Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102174**

ID профиля: **382663**

Вариант 20

(1.1.) Чистовик.

N1 пусть шаг. арифметической прогрессии ~~*~~ это p.

$S = a_1 \cdot 5 + 10 \cdot p$

$\begin{cases} a_6 \cdot a_{11} > S + 15 \\ a_8 \cdot a_9 < S + 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1 + 10p)(a_1 + 5p) > S + 15 \\ (a_1 + 7p)(a_1 + 8p) < S + 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 50p^2 + 15a_1p > a_1 \cdot 5 + \ldots \\ a_1^2 + 56p^2 + 15a_1p < 5a_1 + 10p + 3\ldots \end{cases}$

Вычтем из нижнего верхнее (при выч. знак у верх нерав. изм. ↓)

$6p^2 < 24.$, т.к. члены АП целые, а сама П. возраст., то $p > 0$

$p^2 < 4$ $\quad p = 1 \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 50 + 15a_1 > 5a_1 + 25. \\ a_1^2 + 56 + 15a_1 < 5a_1 + 49. \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0. \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1 + 5)^2 > 0 \\ a_1 \in (-5 - 3\sqrt{2}; -5 + 3\sqrt{2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \neq -5 \\ a_1 \in \{-9; -8; \ldots -2; -1\} \end{cases}$

в целых числах

$100 - 28 = (6 \cdot \sqrt{2})^2$

$a_1 = \frac{-10 \pm 6\sqrt{2}}{2}$

a

Ответ: $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

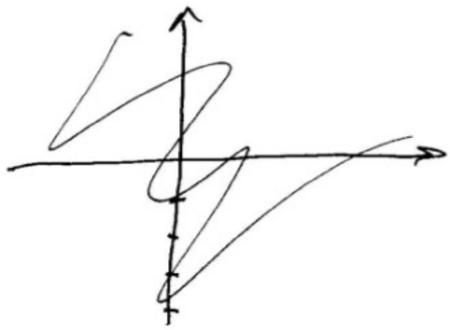
21102174 (U382663 M1300463)

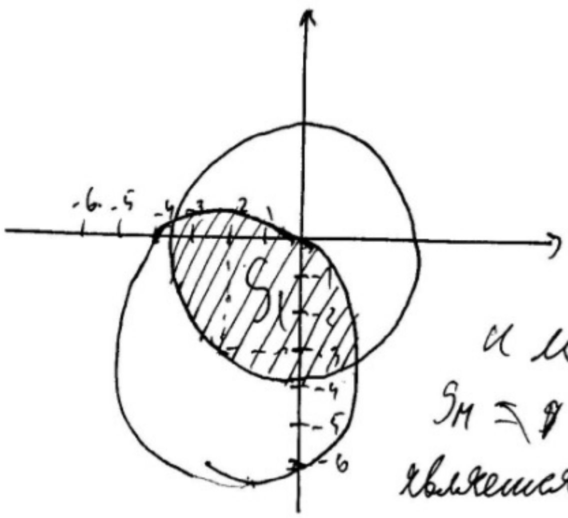
(1.2)

Чистовик

N 3. $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b, 13)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13.\\ a^2+b^2\le 13\\ a^2+b^2\le -4a-6b\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13.\\ a^2+b^2\le 13\\ (a+2)^2+(b+3)^2\le 13.\end{cases}$ это 3 ур. окр.





$S_1 = \cap$ второго и третьего неравенства.

и множество центров окр. с радиусом $\sqrt{13}$.

$S_M = \emptyset$ образуется окр. с центрами на S_1 и являющаяся овалом с $R_{max} = 3\sqrt{13}$ и $R_{min} = \frac{3}{2}\sqrt{13}$.

21102174 (U382663 M1300463)

№3. Чистовик.

