# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102302**

ID профиля: **261528**

Вариант 20

Чистовик: ①

№1. Т.к. ар. прогрессия состоит из $\mathbb{Z}$ целых чисел, то и каждый её член $\in \mathbb{Z}$, и шаг $\in \mathbb{Z}$.
Пусть первый член $= a_1$, шаг $= n$.
Тогда:
$$S_5 = \frac{2a_1+4n}{2}\cdot 5 = 5a_1+10n \qquad \begin{cases} a_1 \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$
Нам известно, что
$$\begin{cases} a_6\cdot a_{11} > S+15 \\ a_8\cdot a_9 < S+39 \end{cases} \qquad a_6 = a_1+5n,\ a_{11} = a_1+10n \qquad a_8 = a_1+7n,\ a_9 = a_1+8n$$

$$\begin{cases} (a_1+5n)(a_1+10) > S+15 \\ (a_1+7n)(a_1+8n) < S+39 \end{cases}$$ – сложим оба нер-ва и получим верное:
$$(a_1+5n)(a_1+10)+S+39 > (a_1+7n)(a_1+8n)+S+15$$ все $a_1$ – уйдут после сокращения
$$\Downarrow$$
$$24 > 6n^2$$
$$4 > n^2.$$ Т.к. $n \in \mathbb{Z}$, то $n = \pm 1$.
Т.к. имеем возвр. арифм. прогрессию, то $\boxed{n=1}$.

Тогда: $S_5 = 5a_1+10n = \boxed{5a_1+10}$

Вернемся к нер-вам, подставив $n=1$
$$\begin{cases} (a_1+5)(a_1+10) > 5a_1+25 \\ (a_1+7)(a_1+8) < 5a_1+49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2+10a_1+25 > 0 \\ a_1^2+10a_1+7 < 0 \end{cases}$$
Решим по отдельности:
1) $a_1^2+10a_1+25>0 \Rightarrow (a_1+5)^2>0 \Rightarrow \underline{a_1 \neq -5}$
2) $a_1^2+10a_1+7<0$.  старш. коэф. $>0$, то нер-во выполнено при $a_1$, лежащим между корнями.
Корни ур-я: $a_1^2+10a_1+7=0$; $a_{1,2} = -5 \pm 3\sqrt{2}$

Чистовик 2

~~Тогда объединия~~

То есть получаем, что $a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2})$

Объединив два нер-ва системы имеем:

$a_1 \in$ ~~(-5; -3√2(-5; -3~~ $(-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2}) / \{-5\}$

Заметим, что
$4 < |3\sqrt{2}| < 5$
$(16 < 18 < 25)$

Т.к. $a_1 \in Z$, то

$a_1 = -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

Проверка:

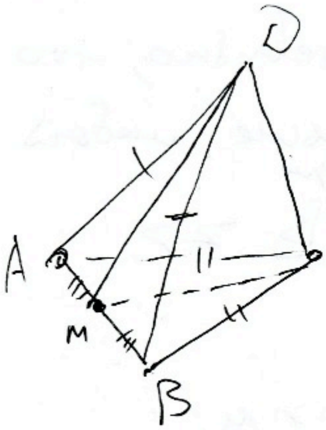
т.к. все найденные $a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2})$, то вторая часть системы верна.

т.к. ни один из найденных корней $\neq -5$, то и первая часть системы верна.



Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

№2.



Дано: $AB=2$; $AC=CB=7$;
$AD=BD=8$
$CD \parallel$ оси цилиндра; $r_ц = r_{min}$
Найти: $CD - ?$

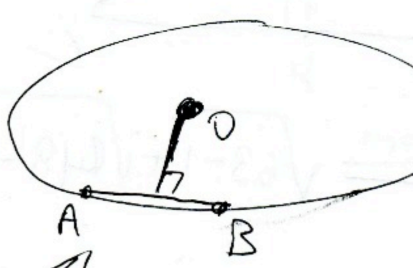
равнобедренный
Т.к. $\triangle CAB$ – р/б и $\triangle DAB$ – р/б, то из медиана, высоты и биссектрисы из вершин C и D пересекаются в одной точке M.

Т.к. $DM \perp AB$ и $CM \perp AB$, то $(DMC) \perp AB$
То есть и C, и D лежат в плоскости серпера к AB.

Отсюда мы понимаем, что $\underline{CD \perp AB}$.

Т.к. по условию $CD \parallel$ оси цилиндра, то
$\underline{CD \perp \text{основаниям}}$

Отсюда следует, что $AB \parallel$ основаниям цилиндра.
Давайте проведём плоскость через AB, которая будет $\parallel$ оснований. Рассмотрим сечение цилиндра этой плоскостью.

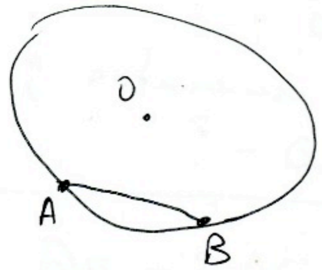


простой планим. факт.

Ну тогда поймём, что серпер к AB проходит через центр O этой окр-сти (очевидно, что сечение – окр-сть)
Ну а тогда плоскость (DCM) будет проходить через $O_1$ и $O_2$ – центры осн-й цилиндров.

Чистовик (4)

Нам дано, что взяли миним.-й радиус у цилиндра:




Имеем: $\underline{d_{осн} \geq AB}$ (диаметр) – очевидно, что диаметр не меньше любой хорды. Тогда $\underline{d_{min} = AB}$ (минимум) $\Rightarrow$

$\Rightarrow r_{min} = \frac{AB}{2} = 1$.

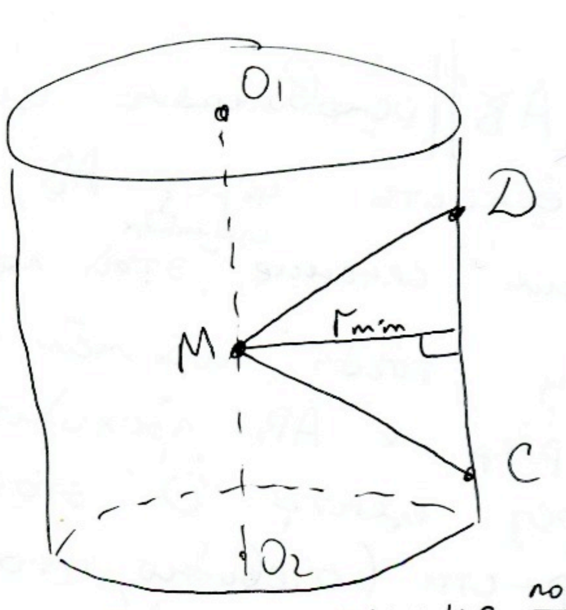
Отвлечемся и найдем длины DM и CM:

Знаем, что $\boxed{m = \sqrt{\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}}}$ (длина медианы), тогда

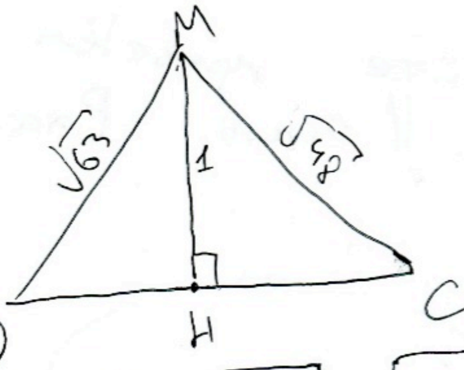
$DM = \sqrt{\frac{2 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^2 - 2^2}{4}} = \sqrt{63}$; $CM = \sqrt{\frac{2 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^2 - 2^2}{4}} = \sqrt{48}$.

Вернёмся к цилиндру (M – центр ~~осн.~~ плоскости осн. || основ. цилиндра)

т.е. M – центр окр-сти




То есть мы имеем планиметр. задачу:




Тогда $DC = DH + HC \xrightarrow{\text{по Th. Пифагора}} \sqrt{63-1} + \sqrt{48-1} = \sqrt{62} + \sqrt{47}$.

Ответ: $\sqrt{62} + \sqrt{47}$.

21102302 (U261528 M1303196)

Чистовик (5)

Дано: для $(x;y)$ $\exists$ $a, b \in Q$, что

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 13 \\ a^2+b^2 \leq \min(-4a-6b; 13) \end{cases}$$

Разберемся, какие $a$ и $b$ нам подходят:

Если $a>0$ и $b>0$, то $-4a-6b<0<13 \Rightarrow$
$\Rightarrow \min(-4a-6b; 13) = -4a-6b$

Но т.к. $a^2+b^2 \geq 0$, а требуем $a^2+b^2 \leq \underline{-4a-6b<0} \Rightarrow$
$\Rightarrow \varnothing$.

