Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101931**

ID профиля: **171277**

Вариант 20

Задача 1

$$\begin{cases} a_6 a_{11} > S+15 \\ a_8 a_9 < S+39 \end{cases}$$

$a_i = b + id$, где $d, b \in \mathbb{Z}$ и $d>0$, т.к. возрастающая

① Сложим накрест:

$S+39+a_6a_{11} > S+15+a_8a_9$

$39+(b+6d)(b+11d) > 15+(b+8d)(b+9d)$

$39+66d^2 > 15+72d^2$

$24 > 6d^2$

$4 > d^2$, т.к. $d>0$ эквивалентно $2>d \Rightarrow d=1$ - единственное возможное значение

② $S = a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 = 5b+15$

③ $a_6a_{11} > S+15$

$(b+6)(b+11) > 5b+15+15$

$b^2+17b+66 > 5b+15+15$

$b^2+12b+36 > 0$

$(b+6)^2 > 0$

$\Downarrow$

b - любое, кроме $b=-6$

④ $a_8a_9 < S+39$

$(b+8)(b+9) < 5b+15+39$

$b^2+17b+72 < 5b+15+39$

$b^2+12b+18 < 0$

Т.к. коэф при b^2 $1>0$, то между корнями:

$\frac{-12-\sqrt{72}}{2} < b < \frac{-12+\sqrt{72}}{2}$

$4=\sqrt{16} < \sqrt{18} < \sqrt{25} = 5$

$-11 < -6-\sqrt{18} < b < -6+\sqrt{18} < -1$

$\Downarrow$

$b \in [-10; -2]$ (отрезок целых точек)

---

⑤ Объединяя ③ и ④:

$b \in [-10; -7] \cup [-5; -2]$

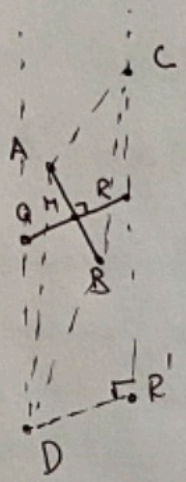
$a_1 = b+1 \Rightarrow a_1 \in [-9; -6] \cup [-4; -1]$

$\Downarrow$

Ответ: $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

21101931 (U171277 M1304784)

(5.3)

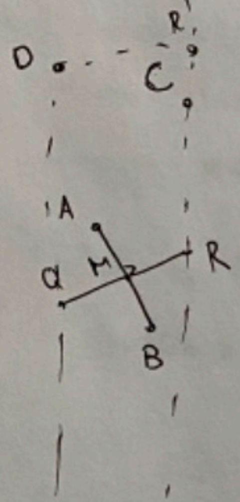


Через D можно провести прямую параллельную QR, тогда по теореме Пифагора:

$$DC^2 = DR'^2 + (H_c + H_D)^2 = 4+47+62+2\sqrt{2914} = 113 + 2\sqrt{2914}$$

$$CD = \sqrt{113 + 2\sqrt{2914}}$$

(5.4)



Аналогично (5.3):

$$DC^2 = DR'^2 + (H_D - H_c)^2 = 113 - 2\sqrt{2914}$$

$$CD = \sqrt{113 - 2\sqrt{2914}}$$

(6) Таким образом, мы разобрали все случаи, и доказали, что других нет.

Ответ: $CD \in \{\sqrt{62} - \sqrt{47}; \sqrt{62} + \sqrt{47}; \sqrt{113+2\sqrt{2914}}; \sqrt{113-2\sqrt{2914}}\}$

Задача 3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13 & \text{I}\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b;13) & \text{II}\end{cases}$$

(1) Выражение (I) несёт в себе некий геометрический смысл, оно симметрично относительно пар $(a;b)$ и $(x;y)$ и проверяет удалены ли эти две точки на расстояние большее $\sqrt{13}$. Тогда если $(x;y)$ подходит, то внутри круга радиуса $\sqrt{13}$ с центром в этой точке есть точка $(a;b)$, удовлетворяющая (II). Тогда, чтобы найти все точки $(x;y)$, найдём все точки $(a;b)$ удовлетворяющие (II) и каждую очертим кругом радиуса $\sqrt{13}$.