N2. ортогональная проекция эт~~ого~~их тетраэдров на осн. цилиндр. всегда Δ, т.к. $CD \parallel$ оси цилиндра, кот. $\perp$ пл.-ти осн., то есть R цилиндра тем меньше, чем ближе ~~про~~ A и B к DC; при приближении A и B к DC DC увел., а т.к. любой Δ можно вписать в окр., то и любой изобр. тетраэдр можно вписать в цилиндр $\Rightarrow CD$ – ~~...~~ максимально возможный. По неравенству рассмотрим расстояния от D и C до AB: $\sqrt{63}$ и $\sqrt{48}$ соответственно: сторона Δ меньше Σ двух др. сторон $\Rightarrow DC_{max} < \sqrt{63}+\sqrt{48}$. (если $DC = \sqrt{63}+\sqrt{48}$, то $AB \cap DC$, а у тетраэдра скрещ. прямые не пересек.)

Ответ: $DC \in (0; \sqrt{63}+\sqrt{48})$

21102174 (U382663 M1300463)

Черновик.

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5 . = 5a_5 + 10 \cdot p$

$a_6 \cdot a_{11} > 5 + 15$

$a_8 \cdot a_9 < 5 + 39$

$a_6 = a_1 + p(6-1)$

$a_{11} = a_1 + 10p$

$a_8 = a_1 + 7p$

$a_9 = a_1 + 8p$

$a_1^2 + 50p^2 + 15p > 5a_1 + 10p + 15$

$a_1^2 + 56p^2 + 15p < 5a_1 + 10p + 39$

$a_1^2 - 5a_1 + 5p + 50p^2 - 15 > 0$

$D = 85 - 20p - 200p^2 + 60$

$19 - 4p - 40p^2$

$16 + 19 \cdot 40 : 4$

$16(1 + 19 \cdot 10$

$-6p^2 > -24$

$p^2 < 4$

p - целое.

$p > 0$ $p = 1$

$191 | 17$

$a^2 + 50 + 15 > 5a + 10 + 15$

$a^2 - 5a + 40 > 0$

$25 - 160$

$(a+5)(a+10) > 5a + 25$

$a^2 + 15a$

$a^2 + 56 + 15 - 5a - 10 - 39 < 0$

$61 - 39 = 22$

$a^2 - 5a + 22 < 0$

$a_1^2 + 56 + 15a - 5a - 49 < 0$

$a_1^2 + 10a + 7 < 0$

$100 - 28$

$a_1^2 + 50 + 15a - 5a - 25 > 0$

$a^2 + 10a + 25$

$(a+5)^2 > 0$

$a \neq -5$

$a_1^2 + 56 + 15a < 5a + 49$

$a_1^2 + 10a + 7 < 0$

$100 - 28 = 72 = 6^2 \cdot 2$

$\frac{-10 \pm 6\sqrt{2}}{2}$ $a \in (-5 - 3\sqrt{2} ; -5 + 3\sqrt{2})$

$\sqrt{18} \cdot 74$

$a \in \{-9; -8; -6; -4; -3; -2; -1\}$

20

5

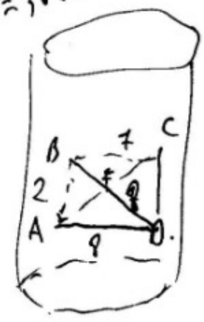
-35

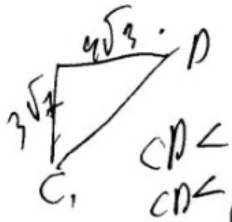
20

21102174 (U382663 M1300463)

$\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. Черновик.

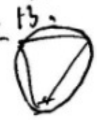
$\sqrt{63} = 3\sqrt{7}$.





$CD < 4\sqrt{3} + 3\sqrt{7}$.

$CD < 13$.

