 < S + 39 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a_1+5d)(a_1+10d) > 5a_1+10d+15 \\ (a_1+7d)(a_1+8d) < 5a_1+10d+39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+15a_1d+50d^2 > 5a_1+10d+15 \\ a_1^2+15a_1d+56d^2 < 5a_1+10d+39 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1^2+15a_1d+50d^2 > 5a_1+10d+15 \\ -a_1^2-15a_1d-56d^2 > -5a_1-10d-39 \end{cases}$$

$-6d^2 > -24$

$d^2 < 4$

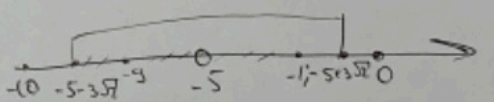
$|d| < 2$ $\Rightarrow$ т.к. прогрессия состоит из целых чисел и возрастает, то

$0 < d < 2$ $\boxed{d=1}$

$$\begin{cases} a_1^2+15a_1+50 > 5a_1+10+15 \\ a_1^2+15a_1+56 < 5a_1+10+39 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1^2+10a_1+25 > 0 \\ a_1^2+10a_1+7 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a_1+5)^2 > 0 \\ \frac{D}{4} = 25-7 = 18 \end{cases}$$

$a_{1,2} = -5 \pm 3\sqrt{2}$

$$\begin{cases} a_1 \neq -5 \\ (a_1+5+3\sqrt{2})(a_1+5-3\sqrt{2}) < 0 \end{cases}$$



$4 < 3\sqrt{2} < 5$, т.к. $16 < 18 < 25$

$\Rightarrow -5-3\sqrt{2} \in (-10; -9)$

$-5+3\sqrt{2} \in (-1; 0)$

$$\begin{cases} a_1 \neq -5 \\ a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2}) \end{cases}$$

т.к. прогрессия из целых чисел, то a_1 – целое

$\Rightarrow a_1 = \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

Чистовик 2 Часть 1. Математика, 11кл

N 3.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b;\ 13) \end{cases}$$

① Докажем, что ~~если~~ для любых ~~точек~~ точки ~~окр~~ круга с центром в $(-2;-3)$ и радиусом $\sqrt{13}$ найдутся $a;b$ чтобы система выполнялась.

Пусть ~~a и b~~ $a=-2$; $b=-3$

$$\begin{cases} (x+2)^2+(y+3)^2 \le 13 & \text{– уд., т.к. уравнение данного круга и исходное уравнение} \\ 13 \le \min(8+18;\ 13) & \text{– уд., т.к. } 13 \le 13 \end{cases}$$

чтд

тогда $S_M = \pi R^2 = 13\pi$

② Докажем, что никакие другие точки не будут являться точками фигуры M (рассмотрим точки вне круга с центром $(-2;-3)$ и радиусом $\sqrt{13}$)

Пусть нашлись такие ~~точки~~ a и b, тогда:

$$\begin{cases} (x+2)^2+(y+3)^2 > 13 \\ (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ 0 \le a^2+b^2 \le \min(-4a-6b;\ 13) \end{cases}$$

– но эта система не имеет решений

$$\begin{cases} (x+2)^2-(x-a)^2+(y+3)^2-(y-b)^2 > 0 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b;\ 13) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ уд. только точки из пункта ①

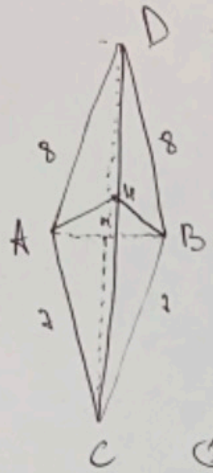
$$\begin{cases} (a+2)(2x+2-a)+(b+3)(2y+3-b) > 0 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b;\ 13) \end{cases}$$

Ответ: 13π

Чистовик 3 Математика, 11 кл.

Часть 1

№2



① Пусть M – середина AB.

② т.к $AC = CB$ и $AD = DB$, то $DM \perp AB$ и $MC \perp AB \Rightarrow$

$\Rightarrow (DMC) \perp AB$. $\Rightarrow$ т.к. ось цилиндра $\parallel CD$, то ось цилиндра $\perp AB$, а т.к все точки $(A; B; C; D)$ лежат на бок. поверхности цилиндра, то ось цилиндра $\in (DMC)$. (иначе точки A и B одновременно лежать на бок. пов не будут)

③ Т.к. точки C и D лежат на бок. пов. то ось цилиндра $\parallel CD$

т.к $AD \perp CD$ – $AH \perp CD$

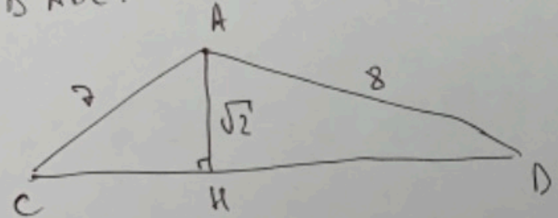
④ $R_ц$ = проведём $AH \perp CD$, тогда $(AHB) \perp CD \Rightarrow AHB \perp$ оси цилиндра

$\Rightarrow R_ц = R_{опис\ окр}\ \triangle AHB$. Причём $AH = BH$, т.к $\triangle ADC = \triangle BDC$ по ССС.

