Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102156**

ID профиля: **135414**

Вариант 20

Чистовик 1
Вариант 20
№1

$$S = \frac{a_1 + a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = 5a_1 + 10d$$

$d > 0$
$a_1 \in \mathbb{Z}$
$d \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+10d) > 5a_1 + 10d + 15 \\ (a_1+7d)(a_1+8d) < 5a_1 + 10d + 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15 \\ a_1^2 + 15a_1d + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39 \end{cases}$$

$$5a_1 + 10d + 15 < a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 < 5a_1 + 10d + 39 - 6d^2$$

$15 < 39 - \cancel{6d}\, 6d^2$

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4$

$|d| < 2$

$0 < d < 2,\ d \in \mathbb{Z}$ — по усл.

$d = 1$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 + 50 > 5a_1 + 10 + 15 \\ a_1^2 + 15a_1 + 56 - 5a_1 + 10 + 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+5)^2 > 0 \\ -5 - 3\sqrt{2} < a_1 < -5 + 3\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \neq -5 \\ a_1 \in \mathbb{Z} \\ -9 \leq a_1 \leq -1 \end{cases}$$

Ответ: $a_1 \in \{-1; -2; -3; -4; -6; -7; -8; -9\}$

№2

Дано:

ABCD – тетраэдр впис. в цилиндр

$r_ц$. – пост.

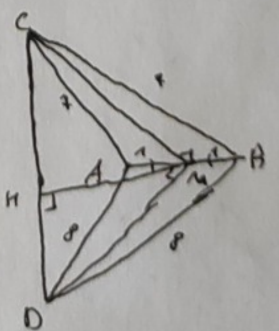
$CD \parallel O_1O_2$

$AC = CB = 7$

$AD = DB = 8$

$AB = 2$

Найти: CD



21102156 (U135414 M1299675)

Чистовик 2

Вариант 20

Решение №2

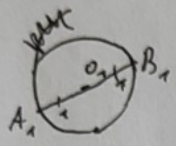
1) Построим медианы CM и DM на AB

Т.к. $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ – равнобедр., то $\left.\begin{matrix} AB \perp CM \\ AB \perp DM \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (CDM)$ – по признаку

2) $\left.\begin{matrix} AB \perp (CDM) \\ CD \perp \alpha, \text{ где } \alpha \text{ – пл-ть осн. цилиндра} \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \parallel CD \Rightarrow AB \perp \alpha$

3) Рассмотрим A_1B_1 – проекцию AB на α

Т.к. $AB \parallel \alpha$, то $A_1B_1 = AB = 2$, A_1B_1 – хорда основания



Т.к. радиус цилиндра – наим., то A_1B_1 – диаметр основания $\Rightarrow r_ц = \dfrac{AB}{2} = 1$

M лежит на оси цилиндра

4) Построим $MH \perp CD$

$MH \parallel \alpha$, $MH = r_ц = 1$

5) $CM = \sqrt{49-1} = \sqrt{48}$

$DM = \sqrt{64-1} = \sqrt{63}$

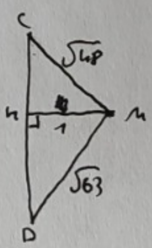
6) $\triangle CMD$:

$CM = \sqrt{48}$

$MH \perp CD$

$MH = 1$

$DM = \sqrt{63}$



$CH = \sqrt{48-1} = \sqrt{47}$

$DH = \sqrt{63-1} = \sqrt{62}$

$CD = CH + DH = \sqrt{47} + \sqrt{62}$

Ответ: $CD = \sqrt{47} + \sqrt{62}$

№3

$(x-a)^2 + (y-b)^2 \le 13$ – круг с центром $(a; b)$ радиуса $R = \sqrt{13}$

$a^2 + b^2 \le \min(-4a - 6b, 13)$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \le -4a - 6b \\ a^2 + b^2 \le 13 \end{cases}$$

21102156 (U135414 M1299675)

Чистовик 3

Вариант 20

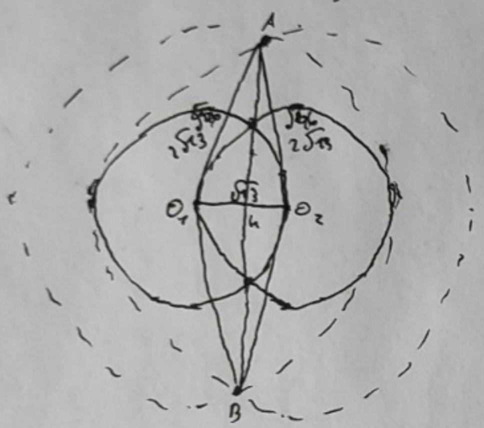
№3 (продолжение)

$$\begin{cases} a^2+b^2+4a+4+6b+9 \le 13 \\ a^2+b^2 \le 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+2)^2+(b+3)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le 13 \end{cases}$$
– пересечение 2-х кругов с центрами $(-2;-3)$ и $(0;0)$ и радиусами по $R=\sqrt{13}$