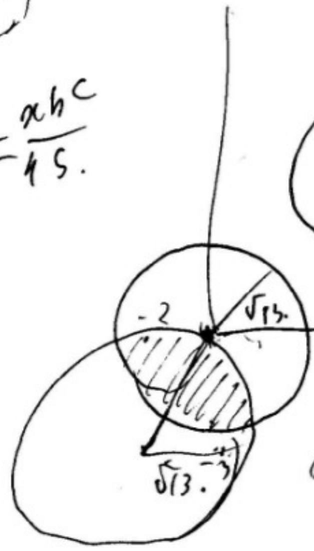


$R = \frac{abc}{4S}$.

$(x-a)^2 + (y-b)^2 \le 13$.

$a^2 + b^2 \le -4a - 6b$.

$x^2 + b^2 \le 13$.



$b^2 + 6b + a^2 + 4a \le 0$.

~~$-3b - 4a^2 - 16a$~~

$(b+3)^2 + (a+2)^2 \le +13$

$a^2 + 4a + b^2 + 6b \le 0$.

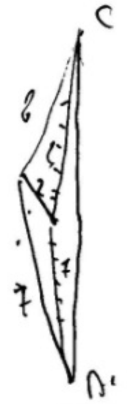
$16 - 4b^2 - 24b$

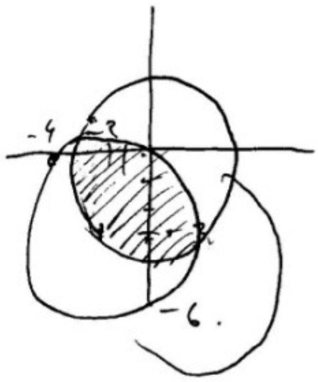
$\cancel{4}\,2b^2\,6b + 52$.

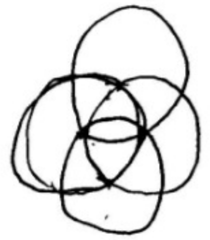
$-(2b+6)^2 + 52$.

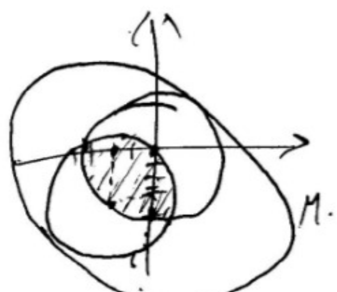
$-4b^2 - 36 - 24b + 52$.

$\frac{-16 \pm \sqrt{52-(2b+6)^2}}{2}$.









Черновик.

$5 = a \cdot 5 + p \cdot 10.$

$$\begin{cases}(a+p\cdot 5)(a+p\cdot 10) > 5a + p\,10 + 15.\\ (a+p\cdot 7)(a+p\cdot 8) < 5a + 10\cdot p + 39.\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2 + 50p + 15ap > 5a + p\cdot 10 + 15\\ a^2\end{cases}$$

$> -50 + 10 + 39.$

$0.\ \overset{6.}{\cancel{-3.-2}}$

$10.$ $\quad 6 \not>$

$50 > 25.$

$56 < 49.$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102174**

ID профиля: **382663**

Вариант 20

11. Чистовик.

№1

НОК (a, b, c): каждому из них $n = 5^{16} \cdot 2^{17}$ => все числа можно представить как $2^n \cdot 5^k$, при этом их НОД = 10 => $n \in [1;17]$; $k \in [1;16]$, ~~при этом~~, а НОК чисел типа $2^n \cdot 5^k = 2^{n_m} \cdot 5^{k_m}$, где n_m и k_m - максимальные из тройки чисел => чтобы один из $n = 17$, ~~и k = 16~~, а ~~все~~ двух др. $n \in [1;17]$, аналогично

$a = 2^{n_1} \cdot 5^{k_7}$ — чтобы один $k = 16$, а ост. двух $\in [1;16]$.

$b = 2^{n_2} \cdot 5^{k_2}$

$c = 2^{n_3} \cdot 5^{k_1}$

N - общее кол-во $= 17 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 9 =$ ~~435456~~ 665856.