(2.1) $a^2+b^2\le -4a-6b\le 13$

$a^2+b^2+4a+6b\le 0\le 13+4a+6b$

(2.1.1)

$(a+2)^2+(b+3)^2-13\le 0$

$(a+2)^2+(b+3)^2\le 13$

Круг с центром в $(-2;-3)$ и радиусом $\sqrt{13}$ (ω_2)

(2.1.2)

$b\ge -\frac{13}{6}-\frac{2}{3}a$

Множество точек над прямой $-\frac{13}{6}-\frac{2}{3}a$ (ℓ)

(2.2) $a^2+b^2\le 13\le -4a-6b$

$a^2+b^2-13\le 0\le -4a-6b-13$

(2.2.1)

$a^2+b^2\le 13$

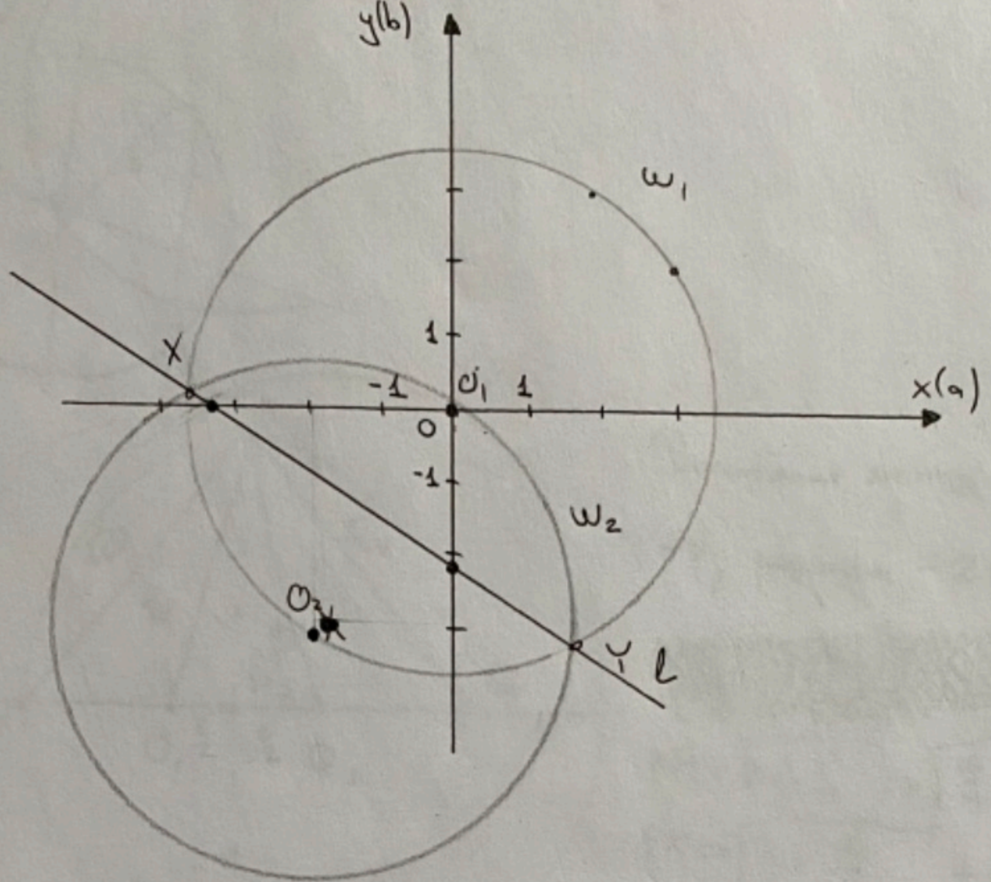
Круг с центром в $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{13}$ (ω_1)

$0\le -4a-6b-13$

$b\le -\frac{13}{6}-\frac{2}{3}a$

Множество точек под прямой $-\frac{13}{6}-\frac{2}{3}a$ (ℓ)

③ Отберём точки $(a;b)$ с помощью графика:



④ Рассмотрим прямую l', соединяющую центры окружностей:

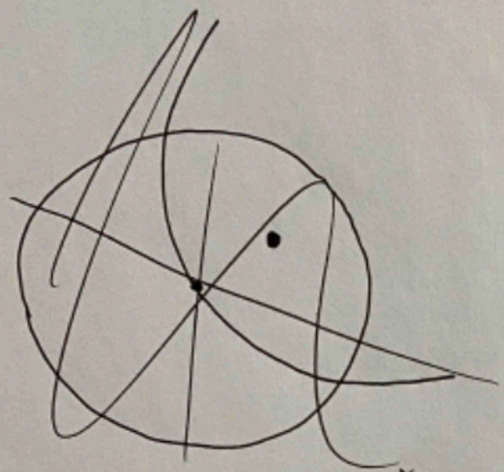
$y = \frac{3}{2}x$ Коэф. угл. наклона $-\left(\frac{3}{2}\right)$, у l $-\left(-\frac{2}{3}\right)$, т.е. $l' \perp l$.

Середина отрезка O_1O_2 обозначим M $M=(-1; -1{,}5)$. Подставим в l,

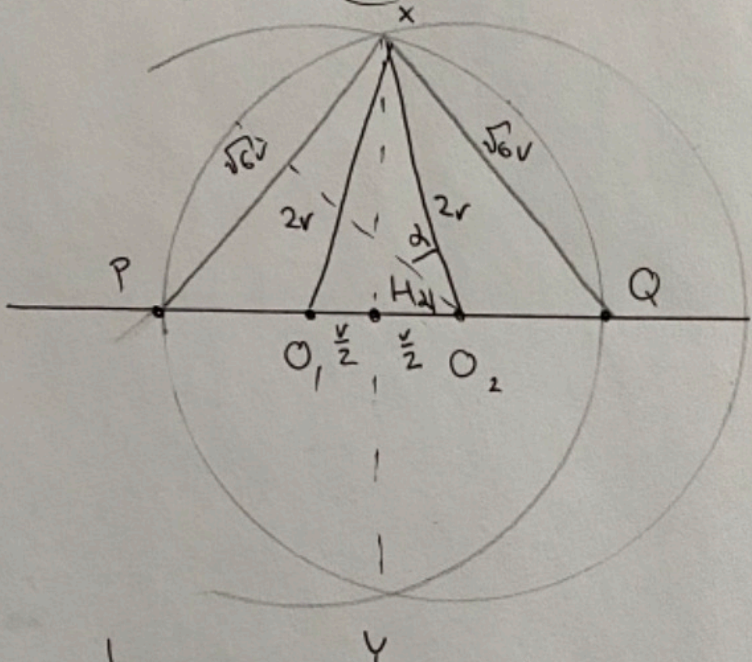
$a=-1$

$b = -\frac{13}{6} + \frac{2}{3} = -\frac{13}{6} + \frac{4}{6} = -1{,}5$, т.е. середина принадлежит l, т.е. l - радикальная ось ω_1 и ω_2 (общая хорда). Нам подходит ω_2 над l и ω_1 под l, т.е. пересечение ω_1 и ω_2. Точки пересечения - X, Y. Чтобы получить множество точек $(x;y)$ нам достаточно увеличить радиусы окружностей в два раза и найти пересечение.

5



5



Расстояние между центрами — r, радиусы — $2r$, $r=\sqrt{13}$

$XH=\sqrt{4r^2-\frac{r^2}{4}}=r\sqrt{\frac{15}{4}}=\sqrt{XO_1^2-HO_1^2}$

$PX=r\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{15}{4}}=\sqrt{6}r=\sqrt{XH^2+PH^2}$

$\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}r}{2\cdot 2r}=\frac{\sqrt{6}}{4}=\sqrt{\frac{6}{16}}=\sqrt{\frac{3}{8}}$

$\alpha=\arcsin\sqrt{\frac{3}{8}}$

(четыре части окружности) (площадь XO_1O_2 и сим.)