$d=\sqrt{(0+2)^2+(0+3)^2}=\sqrt{13}$ – расстояние между центрами

Исходная система задаёт множество кругов радиуса $R=\sqrt{13}$ с центрами, лежащими на пересечении 2-х кругов радиуса $\sqrt{13}$ с расстоянием между центрами $d=\sqrt{13}$



Пусть $\angle AO_1H=\alpha$

$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{13}}{2\cdot 2\sqrt{13}}=\dfrac{1}{4}$

$\cos\angle AO_1B=\cos 2\alpha=2\cdot\frac{1}{16}-1=-\frac{7}{8}$

$S_м=2\cdot\pi\cdot(2\sqrt{13})^2\cdot\dfrac{\arccos(-\frac{7}{8})}{2\pi}-S_{AO_1O_2B}$

$S_{AO_1O_2B}=O_1O_2\cdot AB$

$AB=2\cdot\sqrt{4\cdot 13-\frac{13}{2}}=2\cdot\sqrt{\frac{7\cdot 13}{2}}$

$S_{AO_1O_2B}=13\sqrt{14}$

Искомая фигура – пересечение кругов с центрами O_1, O_2, т.к. $O_1O_2=\sqrt{13}$, радиусами $2\sqrt{13}$ каждый

$S_м=4\cdot 13\arccos(-\frac{7}{8})-13\sqrt{14}=$

$=13\,(4\arccos(-\frac{7}{8})-\sqrt{14})$

Ответ: $S_м=13\,(4\arccos(-\frac{7}{8})-\sqrt{14})$

21102156 (U135414 M1299675)

Черновик

$$\begin{cases}(a_1+5d)(a_1+10d) > \frac{a_1+(a_1+4d)}{2}\cdot 5+15\\(a_1+7d)(a_1+8d) < \frac{a_1+(a_1+4d)}{2}+39\end{cases}$$

$a_1 + a_1+d + a_1+2d + a_1+3d + a_1+4d = 5a_1 + 10d$

$$\begin{cases}a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15\\a_1^2 + 15a_1d + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39\end{cases}$$

$5a_1 + 10d + 15 < a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 < 5a_1 + 10d + 35 - 6d^2$

$15 < 39 - 6d^2$

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4$

$-2 < d < 2$

$a - \frac{4}{1}$

$d = 1$

$$\begin{cases}a_1^2 + 15a_1 + 50 > 5a_1 + 10 + 15\\a_1^2 + 15a_1 + 56 < 5a_1 + 10 + 39\end{cases}$$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

$\frac{D}{4}$ $(a_1 + 5)^2 > 0$

$a_1 \neq -5$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

$\frac{D}{4} = 25 - 7 = 18$

$$\left[\begin{array}{l}a_1 = -5 + 3\sqrt{2}\\a_1 = -5 - 3\sqrt{2}\end{array}\right.$$

$-5-3\sqrt{2} < a_1 < -5+3\sqrt{2}$

$\frac{4{,}24}{3}$

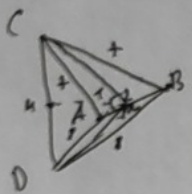
$4{,}2$

$-9,\ -8,\ -7,\ -6,\ -5,$

$-4,\ -3,\ -2,\ -1$

~~Кл...~~

Черновик



$CM = \sqrt{49-1} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

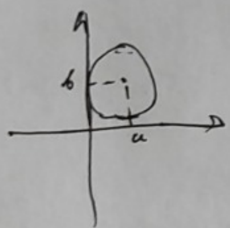
$DM = \sqrt{64-1} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$

$CK = \sqrt{48-1} = \sqrt{47}$

$DK = \sqrt{62}$

$CD = \sqrt{47} + \sqrt{62}$

$a^2 + b^2 \le -4a - 6b$



$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 13 \\ a^2 + b^2 \le 13 \\ a^2 + b^2 \le -4a - 6b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \le 13 \\ a^2 + b^2 \le -4a - 6b \end{cases}$$

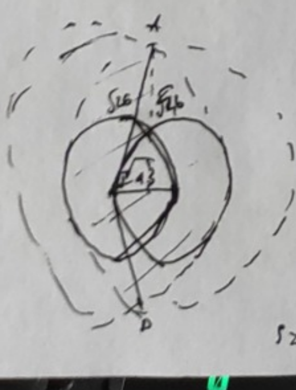
$$\begin{cases} a^2 + b^2 \le 13 \\ a^2 + 4a + 4 + b^2 + 6b + 9 \le 13 \end{cases}$$