Ответ: ~~435456~~ 665856 парок чисел.

21102174 (U382663 M1300464)

12.

Чистовик.

№2.

ОДЗ.

$$\begin{cases} x > 5,2 \\ x \neq 5,4. \end{cases}$$

~~Есть~~ 2 числа равны, а третье на 1 больше каждого из них, тогда представим их как a, a, и $a+1$. $\Rightarrow$ произведение 3 чисел $= a^2(a+1)$ и равно $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)\,\log_{(x-4)^2}5x-26\,\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) =$

$$= \frac{2}{2}\cdot 2\cdot \log_{2x-8}2x-8\cdot\log_{5x-26}5x-26\cdot\log_{x-4}x-4 = 2 = a^3+a^2$$

$a=1$

$$\begin{array}{r|l} a^3+a^2-2 & a-1 \\ a^3-a^2 & a^2+1 \\ \hline 2a^2-2 & \\ 2a^2-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$(a-1)(a^2+1)=0$

$a^2+1>0 \Rightarrow a=1$ - ед решение.

~~[illegible]~~ приравняем эти 3 ~~числа~~ числа 1 на ОДЗ.

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=1.$

$2x-8=x^2-8x+16.$

$x^2-10x+24=0.$

$x_1=6 \qquad x_2=4$

$\log_{(x-4)^2}5x-26=1.$

$x^2-8x+16=5x-26.$

$x^2-13x+42=0.$

$x_3=7 \qquad x_4=6.$

$\log_{\sqrt{5x-26}}2x-8=1.$

$5x-26=4x^2-32x+64.$

$4x^2-37x+90=0.$

$D=-1 \Rightarrow$ нет корней $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ третье число больше двух других на 1 $\Rightarrow \log_{\sqrt{5x-26}}2x-8=2.$

$5x-26=2x-8$

$3x=18$

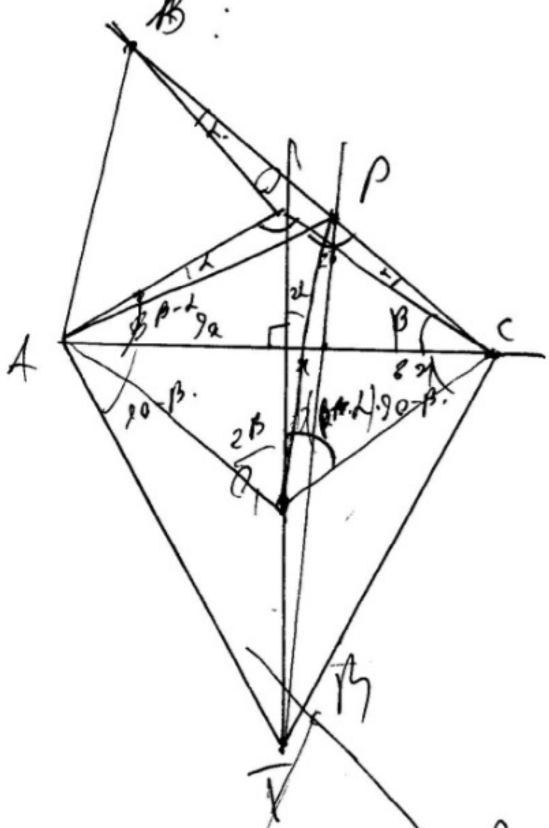
$x_5=6.$

$x=6$ - ед. решение

Ответ: $x=6$.