То есть мы должны требовать, чтобы
$-4a-6b \geq 0 \Rightarrow \boxed{a \leq -1{,}5b.}$

I случай: $-4a-6b \leq 13$ $\quad (a \geq -1{,}5b-3{,}25)$

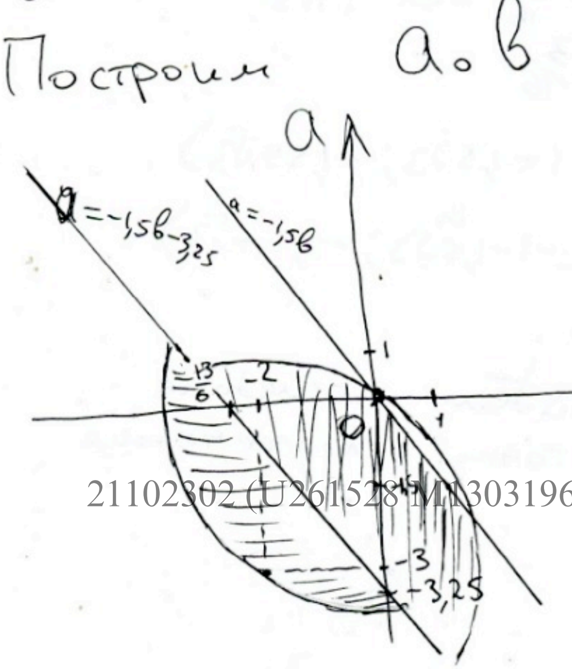
$a^2+b^2 \leq -4a-6b \quad |+13$

$\underline{(a+2)^2+(b+3)^2 \leq 13}$

II случай: $-4a-6b>13$ : $(a<-1{,}5b-3{,}25)$

$a^2+b^2 \leq 13$

Построим $a_o b$




Имеем:

$$\begin{cases} (a+2)^2+(b+3)^2 \leq 13 \text{ при } a \geq -1{,}5b-3{,}25 \\ a^2+b^2 \leq 13 \text{ при } a<-1{,}5b-3{,}25 \end{cases}$$

Я заштриховал интересующую нас зону

Также у нас есть условие, что $a \leq -1{,}5b$

Тогда найдём все точки пере-я:

$$\begin{cases} a^2+b^2=13 \\ a=-1{,}5b-3{,}25 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a+2)^2+(b+3)^2=13 \\ a=-1{,}5b-3{,}25 \end{cases}$$

Чистовик

6

$$\begin{cases} (a+2)^2+(b+3)^2=13 \\ a=-1{,}5b \end{cases}$$

Найдём реш-я системы:

1: $\begin{cases} a^2+b^2=13 \\ a=-1{,}5b-3{,}25 \end{cases} \Rightarrow (1{,}5b+\frac{13}{4})^2+b^2=13$

$$3{,}25b^2+\frac{39}{4}b-\frac{39}{16}=0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{13}$$

$$0{,}25b^2+0{,}75b-3/16=0 \quad \Big| \cdot 4$$

$$b^2+3b-0{,}75=0$$

$$D=9+3=12=(2\sqrt{3})^2$$

$$b=\frac{-3\pm2\sqrt{3}}{2}=-1{,}5\pm\sqrt{3}$$

$$a=-1{,}5(-1{,}5\pm\sqrt{3})-3{,}25$$

Тогда: $a;b=(-1+1{,}5\sqrt{3};-1{,}5-\sqrt{3});(-1-1{,}5\sqrt{3};-1{,}5+\sqrt{3})$

2: $\begin{cases} (a+2)^2+(b+3)^2=13 \\ a=-1{,}5b-3{,}25 \end{cases} \Rightarrow (1{,}5b+1{,}25)^2+(b+3)^2=13$

$$3{,}25b^2+\frac{15}{4}b+\frac{25}{16}+6b+9=13$$

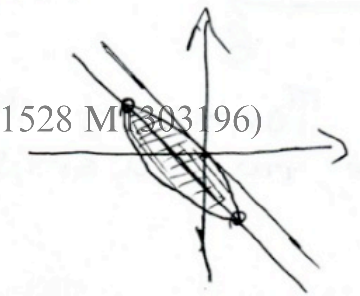
$$3{,}25b^2+\frac{39}{4}b-\frac{39}{16}=0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{13}$$

$$0{,}25b^2+\frac{3}{4}b-\frac{3}{16}$$

Заметим, что снова $a;b$ $(-1+1{,}5\sqrt{3};-1{,}5-\sqrt{3})$ и $(-1-1{,}5\sqrt{3};-1{,}5+\sqrt{3})$

(то есть точки совпали)

Тогда график:



Найдём последние точки пересечения.

Чистовик | 7

$$\begin{cases} (a+2)^2+(b+3)^2=13 \\ a=-1{,}5b \end{cases} \Rightarrow$$

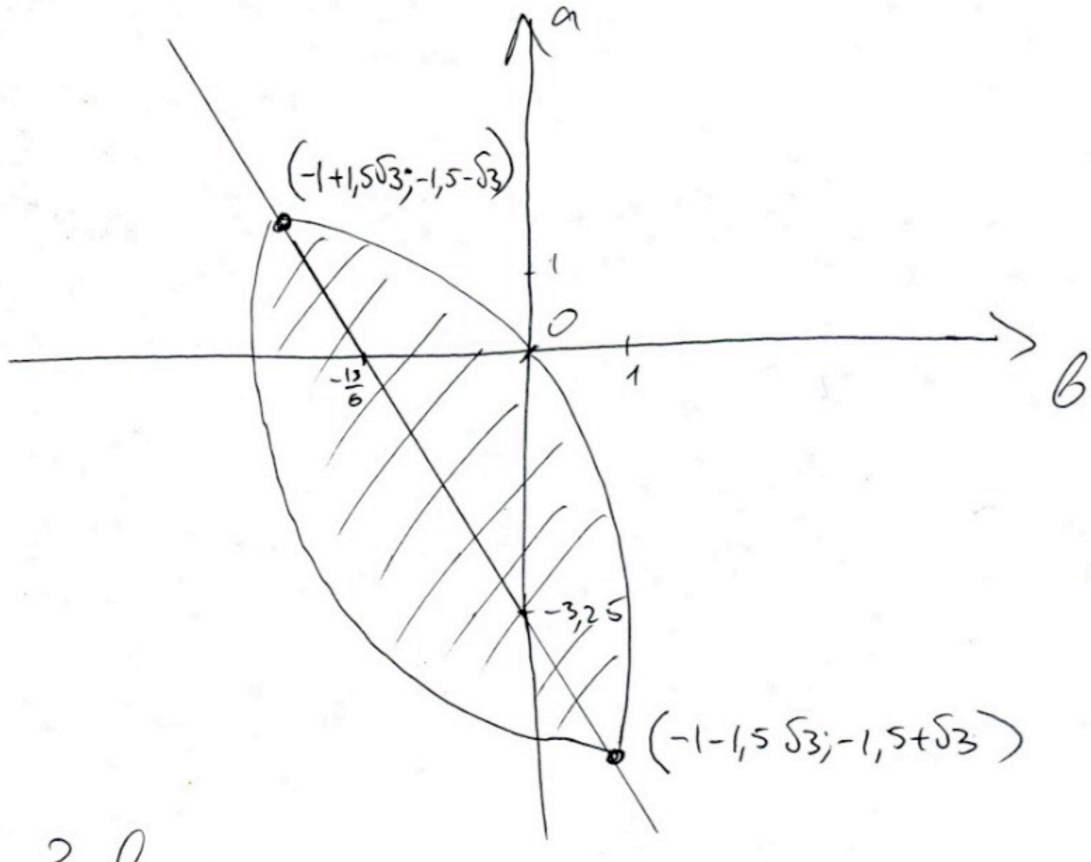
$\Rightarrow (1{,}5b-2)^2+(b+3)^2=13$

$3{,}25b^2-6b+4+\cancel{b}6b+9=13$

$b=0 \Rightarrow$ 1 точка пересечения

($a=-1{,}5b$ – касат-ная)

Итоговый график $a \circ b$:




Зависимость:

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 13 \quad \text{при} \quad a<-1{,}5b-3{,}25 \\ (a+2)^2+(b+3)^2 \le 13 \quad \text{при} \quad a \geq -1{,}5b-3{,}25 \end{cases}$$

21102302 (U261528 M1303196)

– Как мы строим $(x;y)$? – Для каждой точки $(a;b)$ строим окр-сть с р-м $(\sqrt{13})$

Черновик

№3. Для $(x;y)$ $\exists\ a,b \in \mathbb{Q}$, что

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b, 13) \end{cases}$$

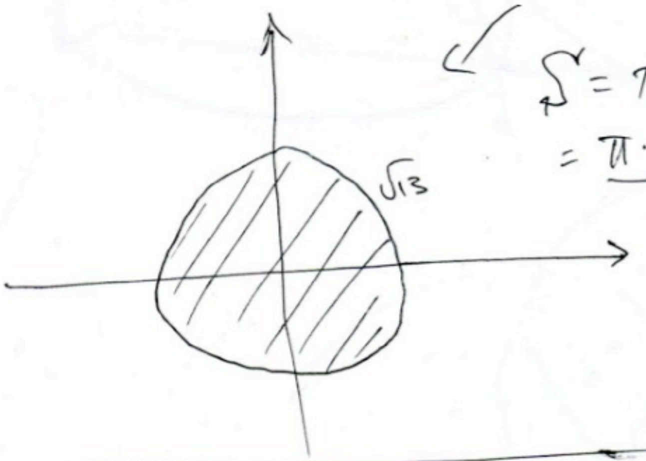
$a^2+b^2 \le \min(-4a-6b; 13)$

~~Для $\forall$ положит. $a, b \Rightarrow$ верно~~

$-4a-6b \vee 13$

$a=0;\ b=0$

$S=\pi R^2 = \pi \cdot 13$




$a^2+b^2 \le \min(-4a-6b; 13)$

Если $a \ge 0;\ b \ge 0$, то

$\min(-4a-4b; 13) = -4a-6b < 0$

и

$\begin{cases} a^2+b^2 \ge 0 \\ a^2+b^2 \le -4a-6b < 0 \end{cases}$ $\varnothing$