$2R = \frac{AB}{\sin\angle AHB} \Rightarrow R = \frac{AB}{2\sin\angle AHB} = \frac{1}{\sin\angle AHB}$ – мин. при $\angle AHB = 90°$, то есть

$\sin\angle AHB = 1 \Rightarrow AH = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\triangle ADC$:



$CD = CH + HD =$

$= \sqrt{49-2} + \sqrt{64-2} =$

$= \sqrt{47} + \sqrt{62}$

Ответ: $\sqrt{47} + \sqrt{62}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102308**

ID профиля: **275671**

Вариант 20

Вариант 20, часть 2. Математика, 11 кл.

Чистовик 1.

№1.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 2\cdot 5 \\ НОК(a;b;c) = 2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$$

Т.к. $НОК(a;b;c) = 2^{17}\cdot 5^{16}$, значит 1 из чисел a; b и c имеет множитель ровно 5^{16} (т.е. не больше); один - ровно в 2^{17}

т.к. $НОД(a;b;c) = 2\cdot 5$ то 1 из чисел a и b и c имеет множитель ровно 5 (макс. степень 5 которой кратно это число)

и какое-то число имеет множитель ровно 2^1.

все три числа представляются в виде $2^x\cdot 5^y$ (т.к. иначе НОК был бы другим)

Пусть $\begin{cases} a = ~~...~~ = 2^{x_a}\cdot 2^{y_a} \\ b = 2^{x_b}\cdot 5^{y_b} \\ c = 2^{x_c}\cdot 5^{y_c} \end{cases}$ ~~тогда для $x_a x_b x_c$~~: причём $\{x_a; x_b; x_c\}$ и $\{y_a; y_b; y_c\}$ - не зависят друг от друга

для $x_a; x_b; x_c$: 3 варианта есть выбрать ~~...~~ то, что будет равно 17; 2 варианта потом выбрать ~~...~~ что равен 1 и для 3-его числа есть варианты от ~~1~~ 2 до ~~17~~ 16

То есть всего вариантов $3\cdot 2\cdot 15 = 6\cdot 15$; ещё есть 6 случаев когда 3-е число равняется 1 или 17 (тогда числа равны: $(1;17;17)$ $(17;1;17)$, $(17;17;1)$, $(1;1;17)$, $(1;17;1)$, $(17;1;1)$)

То есть всего $3\cdot 2\cdot 15 + 6 = 6\cdot 15 + 6 =$ ~~...~~ $6\cdot 16$ вариантов

для $y_a; y_b; y_c$: 3 варианта выбрал степень 16; 2 варианта выбрал степень 1;

на 3-е число еще варианты от 2 до 15.

То есть всего вариантов $3\cdot 2\cdot 14$ + 6 вариантов когда третье число равно либо 1, либо 16.

$N = 3\cdot 2\cdot 14 + 6 = 6\cdot 15$

Тогда всего возможных троек чисел $6\cdot 16\cdot 6\cdot 15 = 240\cdot 36 = 8640$ троек чисел a; b; c

Ответ: 8640

Математика, 11кл, часть 2.

Чистовик 2

№2

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$; $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$; $\log_{\sqrt{5x-26}}2x-8$

$$\begin{cases} x-4>0 \\ 5x-26>0 \\ 2x-8>0 \\ 2x-8\neq 1 \\ x-4\neq 1 \\ x-4\neq -1 \\ 5x-26\neq 1 \end{cases};\quad \begin{cases} x>4 \\ x>\frac{26}{5} \\ x>4 \\ x\neq 4{,}5 \\ x\neq 5 \\ x\neq 3 \\ x\neq \frac{27}{5} \end{cases} \iff x\in\left(\frac{26}{5};\frac{27}{5}\right)\cup\left(\frac{27}{5};+\infty\right)$$

На ОДЗ:

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 2\cdot\log_{(2x-8)}x-4 \\ \log_{(x-4)^2}(5x-26) = \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26) \\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = 2\cdot\log_{5x-26}(2x-8) \end{cases} \begin{matrix} \times \\ \times \end{matrix}$$ – найдём произведение

$$2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{\log_3(x-4)}{\log_3(2x-8)}\cdot\frac{\log_3(5x-26)}{\log_3(x-4)}\cdot\frac{\log_3(2x-8)}{\log_3(5x-26)} = 2$$