21102174 (U382663 M1300464)

Черновик



$2\beta + \beta - \cancel{\alpha} + \alpha + \beta = 180$

$4\beta = 180.$

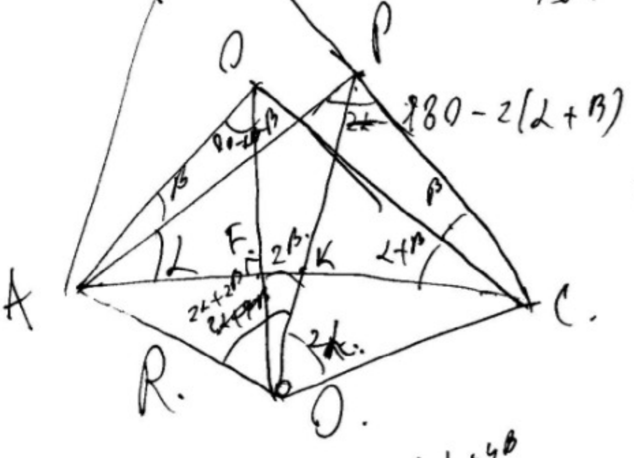
$\beta = 45.$

$2\beta + \cancel{\alpha} = \beta + \beta$

$2(180 - \alpha)$

$\cancel{360 - 2\alpha}$

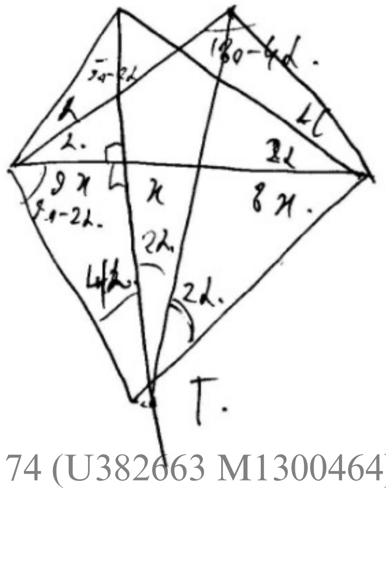
$\cancel{360 - 2\alpha =}$



$$\boxed{\frac{\sqrt{R^2 - 81x^2} - 18x}{2}}$$

$4\alpha + 4\beta$

$180 - 2\alpha + 2\beta$

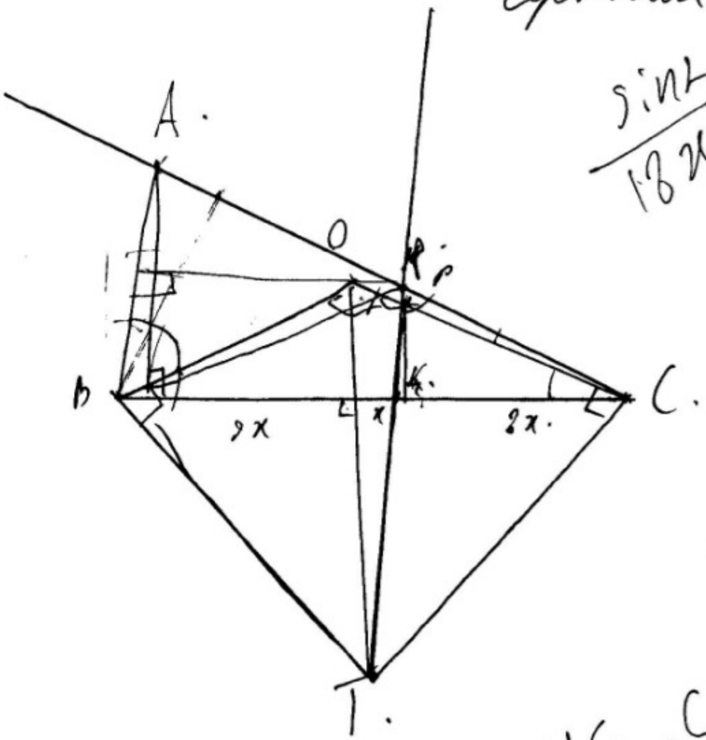


$\cancel{90 = 180}$

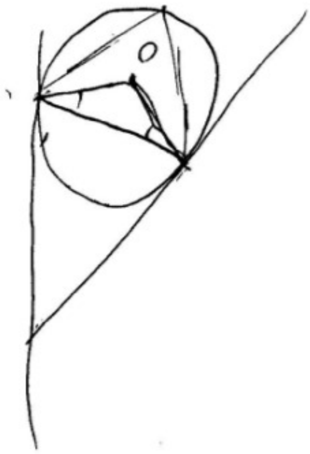
$90 - \alpha - \beta + 2\alpha + 2\beta = 90$