$\Rightarrow \begin{cases} a \ge 0 \\ b \ge 0 \end{cases} \to \varnothing$

$a+1{,}5b \in \left(-\frac{13}{4}; 0\right)$:

$a^2+b^2 \le -4a-6b$

~~$a^2+4a+4+b^2+4b+4 \le 8$~~

~~$(a+2)^2+(b+2)^2 \le 8$~~

$-4a-6b > 0$

$-a-1{,}5b > 0$

~~$a+b<0$~~

$a+1{,}5b < 0$

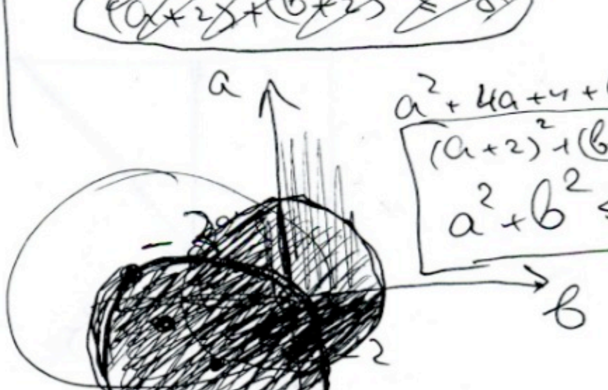
и $-4a-6b < 13$

$a+1{,}5b > -\frac{13}{4}$

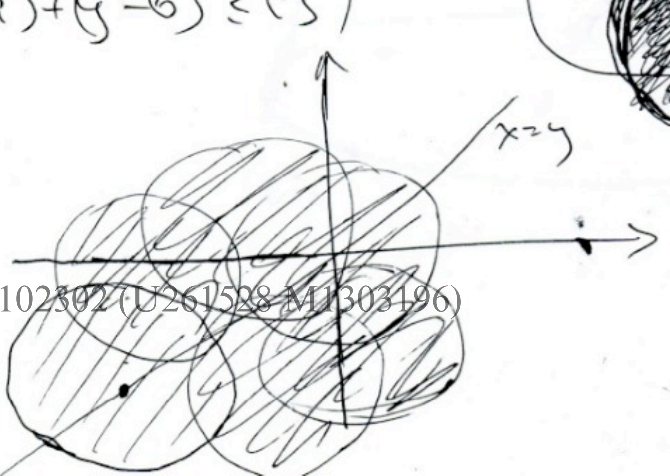
$a^2+4a+4+b^2+6b+9 \le 13$

$(a+2)^2+(b+3)^2 \le 13$

$a^2+b^2 \le 13$



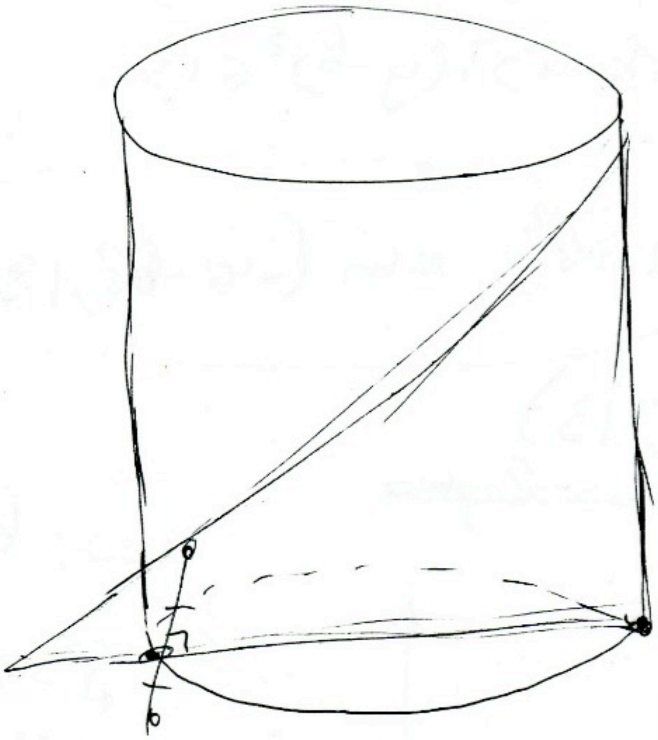

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13$

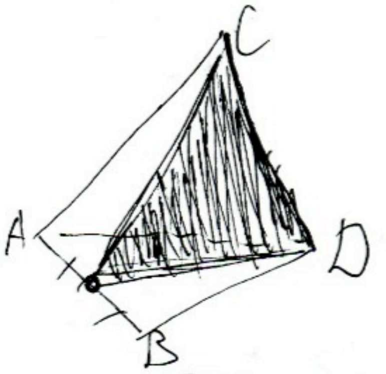


№2

AB = ?; AC = CB = 7

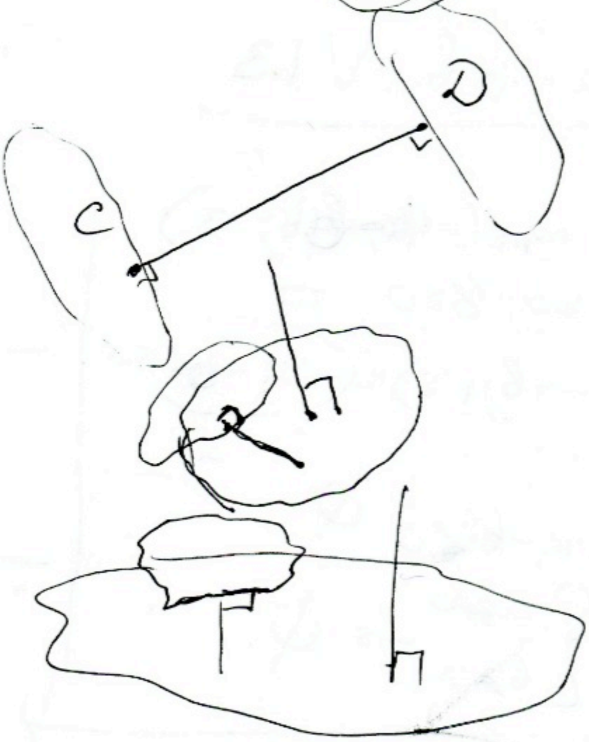
AD = DB = 8

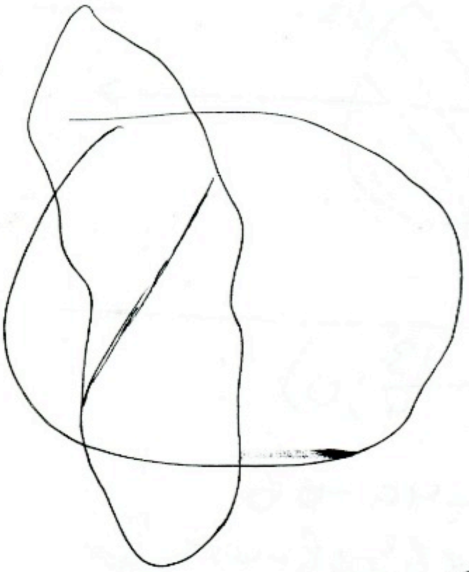


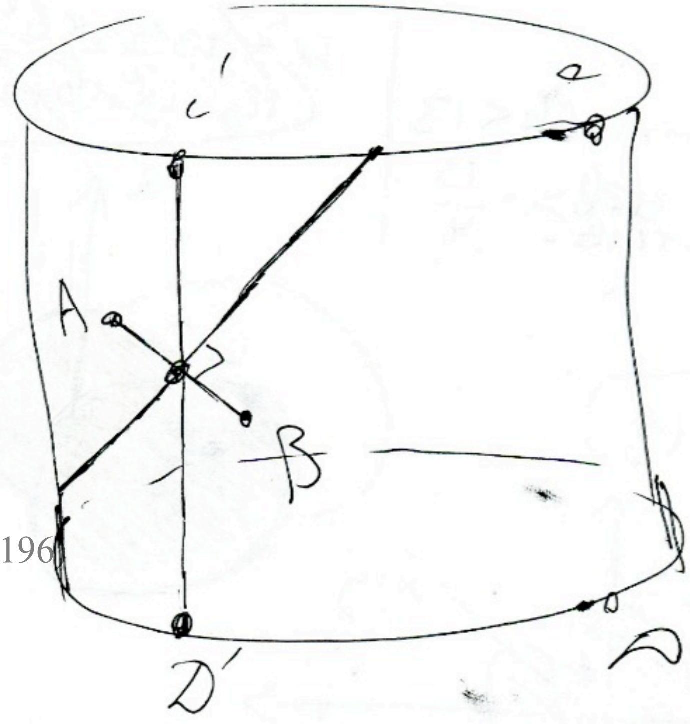



CD ⊥ AB

CD ⊥ OCH.