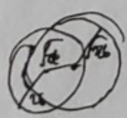
$$\begin{cases} a^2 + b^2 \le 13 \\ (a+2)^2 + (b+3)^2 \le 13 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} a^2 + b^2 = 13 \\ a^2 + 4a + 4 + b^2 + 6b + 9 = 13 \end{cases}$$

$4a + 4 + 6b + 9 = 0$

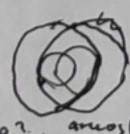
$a = \dfrac{-6b - 13}{4}$





$d = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{13}}{2\sqrt{26}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$



$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \dfrac{2}{8} - 1 = -\dfrac{3}{4}$

$S = 2 \cdot \pi R^2 \cdot \dfrac{\arccos(-\frac{3}{4})}{2\pi}$ $AD = 2 \cdot \sqrt{26 + \frac{13}{4}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 13}{2}} \cdot 2$

$4 - 13$ $\sqrt{10}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102156**

ID профиля: **135414**

Вариант 20

Чистовик 1

Вариант 20

№4

Очевидно, что a, b и c можно представить в виде

$a = 2^{n_a} \cdot 5^{m_a}$

$b = 2^{n_b} \cdot 5^{m_b}$

$c = 2^{n_c} \cdot 5^{m_c}$, где $n_a, n_b, n_c \in \mathbb{Z}$
$\in [\cancel{0}\,1; 17]$

$m_a, m_b, m_c \in \mathbb{Z}$
$\in [\cancel{0}\,1; 16]$

причём хотя бы одно из n_a, n_b, n_c равно 1 и хотя бы одно равно 17,
хотя бы одно из m_a, m_b, m_c равно 1 и хотя бы одно равно 16

Необходимо расставить числа 1, 17, n по 3 местам: n_a, n_b, n_c

$P_3 = 3! = 6$

Для каждого из 15 $n \in (1; 17)$ существует 6 вариантов

Если $\left[\begin{array}{l} n = 1 \\ n = 17 \end{array}\right.$, то вариантов по 3

$N = 6 \cdot 15 + 3 + 3 = 6 \cdot 16$

Аналогично для распределения по m_a, m_b и m_c

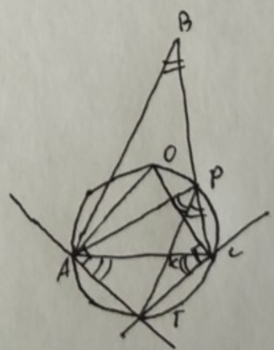
$M = 6 \cdot 14 + 3 + 3 = 6 \cdot 15$

Всего троек $S = M \cdot N = 36 \cdot 15 \cdot 16$

Ответ: $36 \cdot 15 \cdot 16 = 8640$

№6

Дано:



$\omega(O; R)$ – опис. вокруг $\triangle ABC$

$\omega_1(O_1; r)$

$A \in \omega_1$, $C \in \omega_1$, $O \in \omega_1$

$\omega_1 \cap BC = P$

AT и CT – кас. к ω в т. A и C соотв-но

$AT \cap CT = T$

$TP \cap AC = K$

$S_{APK} = 10$

$S_{CPK} = 8$

Найти: а) S_{ABC}

б) AC, если $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$

Итоговое 2

Вариант 20

№6 (продолжение)

1) $AOCT$:

$\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$ - рад. в т. кас. с ω

$A, O, C \in \omega_1$

$\Rightarrow \angle A + \angle C = 180^\circ \Rightarrow AOCT$ - впис. $\Rightarrow T \in \omega_1$

2) ω:

$\angle CAT = \angle ACT = \dfrac{\smile AC}{2}$ - угол между кас. и хордой $\Rightarrow \triangle ACT$ - равнобедр.

$\angle ABC = \dfrac{\smile AC}{2}$ - впис. угол в ω

$\angle AOC = \smile AC$ - центр. угол

$\smile AT = \smile CT$ (ω_1) $\Rightarrow$ впис. в ω_1

$\Rightarrow \angle APT = \angle CPT = \angle ACT = \dfrac{\smile AT}{2} = \angle CAT = \angle ABC$

3) $\angle CPT = \angle CBA$ -

ACB - секущ.