$\alpha = \beta.$

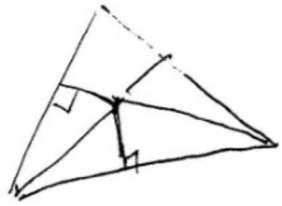
Черновик

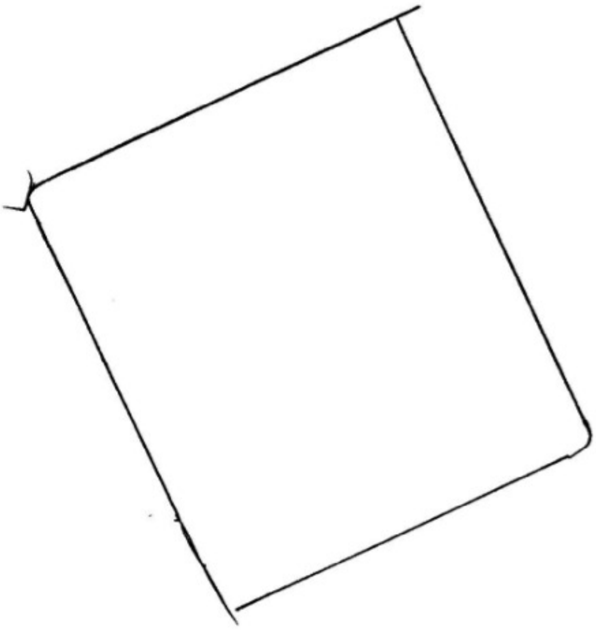


$$\frac{\sin L}{18x} =$$



$$\frac{abc}{4R} = S.$$





Черновик

$2^{17} \cdot 5^{16}$

$2^{17} \cdot 5^{16}$

$2^1 \cdot 2^{17}$

$17 \cdot 17$ $17^2 \cdot 16^2 \cdot 3^2$

$16 \cdot 16$

289
9
2601
256
15606
13005
5202
665856

17
17
119
17
289

289
9
2601
256
15606
13005
5202
4·39456

16
16
96
16
256

17
17
119
17
289
256
1734
1445
578
73984

256
9
2304
289
20736
18432
4608
665856

73984
9
665856

289
256
1734
1445
578
73984
9
665856

Черновик.

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)^2 \quad \log_{(x-4)^2}(5x-26) \quad \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)^2$.

$\cancel{a+b}^{2x} = c+1$

$x+b-c=1$.

$2x-8 \neq 1$

$$\begin{cases} x \neq \frac{9}{2} \\ x > 4. \\ x \neq 5. \\ x \neq \frac{27}{5}. \end{cases}$$

$x > \frac{26}{5} \quad 5,2.$

$x > 5,2$

$x \neq 5,4.$

$37 \cdot 37$: 259, 111, 1369

$\Sigma = \cancel{3a+1}. \quad 2 \cdot \log_{2x-8} x-4 \cdot \log_{x-4} 5x-26 \cdot \log_{5x-26} 2x-8 =$

$= 2 \qquad a^2 \cdot (a+1) = 2.$

$a^3 + a^2 - 2 = 0.$

$a=1.$

$a^3+a^2-2 \mid a-1$

$a^3 - a^2 \mid a^2+2.$

$2a^2 - 2$

$(a-1)(a^2+2) = 0. \quad a=1.$

$x - \quad > 0.$

$\frac{\log_{2x-8} x-4}{2} = 2.$

$33 \cdot 33$: 99, 99, 1089

$68 \cdot 16$: 408, 68, 1088

$(2x-8)^2 = x-4.$

$4x^2 - 32x + 64 - x + 4 = 0.$

$4x - 33x + 68 = 0.$

$33^2 - 68 \cdot 16. = 1.$

68
34
17
17·4.