Черновик

№1. $n$ – шаг

$a_5 = a_1 + 4\cdot n$

$S = \frac{a_1 + a_5}{2}\cdot 5$ $\quad \frac{2a_1 + 4n}{2}\cdot 5 = 5a_1 + 10n$

$a_1 \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\begin{cases} a_6\cdot a_{11} > S + 15 \\ a_8\cdot a_9 < S + 39 \end{cases}$ $\quad a_6 = a_1 + 5n \quad a_{11} = a_1 + 10n$, $\quad a_8 = a_1 + 7n \quad a_9 = a_1 + 8n$

$\begin{cases} (a_1 + 5n)(a_1 + 10n) > 5a_1 + 10n + 15 \\ (a_1 + 7n)(a_1 + 8n) < 5a_1 + 10n + 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 15n\cdot a_1 + 50n^2 > 5a_1 + 10n + 15 \\ a_1^2 + 15n\cdot a_1 + 56n^2 < 5a_1 + 10n + 39 \end{cases}$ (+)

---

$\cancel{a_1^2} + \cancel{15n\cdot a_1} + 50n^2 + \cancel{5a_1} + \cancel{10n} + 39 > \cancel{5a_1} + \cancel{10n} + 15 + \cancel{a_1^2} + \cancel{15n\cdot a_1} + 56n^2$

$24 > 6n^2$

$n^2 < 4 \Rightarrow n = 1 \in \mathbb{Z}$.

Тогда $S = 5a_1 + 10$

$\begin{cases} (a_1 + 5)(a_1 + 10) > 5a_1 + 25 \\ (a_1 + 7)(a_1 + 8) < 5a_1 + 49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1 + 5)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -5 \\ \end{cases}$

$D = 10^2 - 7\cdot 4 = 100 - 28 = 72 = (6\sqrt{2})^2$

$a \in \left(\frac{-10 - 6\sqrt{2}}{2}; \frac{-10 + 6\sqrt{2}}{2}\right) \setminus \{-5\}$

$a \in (-5 - 3\sqrt{2}; -5 + 3\sqrt{2}) \setminus \{-5\}$.

$3\sqrt{2} \vee 5 \quad |^2$

$18 \vee 5$

$4 < 3\sqrt{2} < 5$

$a = -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

$a = -8 \quad n = 1$.

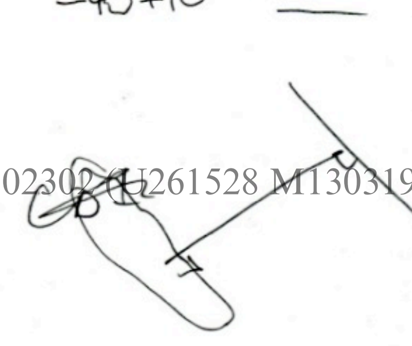
$S_5 = -40 + 10 = -30$

$a_6 = -8 + 5 = -3$; $a_{11} = -8 + 10 = 2$

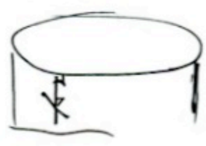
$-3\cdot 2 > -30 + 15$ ✓

$a_8 = -8 + 7 = -1$; $a_9 = -8 + 8 = 0$

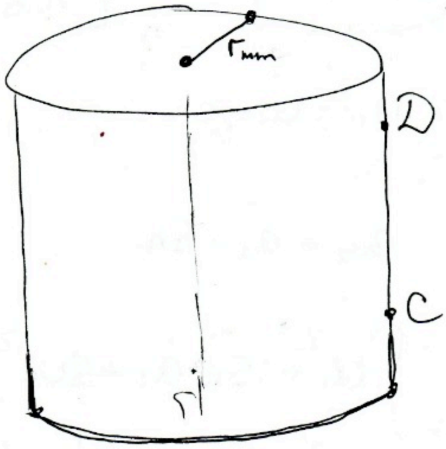
$0 < -30 + 39$ ✓

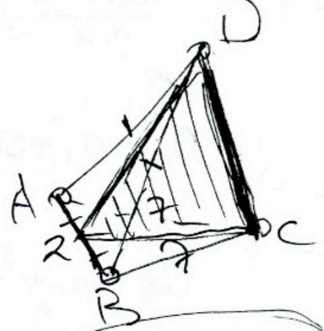


21102302 (U261528 M1303196)



№2. ABCD – тетраэдр  $AB=2$; $AC=CB=7$
$AD=DB=8$
$CD$ – ?

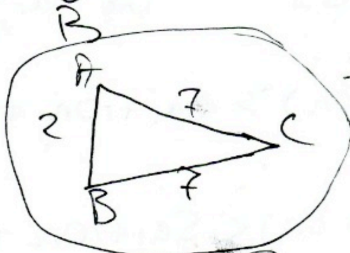


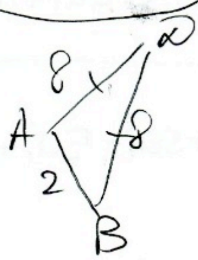

$CD \parallel$ оси ?