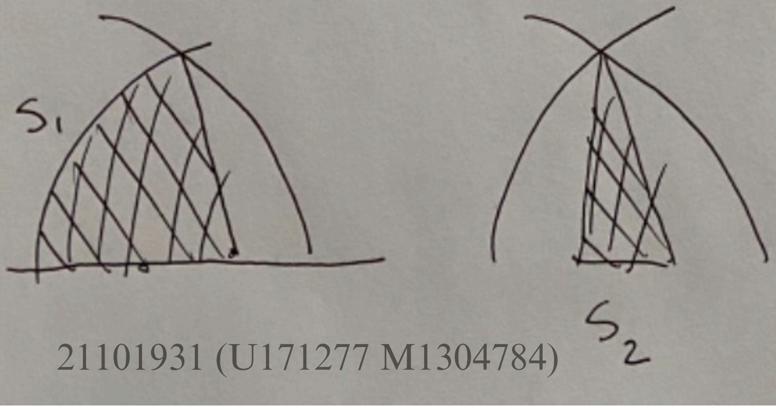
$$S=4\cdot\left(4\pi r^2\cdot\frac{2\alpha}{2\pi}\right)-\frac{2\cdot r\cdot\sqrt{\frac{15}{4}}\cdot r}{2}=16\pi r^2\cdot\frac{\alpha}{\pi}-r^2\sqrt{\frac{15}{4}}=$$

$$=13\left(16\pi\cdot\frac{\arcsin\sqrt{\frac{3}{8}}}{\pi}-\sqrt{\frac{15}{4}}\right)=13\left(16\arcsin\sqrt{\frac{3}{8}}-\sqrt{\frac{15}{4}}\right)=208\arcsin\sqrt{\frac{3}{8}}-\sqrt{\frac{15}{4}}$$

!!

Ответ: $208\arcsin\sqrt{\frac{3}{8}}-\sqrt{\frac{15}{4}}$

P.S: $S=4S_1-2S_2$



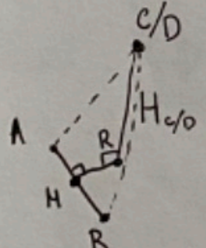
Задача 2

① $\triangle ADB$ и $\triangle ACB$ – р/б, высоты из точек D и C падают в одну и ту же точку – середину AB. Высоты – проекция DC в силу симметрии, т.к. они "сливаются" в одной точке, то AB лежит в плоскости, перпендикулярной CD. В нашем конкретном случае – на горизонтальном сечении цилиндра, т.е. на окружности

② Отрезок AB лежит на окружности (хорда). Чтобы он там поместился, нужно чтобы $2r \geq AB = 2 \Rightarrow r \geq 1$. Т.е. минимум – $r = 1$. Он, очевидно, достигается, AB – диаметр.

③ Длина CD зависит только от взаимного расположения точек C и D относительно плоскости, проходящей через AB и ось цилиндра – и плоскости, проходящей через AB перпендикулярно оси. Получим четыре симметричные четверти пространства. Зафиксируем в одной из них точку C (в каждой четверти единственное возможное положение для C и D, которое получается вращением отн. AB до касания поверхности цилиндра) и будем рассматривать длину CD относительно расположения D.

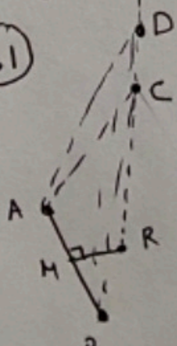
④ Найдём длины высот H_C и H_D. Они, очевидно, не зависят от расположения C и D в силу симметрии.



($H \in AB$, $AM = MB$)
($MR = r$)

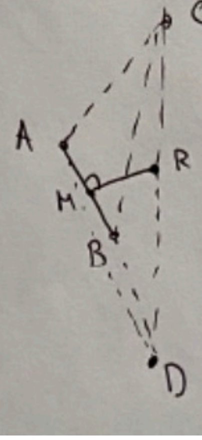
- $AM^2 + MR^2 + H_C^2 = AC^2$ $\quad 2 + H_C^2 = 49 \Rightarrow H_C = \sqrt{47}$
- $AM^2 + MR^2 + H_D^2 = AD^2$ $\quad 2 + H_D^2 = 64 \Rightarrow H_D = \sqrt{62}$

5.1



$CD = H_D - H_C = \sqrt{62} - \sqrt{47}$

5.2



$CD = H_C + H_D = \sqrt{47} + \sqrt{62}$

21101931 (U171277 M1304784)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101931**

ID профиля: **171277**

Вариант 20

Чистовик
Лист 1 из 4

Задача 1

① Т.к. НОД = 10 = 2·5, каждое число содержит в разложении 2 и 5, хотя бы в первой степени. Т.к. НОК = $2^{17}\cdot 5^{16}$, то других простых множителей в числах нет и каждое из них имеет вид $2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}$.