$\frac{33 \pm 1}{4} = 8;\ 8,5.$

$37 \cdot 37$: 259, 111, 1369

$90 \cdot 16$: 720, 1440

$5x - 26 = 4x^2 + 64 - 32x.$

$4x^2 - 37x + 90 = 0.$

$D = 37^2 - 908 =$

$5x - 26 = 2x - 8.$

$3x = 18.$

$x = 6.$

$2x - 8 = x^2 - \cancel{10x} + 26.$

$100 - 96 = 4.$

$\frac{10 \pm 2}{2} = 6;\ 4.$

$x^2 - 8x + 16 - 5x + 26. = 0.$

$x^2 - 13x + 42 = 0.$

$169 - 168$

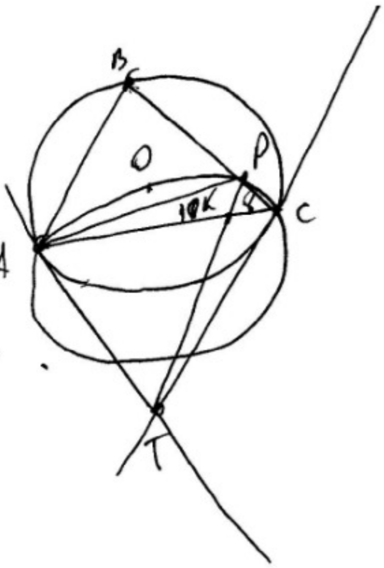
$\frac{13 \pm 1}{2} = 7;\ 6.$

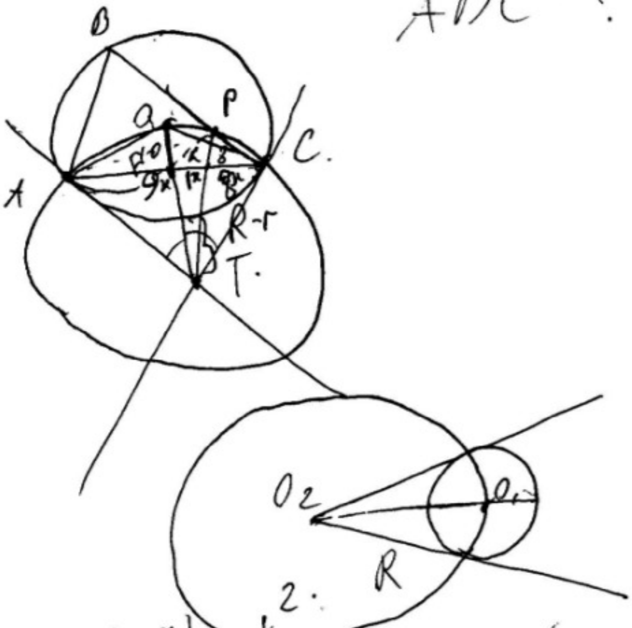
$x = 6.$

21102174 (U382663 M1300464)

черновик.

ABC = ?

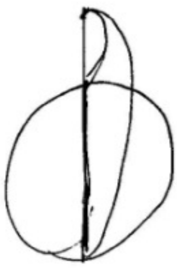




$x\cdot(2R+x) = t^2$

$t+R.$

$R^2 = (R-r)(R+r)$



$(R-r)\cdot(R+r) = R^2.$

$R^2 - r^2 = R^2.$

$t.$

$t^2 + \cancel{r^2} = (x+r)^2 = \cancel{r^2} + x^2 + 2xr$

$t^2 = \cancel{x^2 + 2xr}$

$= x(x+2r)$

черновик