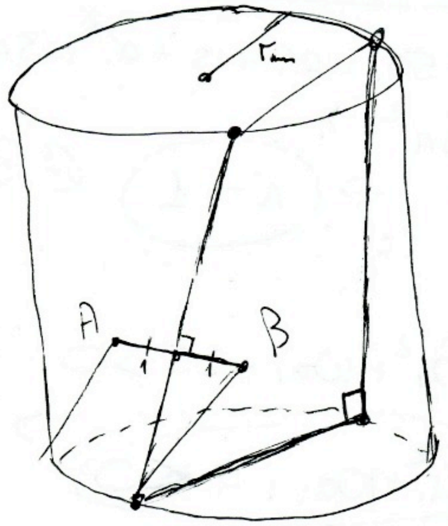
$CD \perp AB$
$CD \perp$ оси

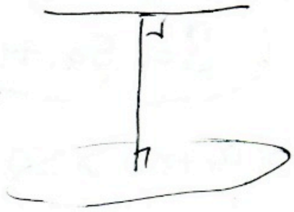
$AB \parallel$ оси

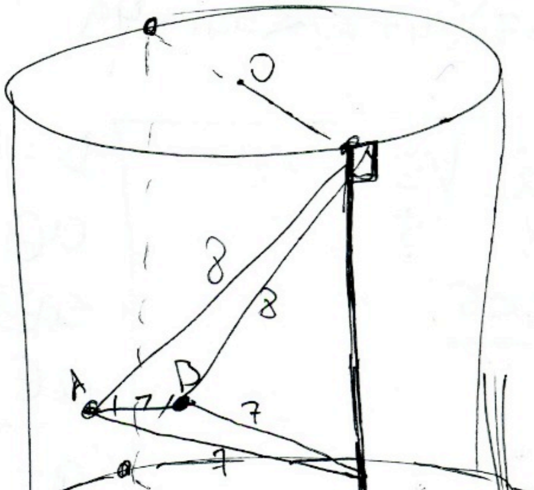



– р/б



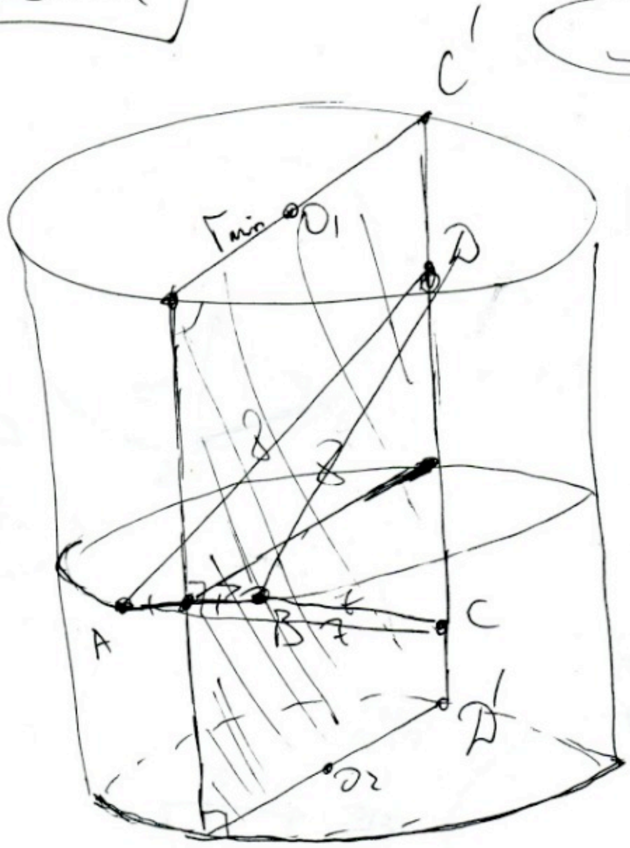



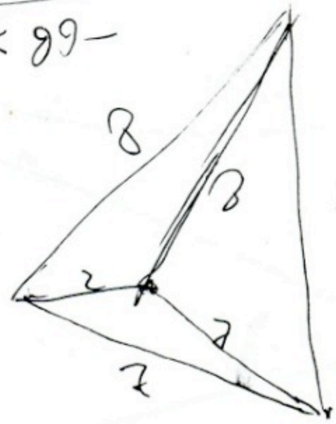



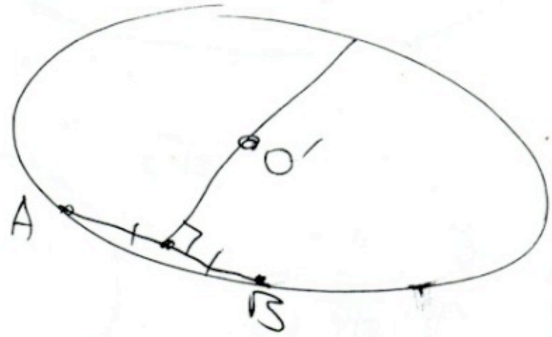


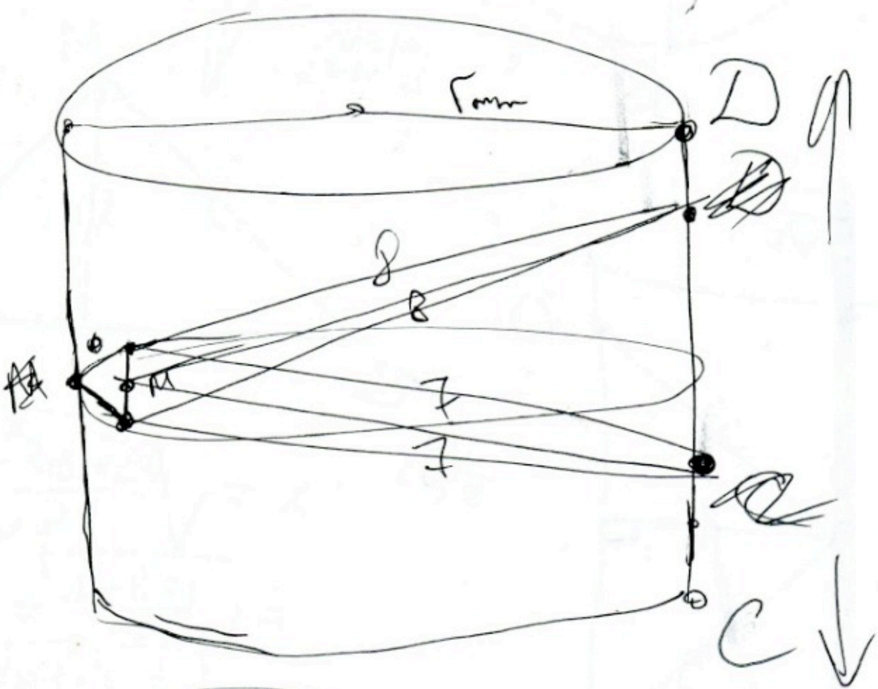

21102302 (U261528 M1303196)

Черновик



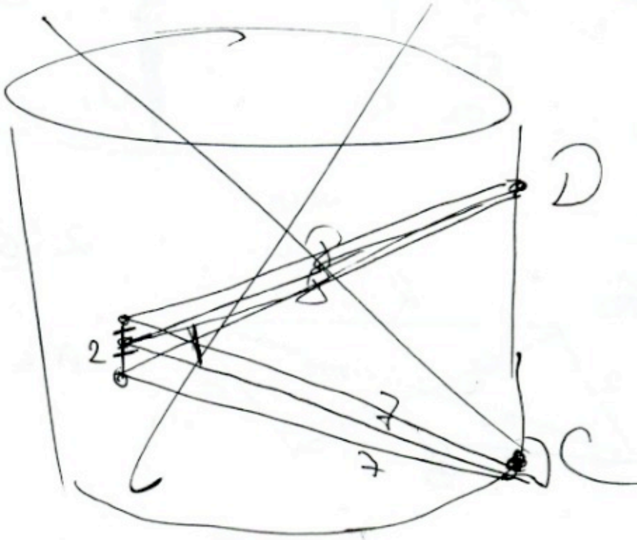



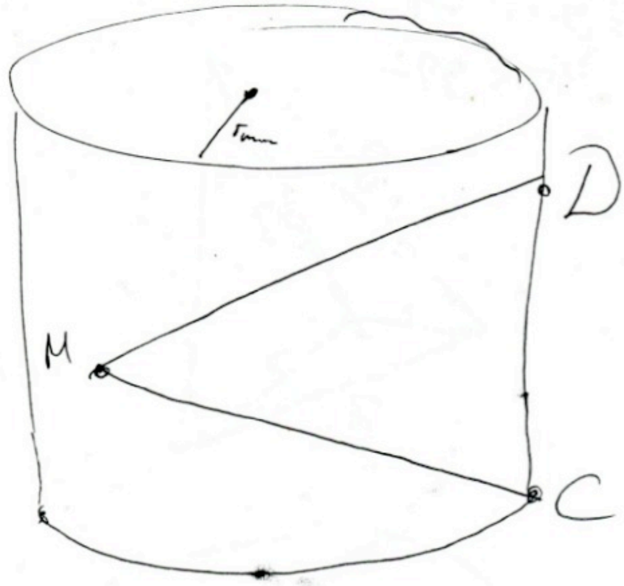



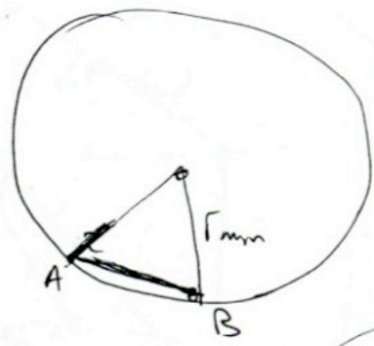

~~Уменьшая радиусы, мы поднимаем т. C и т. D~~

~~Одна / обе точки ∈ основ-ным~~


или

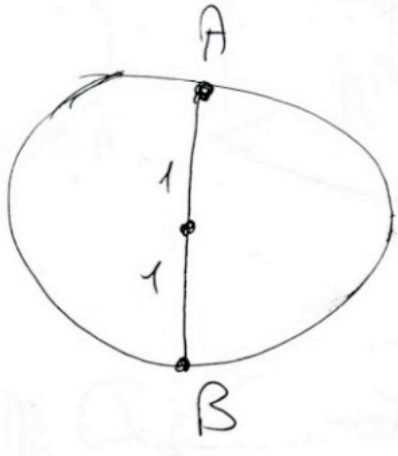


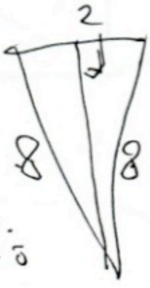


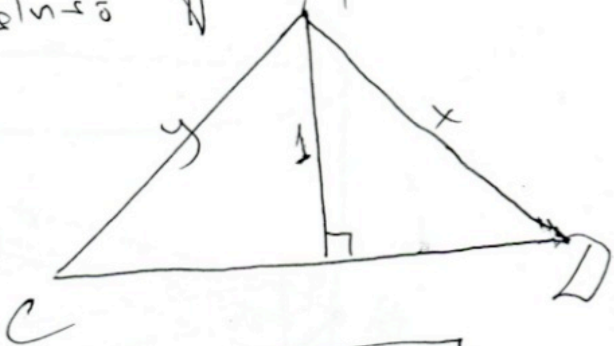


$d \geq AB = 2$

$d = 2$





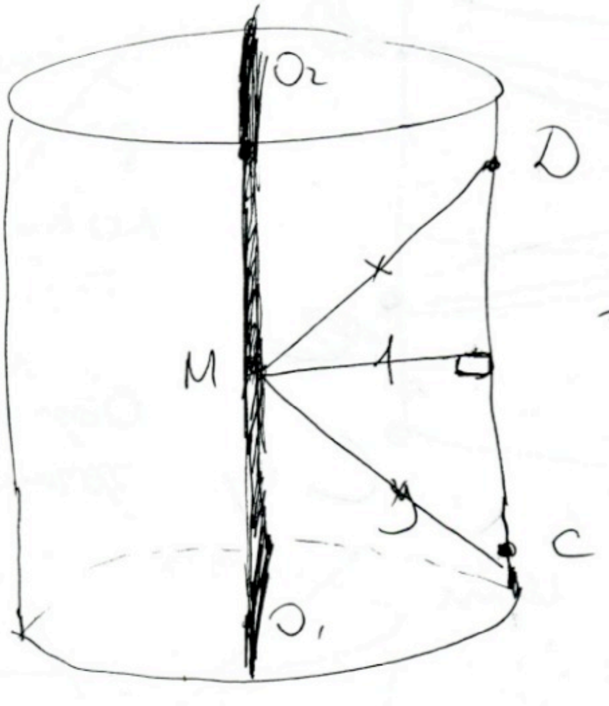


$3{,}25 = -1{,}5b$

$c - 4a - 6b \leq 13$

$-13 - 6b \leq 4a$

$a \geq -1{,}5b - 3{,}25$

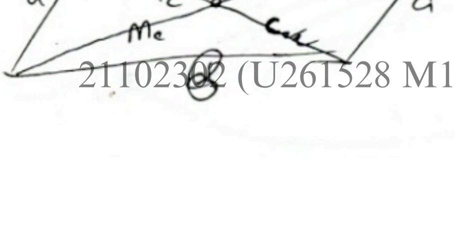


$$X = \sqrt{\frac{2\cdot 8^2 + 2\cdot 8^2 - 2^2}{4}} = \sqrt{\frac{128-2}{2}} = \sqrt{\frac{126}{2}} = \sqrt{63}$$

$$y = \sqrt{\frac{2\cdot 7^2 + 2\cdot 7^2 - 2^2}{4}} = \sqrt{7^2 - 1} = \sqrt{48}$$

$a \geq -1{,}5b$

$$2(a^2 + b^2) = c^2 + 4m_c^2$$



$$m_c = \sqrt{\frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}}$$

$$CD = \sqrt{63-1} + \sqrt{48-1} = \sqrt{62} + \sqrt{47}$$

21102302 (U261528 M1303196)

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102302**

ID профиля: **261528**

Вариант 20

Чистовик ①

№4. $a, b, c \in N$ $\quad HOD(a,b,c) = 10$

$HOK(a,b,c) = 2^{17} \cdot 5^{16}$

Найти кол-во $(a;b;c)$

Решение: Т.к. $HOK(a,b,c) = 2^{17} \cdot 5^{16}$, то никакие другие простые мн-ли (кроме 2 и 5) не состоят в $a, b, c$. То есть у нас числа: $2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1}$; $2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2}$; $2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3}$

Т.к. $HOD = 10$, то каждое число $\geq 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \geq 1$ (очевидно $\in N$)

Заметим, что если одновременно $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 2$, то $HOD \,\vdots\, 4$, а $10 \not\vdots\, 4 \Rightarrow$ хотя бы один из $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 1$.