Пусть два равных числа равны a, тогда третье равно $a+1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow a\cdot a\cdot(a+1)=2 \Rightarrow a^3+a^2-2=0$

	1	1	0	-2
1	1	2	2	0

$(a-1)(a^2+2a+2)=0$
$D<0$

$\boxed{a=1}$

① $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=1 \Rightarrow x-4=\sqrt{2x-8} \Rightarrow x^2-8x+16=2x-8$
$x^2-10x+24=0$
$(x-6)(x-4)=0$
$\left[\begin{matrix} x=6 \\ x=4 \end{matrix}\right.$ – не уд по ОДЗ

② $\log_{(x-4)^2}(5x-26)=1 \Rightarrow 5x-26=(x-4)^2$; $5x-26=x^2-8x+16$
$x^2-13x+42=0$
$(x-6)(x-7)=0$
$\left[\begin{matrix} x=6 \\ x=7 \end{matrix}\right.$

③ $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=1 \Rightarrow 2x-8=\sqrt{5x-26}$; $4x^2-32x+64=5x-26$
$4x^2-37x+90=0$
$D<0$
$D=37^2-4\cdot4\cdot90=1369-1440<0$

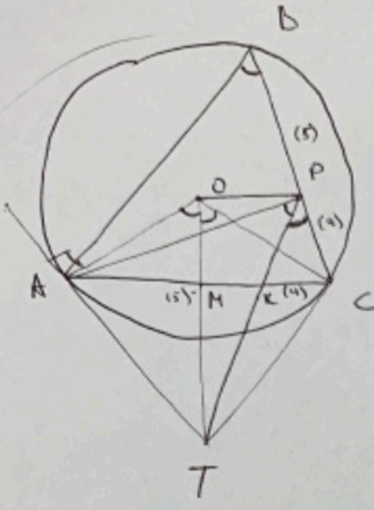
из ①; ② и ③ следует что $x=6$, т.к. нужно чтобы два числа были равны a третье было > других на 1.

Проверка $x=6$: $\log_2 2$; $\log_4 4$; $\log_2 4$; 1; 1 и 2 – уд

Ответ: 6

21102308 (U275671 M1300610)

Чистовик №3 Математика, 11кл. Часть 2.



а) ① т.к AT и AC - касательные, то чет-ник AOCT - вписанный, а т.к около △AOC можно описать только 1 окружность, то $T \in$ окр описанной около чет-ника AOPC. Центр окр - середина OT; OT - диаметр.

② Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle AOC = 2\alpha$; $\angle AOT = \angle COT = \alpha$, при этом в окр около чет-ника AOPC: $\angle AOT = \angle APT = \alpha$; $\angle COT = \angle CPT = \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow$ PK - бис. △APC

③ $\dfrac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle PKC}} = \dfrac{AK}{KC} = \dfrac{10}{8} \Rightarrow$ т.к PK-бис, то $\dfrac{AP}{PC} = \dfrac{AK}{KC} = \dfrac{10}{8}$

④ $\triangle APB$: $\angle APC$ - внешний $\Rightarrow \angle APC = \angle ABP + \angle BAP = 2\alpha = \alpha + \angle BAP \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BAP = \alpha \Rightarrow \triangle APB$ - р/б

$\Rightarrow AP = PB$ и $\Rightarrow BP : PC = AP : PC = 10 : 8$;

$S_{\triangle APC} = S_{\triangle APK} + S_{\triangle PKC} = 18$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle APC}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC\cdot \sin\angle C}{\frac{1}{2} AC\cdot PC\cdot \sin\angle C} = \frac{BC}{PC} = \frac{10+8}{8} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{9}{4} S_{\triangle APC} = \frac{18\cdot 9}{4} = \frac{81}{2} = 40{,}5$$

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; Пусть M - середина AC, тогда $\angle OMC = 90°$; $\angle MOC = \alpha$

$\Rightarrow \dfrac{MC}{MO} = \operatorname{tg}\angle\alpha = \operatorname{tg}\angle ABC = \dfrac{1}{2} \Rightarrow MO = 2MC \Rightarrow MO = 4\cdot AC$

Ответ: а) 40,5

3.

$x_a \cdot x_b \cdot x_c$

Черновик №1.

№4

3. 3.

$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 2 \cdot 5 \\ НОК(a;b;c) = 2^{17} \cdot 5^{16} \end{cases}$

$5^{16} \cdot 2^{17}$; $5 \cdot 2$; $5 \cdot 2$

5^{16} ; 5 ; 5

17 1 17

№5.