$\Rightarrow PT \parallel AB$

4) $S_{APC} = 10+8 = 18$

$S_{CPK} = 8$

$\Rightarrow \dfrac{AC}{KC} = \dfrac{S_{APC}}{S_{CPK}} = \dfrac{9}{4}$, т.к. $\triangle$ имеют одн. высоту

5) $\triangle ABC$ и $\triangle CPK$:

$\angle C$ - общий

$\angle B = \angle P$ - п. 2

$\dfrac{AC}{KC} = \dfrac{9}{4}$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle CPK$, $k = \dfrac{9}{4}$

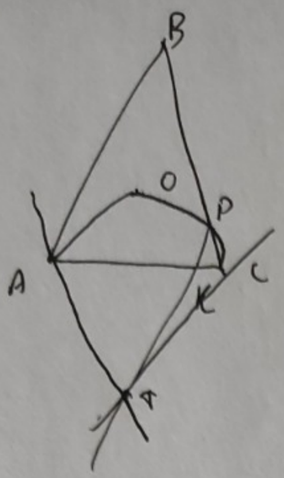
$\dfrac{S_{ABC}}{S_{CPK}} = \dfrac{81}{16}$

$S_{ABC} = \dfrac{81}{16} \cdot 8 = \dfrac{81}{2} = 40,5$

Ответ: а) 40,5

21102156 (U135414 M1299676)

Черновик



№4

$a = 2^{n_a} \cdot 5^{m_a}$

$b = 2^{n_b} \cdot 5^{m_b}$

$c = 2^{n_c} \cdot 5^{m_c}$

$n \in [0; 17]$

$m \in [0; 15]$

1) ~~$n_a =$~~

1	17	4
1	4	17
17	1	4
17	4	1
4	1	17
4	17	1

$\log_b a = c$

$b^c = a$

$\cdot 16 \quad +$

1 17 1 17

17 1 17

17 17 1

11 17

1 17 1

17 1 1

$(6 \cdot 16 + 6)(6 \cdot 15 + 6) =$ ~~6 · 32~~

$= 36 \cdot 17 \cdot 16$

№5

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$, $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$, $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$2\log_{2x-8}(x-4)$, $\frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)$, $2\log_{5x-26}(2x-8)$

$\log_{2x-8}(x-4) = \log_{5x-26}(2x-8)$

$\begin{cases}(2x-8)^4 = x-4 \\ (5x-26)^4 = 2x-8\end{cases}$ $\left(\frac{5x-26}{2x-8}\right)^4 = 2$

] $x=6$

$2\log_4 2 = 1$

$\frac{1}{2}\log_2 4 = 1$

$2\log_4 4 = 2$

$(2x-8)^{\log_{5x-26}(2x-8)} = x-4$

$(5x-26)^{\log_{2x-8}(x-4)} = 2x-8$

$2\log_{...}(x-4) = \frac{1}{2}\log_{x-4} 5x-26$

Черновик

$\log_{2x-8}(x-4) = \log_{5x-26}(2x-8)$

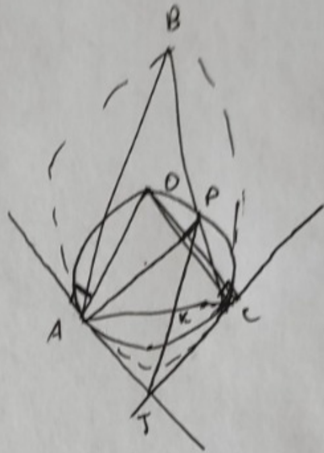
$\frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26) = 2\log_{5x-26}(2x-8)$

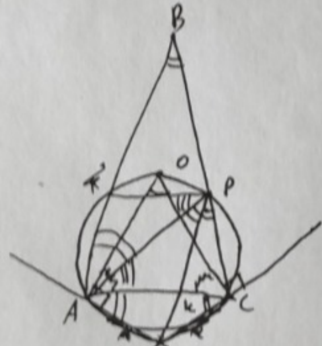
$x > 5,2$

$x \neq 5,4$

$\begin{array}{r} 15 \\ \times 16 \\ \hline 90 \\ 15 \\ \hline 240 \end{array}$

$\begin{array}{r} 36 \\ \times 240 \\ \hline 144 \\ 72 \\ \hline 8640 \end{array}$





$T \in \omega_1$

$\triangle ATC$ – равнобедр.

$\angle APT = \angle PATC$

$\angle APC$ – впис.

$PT \parallel AB$

$KP = \frac{10}{4}$

$KC = \frac{8}{4}$

$\triangle BKP \sim \triangle PKC$

$\cancel{S_{BKP} = \frac{100}{64}} \quad S_{CPK} = \frac{100}{\frac{8}{2}} = 12,5$

$\cancel{S_{ABC} = 28 + 12,5 = 40,5}$

$\frac{40,5}{8} = \frac{81}{16} = \frac{18^2}{8^2}$

$AC = \frac{18}{4}$

$KC = \frac{8}{4}$

$\triangle ABC \sim \triangle CPK$

$k = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$

$S_{ABC} = \frac{81}{16} \cdot 8 = \frac{81}{2} = 40,5$

21102156 (U135414 M1299676)