Аналогично с $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

Тогда наши числа:
$$\left[\begin{array}{l} 2 \cdot 5^{\beta_1};\ 5 \cdot 2^{\alpha_1};\ 2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2} \\ 10;\ 2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1};\ 2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2} \end{array}\right.$$

В дальнейшем решении данные случаи будут равнозначны (поэтому нет необходимости разбивать на случаи).

Т.к. $HOK = 2^{17} \cdot 5^{16}$, то $\max(\alpha_1, \alpha_2) = 17$, $\max(\beta_1, \beta_2) = 16$

Тогда наши всевозможные варианты:

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \alpha_1 = 17: \ \alpha_2 = 1, 2, \ldots, 17 \\ \alpha_2 = 17: \ \alpha_1 = 1, 2, \ldots, 17 \end{array}\right\} \text{Всего 34 варианта} \\ \left[\begin{array}{l} \beta_1 = 16: \ \beta_2 = 1, 2, \ldots, 16 \\ \beta_2 = 16: \ \beta_1 = 1, 2, \ldots, 16 \end{array}\right\} \text{Всего 32 варианта.} \end{array}\right.$$

Чистовик 2

Тогда всего у нас

$32 \cdot 34$ вар-та расстановки степеней.

(чтобы условия на НОК и НОД выполнялись)

ещё нам необх-мо учесть перестановки

чисел. Поэтому умножаем ещё на 3!

Итого: $6 \cdot 32 \cdot 34 = 1088 \cdot 6 = \boxed{6528}$

Ответ: 6528.

Чистовик (3)

№5.

Лемма:

$\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_a c = 1$. (При соблюдении ОДЗ).

Докажем:

$\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_a c = \frac{\log_c b}{\log_c a} \cdot \log_a b = \log_a b \cdot \log_a b =$

$= \frac{\log_a b}{\log_a b} = 1$ (В ОДЗ).

Тогда заметим, что пр-е наших логарифмов в ОДЗ равно:

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) \cdot \log_{(x-4)^2}(5x-26) \cdot \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) =$

$= 2 \cdot \log_{\cancel{2x-8}}(x-4) \cdot \frac{1}{2} \log_{x-4}(5x-26) \cdot 2 \cdot \log_{5x-26}(2x-8) \overset{\text{по лемме}}{\underset{\text{в ОДЗ}}{=}} 2 \cdot 1 = 2$

Наше усл-е: два из лог-ов равны, а третье ~~равно~~ больше на 1.

Тогда в общем случае имеем:

Пусть оба лог-ма $= a$ (любых)

Тогда последний равен $a+1$

Получаем:

$a \cdot a \cdot (a+1) = 2$

21102302 (U261028 M1303192)

$a^3 + a^2 - 2 = 0$. — $a = 1$ — корень.

$$\begin{array}{r|l} a^3+a^2-2 & a-1 \\ \hline -a^3-a^2 & a^2+2a+2 \\ -2a^2-0\cdot a & \\ 2a^2-2a & \\ -2a-2 & \\ 2a-2 & \\ 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow 0 = a^3+a^2-2 = (a-1)(a^2+2a+2)$

$(a-1)(a^2+2a+2) = (a-1)(\underbrace{(a+1)^2+1}_{>0 \text{ при } \forall a}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ имеем ! корень: $a=1$.

Что это значит? ~~Оба условия выполнены тогда и только~~ то Необходимое условие для выпол-я обоих тр-й — 2 лог-ма равны 1, посл-й равен 2.

Переберём немного случаев:

$\log_{(x-4)^2}(5x-26) = 1$ — пусть этот равен „1".

$(x-4)^2 = 5x-26$

$x^2-8x+16 = 5x-26$

$x^2-13x+42=0$

По Th Виетта:

$x=6$ $(5x-26 = 5\cdot 6-26>0)$

$x=7$ $(5x-26 = 5\cdot 7-26>0)$

При $x=6$:

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_2 2 = 1$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = \log_2 4 = 2$

$\Rightarrow$ при $x=6$ все требования выполнены (оно также подходит под ОДЗ, мы убедились в этом, подставив корень)

При $x=7$:

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{\sqrt{6}} 3 \neq 1, \neq 2$ $\Rightarrow$ не подходит.

Тогда остаётся случай, где $\log_{(x-4)^2}(5x-26) = 2$

В этом случае ~~4ог~~ остальные лог-мы $=1$:

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 1 \Rightarrow \sqrt{2x-8} = x-4 > 0$

$2x-8 = x^2-8x+16 \Rightarrow x^2-10x+25-1=0$

$(x-5)^2=1$

$\left\{\begin{array}{l} x=4 \text{ — не подх. под ОДЗ } (x-4)=0, \text{ но } x-4>0 \\ \boxed{x=6} \end{array}\right.$

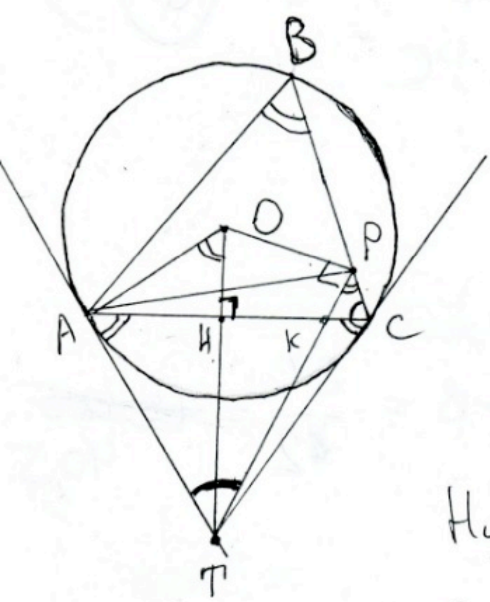


Т.е. он равен ед. только при $x=6$

Но при этом $x$: $\log_{(x-4)^2}(5x-26) \neq 2$ (он равен 1)

Тогда разобраны все случаи. Ответ: 6

№6. $S_{APK}=10$; $S_{PCK}=8$




Т.к. $AT$ и $CT$ - касат-е, то $\angle OAT=90^\circ$, $\angle OCT=90^\circ$;

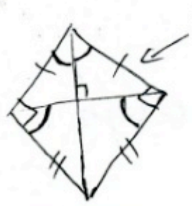
Отсюда: $AOCT$ - впис 4^к.

Т.к. $AOCP$ также впис 4^к, то все точки $A, O, P, C, T$ - лежат на одной окр-сти (опис. около $AOC$)

Ну а тогда: т.к. $AOPT$ - впис, то $\angle OPT=90^\circ$ $(=180-\angle OPT)$

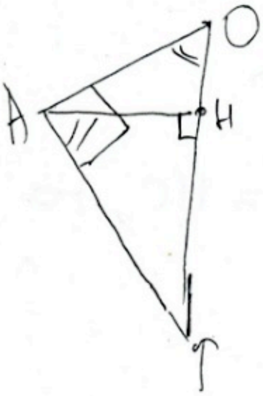
Т.к. $\angle OPT=90^\circ$, то $OT$ - диаметр окр-сти, опис около $AOC$.

Понимаем, что раз $OA=OC$ и $AT=TC$, то $AC\perp OT$




---

Заметим, что $\angle ABC=\angle\frac{AOC}{2}=\angle AOT$.



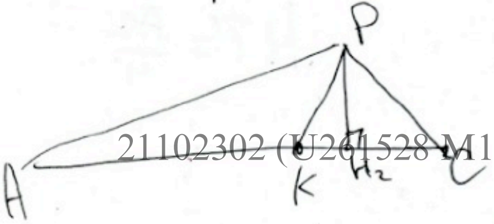

Отсюда: $\angle AOT=\angle \underline{HAT}$.

Т.к. $TAPC$ - впис, то $\angle TAC=\underline{\angle TPC}$

Тогда: $\underline{\angle ABC=\angle TPC}$ =>

=> $\triangle ABC \sim \triangle KPC$ (угол $\angle PCK$ - общий)

Посмотрим на $\triangle$^к $APC$: Опустим высоту $h$ ($PH_2\perp AC$)




$10=S_{APK}=AK\cdot PH_2\cdot\frac{1}{2}$

$8=S_{CPK}=KC\cdot PH_2\cdot\frac{1}{2}$ ↓ делим:

$$\boxed{\frac{5}{4}=\frac{AK}{KC}}$$

Чистовик 6

Т.к. $\frac{AK}{KC} = \frac{5}{4}$, то $\frac{AC}{KC} = \frac{AK}{KC} + \frac{KC}{KC} = 1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}$;

Знаем, что $\triangle ABC \sim \triangle KPC$

$k$ коэф. подобия $= \frac{AC}{KC} = \frac{9}{4}$.

Тогда $k^2 = \frac{81}{16}$.