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$; $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$; $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$\begin{cases} x > 4 \\ x > \frac{26}{5} \\ x > 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-8 \neq 1 \\ x \neq 5 \\ 5x-26 \neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq 4,5 \\ x \neq 5 \\ x \neq \frac{27}{5} \end{cases}$ $x \in (\frac{26}{5}; \frac{27}{5}) \cup (\frac{27}{5}; +\infty)$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$ $\frac{1}{\log_{x-4}\sqrt{2x-8}} = \frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)$

$\log_{x-4}(\sqrt{2x-8}) \cdot \log_{x-4}(5x-26) = 2$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26) = \log_{\sqrt{5x-26}} 2x-8$

$\frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26) = 2\log_{5x-26} 2x-8$

$\log_{x-4}(5x-26) = 4\log_{5x-26}(2x-8) = 4\log_{5x-26} 2 + 4\log_{5x-26}(x-4)$

$4\log_{5x-26} 2 + 4\log_{5x-26}(x-4) - \frac{1}{\log_{5x-26}(x-4)} = 0$

$\log_{5x-26} 16 + \frac{4\log^2_{5x-26}(x-4) - 1}{\log_{(5x-26)}(x-4)} = 0$

$D = 37 \times 37 = 1369$

$37 \times 37 = 1369$

15×16

$16 \times 15 = 240$

$16 \times 15 = 240$

$\frac{\log_a x-4}{\log_a 2x-8}$

$16 \times 90 = 1440$

$90 \times 8 = 720$

$240 \times 36 = 8640$

$240 \times 36 = 8640$

320 90 9 10 · 4

15 24

$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$

18 20

12

30

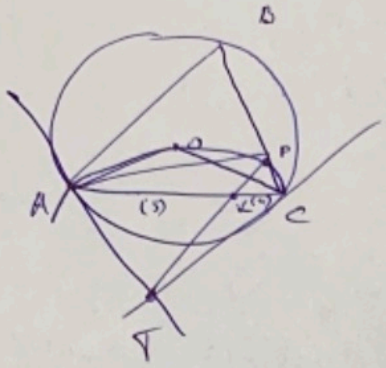
15

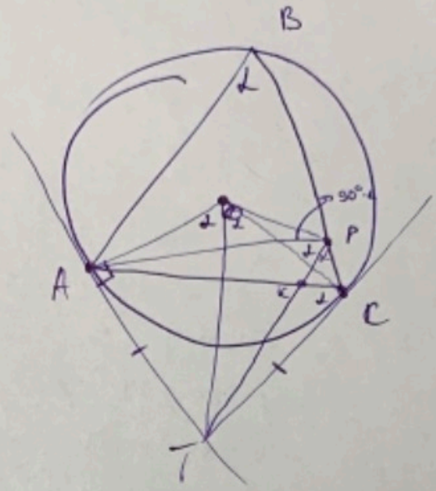
24

9 40

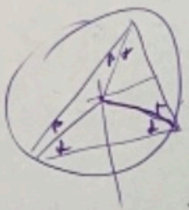
8 45

Черновик №2.

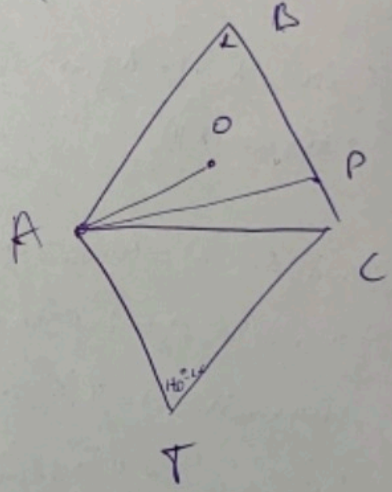


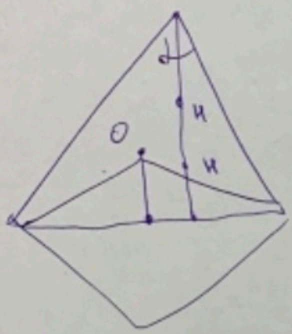


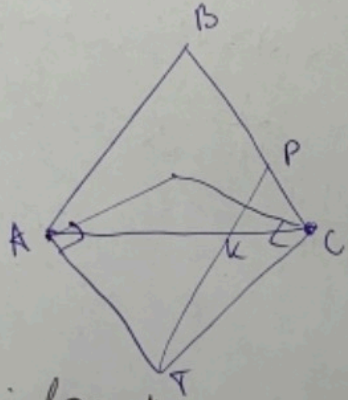
4ет-ник APCT -
- вписанный



180°







$\log_2 2$; $\log_4 4$; $\log_2 4$

1 1 2

B. $\frac{81}{162}$

$\frac{9}{4}$

$\log_{\sqrt{6}} 3$; $\frac{4}{9}$