$\frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = k^2 \Rightarrow S_{ABC} = k^2 \cdot S_{KPC} = \frac{81}{\cancel{16}_2} \cdot \cancel{8} = \frac{81}{2} = \cancel{10{,}125}$ 40,5

a) Ответ: 40,5

---

Теперь известно, что $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$

AC – ?

Вер-ся к чертежу.

Т.к. $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, то $\operatorname{tg}\angle ABC = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\angle AOT = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AH}{OH} = \frac{1}{2}$; Т.к. $AH = HC$, то

$AC = 2AH = OH \Rightarrow AC = OH$

Также: $\operatorname{tg}\angle HAT = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{HT}{AH} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ $\cancel{HT = \frac{AC}{4}}$

$HT = \frac{AC}{4}$

21102302 (U261528 M1303197)

(Черновик)

4.

$a, b, c \in N$

$НОД(a, b, c) = 10$

$НОК(a, b, c) = 2^{17} \cdot 5^{16} = 10^{16} \cdot 2$

Найти кол-во $(a; b; c)$

$a, b, c \vdots 10 = 2^1 \cdot 5^1$

Каждый член $\leq 2^{17} \cdot 5^{16}$

Т.к. НОД = 10, то каждый $\geq 10$.

$+\frac{1088}{6592}$ 6

~~10~~ если у нас ~~есть число $\geq 10$, то~~ все числа $\geq 10$, то

$10p_1 \quad 10p_2 \quad 10p_3$

и $10^3 p_1 p_2 p_3 \vdots 10^{16} \cdot 2 \Rightarrow p_1, p_2, p_3 \vdots 2, 5$, но

Тогда НОД равен 10 т.и т.т.к ~~$p_1 = 2$~~ ~~$p_2 = 5$~~

~~20~~ ~~50~~ —

$(p_1, p_2) = 1.$

$2^{\alpha} \cdot 10 \quad 5^{\beta} \cdot 10$

$2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1} \quad 2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2} \quad 2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3}$

~~$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \leq 2^{17}$~~ (и один — равен)

~~$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \leq 5^{16}$~~

$16 = \max(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$

$17 = \max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

$НОД = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10 \cdot k_1$

$10 \cdot k_2$ и $(k_i; k_j) = 1$

$10 \cdot k_3$ $\quad 2^x \quad 5^y$

$32 \cdot 34 =$

$= 32^2 + 32 \cdot 2 =$

$= (2^5)^2 + 2^6 =$

$= 2^{10} + 2^6 =$

$= 1024 + 64 =$

$= 1088$

Т.е есть число:

$\boxed{2^{\alpha \geq 1} \cdot 5 \; ; \; 2 \cdot 5^{\beta \geq 1} \text{ и } 2^{\alpha_2 \geq 1} \cdot 5^{\beta_2 \geq 1}}$, где

$\max(\alpha, \alpha_2) = 17$

$\max(\beta; \beta_2) = 16$

$\left.\begin{array}{l}\alpha_2 = 17: \; \alpha = 1, 2, \ldots, 17 \\ \alpha = 17: \; \alpha_2 = 1, 2, \ldots, 17\end{array}\right\} 34$

$\left.\begin{array}{l}\beta = 16: \; \beta_2 = 1, \ldots, 16 \\ \beta_2 = 16: \; \beta = 1, \ldots, 16\end{array}\right\} 32$

21102302 (U261528 M1303197)

Черновик

$\boxed{x=6}$

$\log_{\sqrt{2x-8}}^{(x-4)} = \log_{(x-4)^2}^{5x-26}$

$2\ \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) \quad \frac{1}{2}\log_{(x-4)^2}(5x-26) \quad 2\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$14-8==6$

$5\cdot 7-26= =\sqrt{35-26}=\sqrt{9}=3$

$37\cdot 37= 1369$

$90\cdot 16= 1440$

$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=$

$=\frac{\log_b c}{\log_b a}\cdot\log_c a=\log_a c\cdot\log_c a=1$ в ОДЗ

2) пр-е log... равно 1.

$\cancel{a\cdot a\cdot(a^2+1)=1}$ $\quad \cancel{a\cdot a(a+1)=1}$

$\cancel{a^3+a^2-1=0}$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)\cdot\log_{(x-4)^2}(5x-26)\cdot\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=$

$=2\cdot\log_{2x-8}(x-4)\cdot\frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)\cdot 2\cdot\log_{5x-26}(2x-8)=2$

$=2a^2(a+1)=1$

$a^3+a^2=\frac{1}{2}$

$\cancel{\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{1}{8}+\frac{2}{8}=\frac{3}{8}}$

$\frac{1}{27}+\frac{1}{9}= \cancel{=\frac{1}{27}+\frac{3}{27}=\frac{4}{27}}$

$\cancel{2a^2(a+1)=1}$ ~~в ОДЗ~~

$a^2(a+1)=2$

$a=1$

$a^3+a^2=2$

$a^3+a^2-2=0$

$$\begin{array}{r|l} a^3+a^2-2 & a-1 \\ \underline{a^3-a^2} & \overline{a^2+2a+2} \\ 2a^2-0a & \\ \underline{2a^2-2a} & \\ 2a-2 & \end{array}$$

$a^2+2a+2=(a+1)^2+1>0$

! корень!

$a=1$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=1$

$\sqrt{2x-8}=x-4>0$

$2x-8=x^2-8x+16$

$x^2-10x+24=0$

$(x-5)^2-1=0$ $\quad\varnothing$

$x=5\pm1$

$x=4$ $\cancel{\ }$

$x=6$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26)=1$

$(x-4)^2=5x-26$

$x^2-8x+16=5x-26$

$x^2-13x+42=0$

$x=7$

$x=6$

$6\cdot5-26>0$ ✓

$5\cdot7-26>0$ ✓

$\sqrt{5x-26}=2x-8$

$5x-26=4x^2-32x+64$

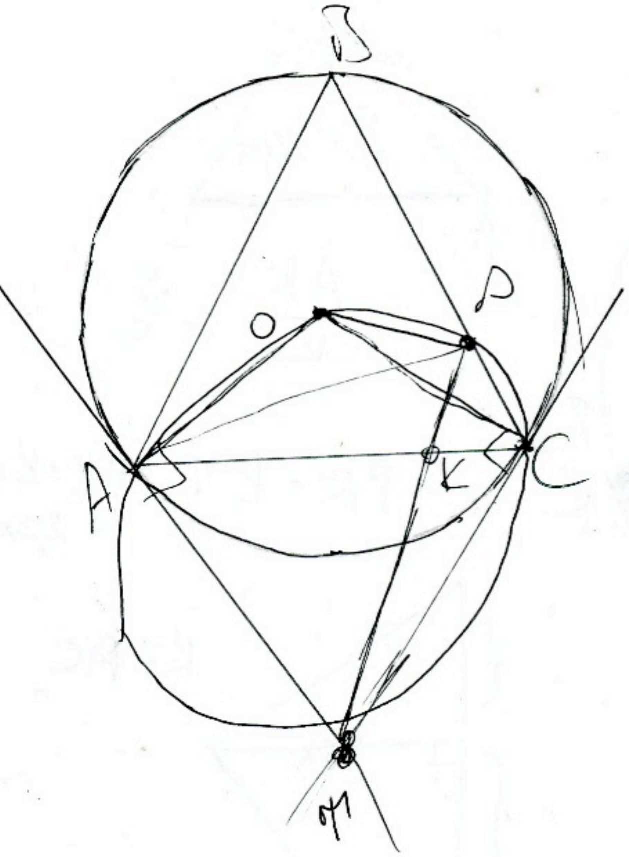
$4x^2-37x+90=0$

$D=37^2-4^2\cdot90<0$

корней нет

21102302 (D261528 M1303197)

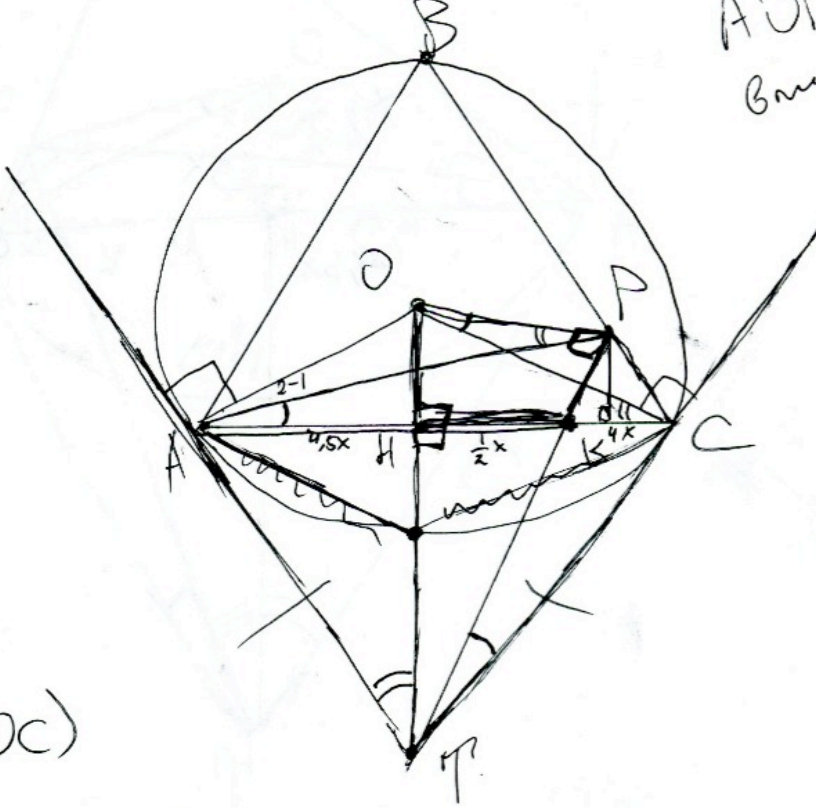
Черновик



$S_{APK} = 10$ $S_{ABC} = ?$

$S_{CPK} = 8$

AOPC — впис

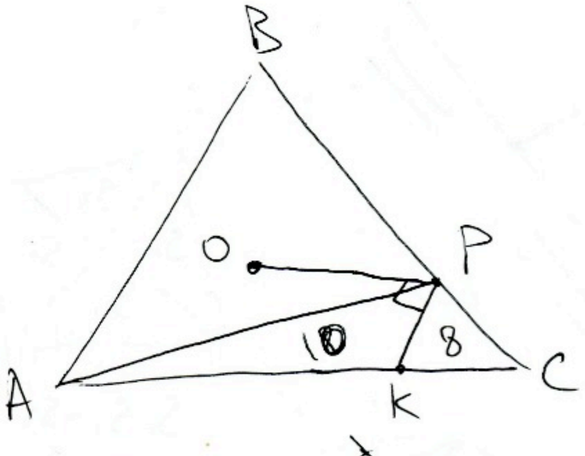


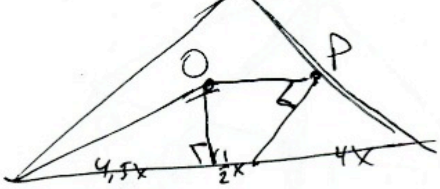
$T \in$ окр $(AOC)$

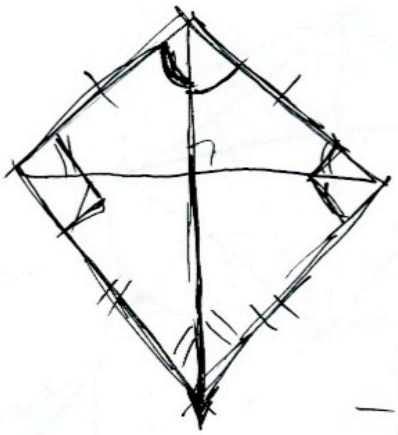
$A, O, P, C, T \in$ одной окр-сти.

$\Rightarrow \angle OPT = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ OT — диаметр







$\frac{AK}{KC} = \frac{5}{4}$

$KC = 4x$

$AK = 5x$

$AH = AK - HK$

$AH = HK + KC$

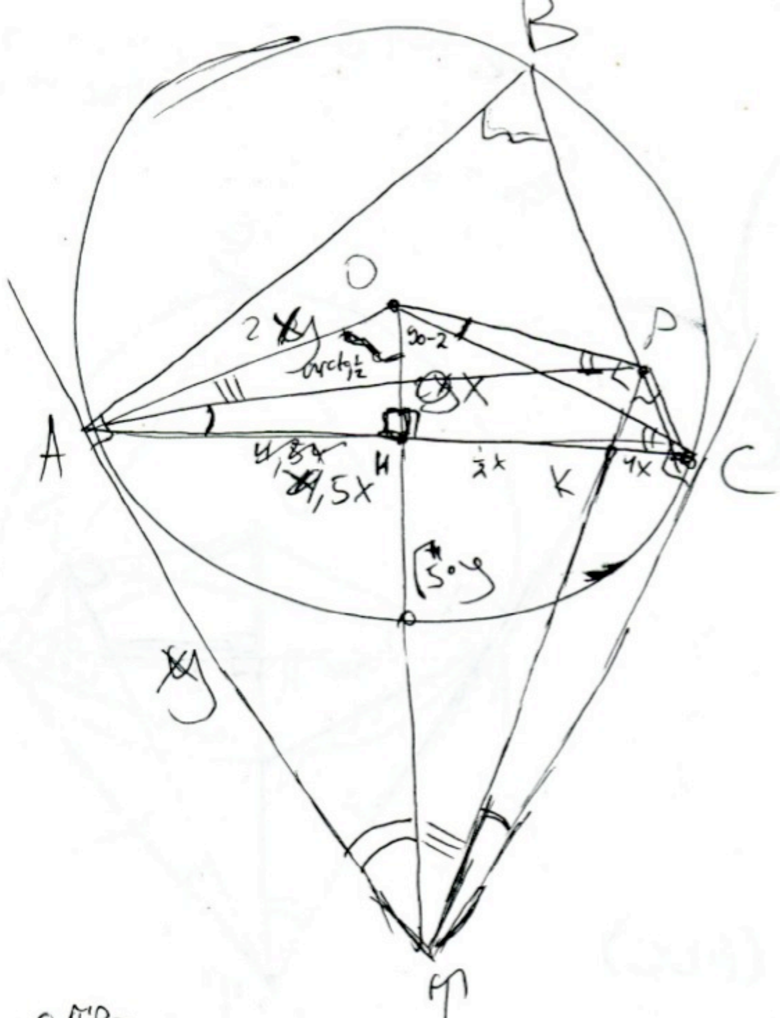
$0 = AK - KC - 2HK$

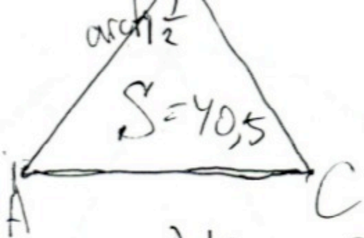
$HK = \frac{1}{2}x$

$\frac{PH_2 \cdot AK}{2} = 10$

$\frac{PH_2 \cdot KC}{2} = 8$

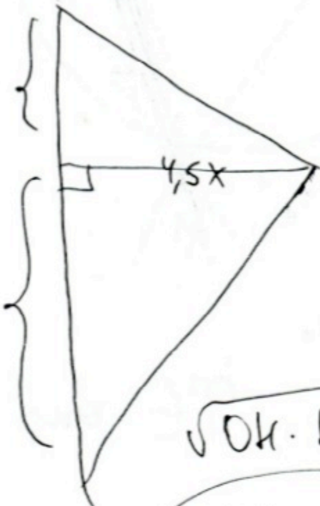
$\frac{AK}{KC} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$




$$\frac{AK}{KC}=\frac{5}{4}$$

$PK\cdot KM = AK\cdot KC =$
$= 20x$




$R = AC$

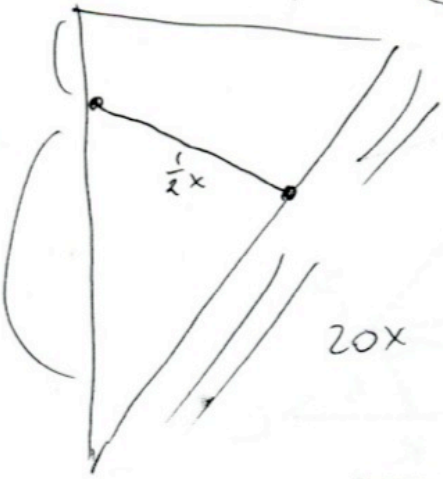
$\sqrt{OH\cdot HT} = 4,5x$

$OH\cdot HT = \frac{81}{4}x$

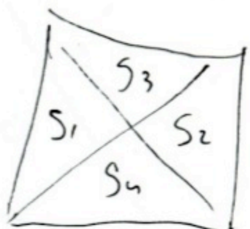
$\angle OTP =$
$= 90-(90-2)-1$

$90-(90-2)-1=$
$= 2-1$

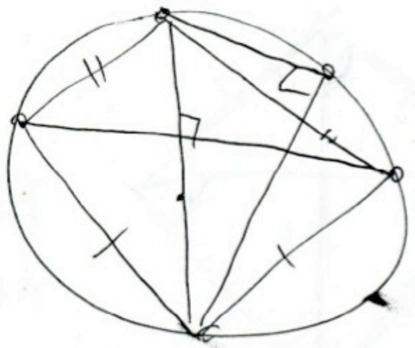
$20,25x$

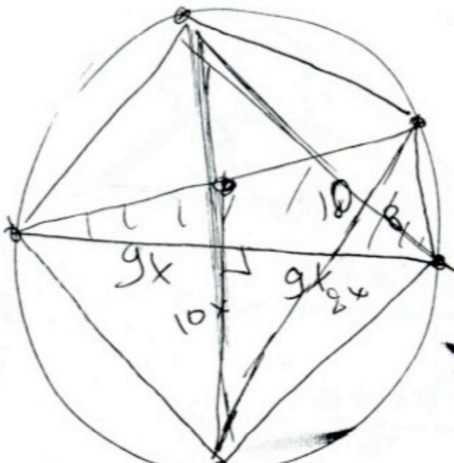


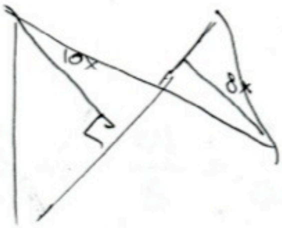
$20x$




$S_1\cdot S_2 = S_3\cdot S_4$






21102302 (U261528 M1303197)

$\frac{AC^2}{2}$

$\cancel{\frac{AC}{\sin(\operatorname{arctg}\frac{1}{2})} = 2AC}$