② Пусть $a=2^{\alpha_1}5^{\beta_1}$; $b=2^{\alpha_2}5^{\beta_2}$; $c=2^{\alpha_3}5^{\beta_3}$. Рассмотрим набор $\{\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3\}$. Если все они 2 или больше, то степень 2 в НОДе была 2 или больше, значит хотя бы одно из них равно единице. Если бы одно из них было больше 17, то степень 2 в НОКе была бы также больше 17. Если бы они все были меньше 17, то степень 2 в НОКе была бы меньше 17. Значит, хотя бы одно из них равно 17. Таким образом получаем, что среди $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ есть 1; 17; и третье равно любому из $[1; 17]$

③ Аналогично среди $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 1; 16 и $[1; 16]$.

④ Рассмотрим все возможные перестановки α. У наборов $(1,1,17)$ и $(1,17,17)$ 3 перестановки, у остальных 15 по 6.

$$N_\alpha = 2\cdot 3+15\cdot 6=16\cdot 6=96$$

⑤ Аналогично перестановки β - два по 3 и 14 по 6.

$$N_\beta = 2\cdot 3+14\cdot 6=15\cdot 6=90$$

⑥ Если в двух числах не равны попарно α и β соответственно, значит, они не равны. Значит, выборы α и β — независимы. Значит, суммарное:

$$N=N_\alpha\cdot N_\beta=90\cdot 96=8640$$

⇓

Ответ: 8640

Разные наборы α дают разные значения $(a;b;c)$ в силу единственности простого разложения.

(чтобы два набора $(a;b;c)$ были равны, нужно чтобы в них совпадали наборы как минимум $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, но они все различны, поэтому не совпадут и $(a;b;c)$).

21101931 (U171277 M1304785)

Задача 2

1) $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 2\log_{2x-8}(x-4) = \dfrac{2\ln(x-4)}{\ln(2x-8)}$ I

$\log_{(x-4)^2}(5x-26) = \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26) = \dfrac{\ln(5x-26)}{2\ln(x-4)}$ II

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = 2\log_{5x-26}(2x-8) = \dfrac{2\ln(2x-8)}{\ln(5x-26)}$ III

2) Произведение логарифмов равно 2

3) Пусть равные равны a. Тогда:

$a^2(a+1)=2$

$a^3+a-2=0$

$(a-1)(a^2+a+2)=0$

$\Downarrow$ $\qquad\Downarrow$

$(a-1)=0 \Leftarrow D=1-8<0$, корней нет

$\Downarrow$

$a=1$

ОДЗ:

$x-4>0 \Rightarrow x>4$

$5x-26>0 \Rightarrow x>5\frac{1}{5} \Rightarrow x>5\frac{1}{5}$

$2x-8>0 \Rightarrow x>4$

$x-4\neq 1 \Rightarrow x\neq 5$

$5x-26\neq 1 \Rightarrow x\neq 5\frac{2}{5}$

$2x-8\neq 1 \Rightarrow x\neq 4{,}5$

4.1) I = II = 1 ; III = 2

I $2\log_{(2x-8)}(x-4)=1$

$(x-4)=(2x-8)^{\frac{1}{2}}$

$(x-4)^2=2(x-4)$

$(x-4)(x-6)=0$

$x=4;\ x=6$

II $5x-26=(x-4)^2=$

$=x^2-8x+16$

$x^2-13x+42=0$

$(x-7)(x-6)=0$

$\Downarrow$

$x=7;\ x=6$

III $2x-8=5x-26$

$3x=18$

$x=6$

$\Downarrow$

$x=6$, подходит в ОДЗ

4.2 $\text{I} = \text{III} = 1$; $\text{II} = 2$

I $x=4$; $x=6$
(из 4.1)

II $|5x-26| = (x-4)^4$
Проверим, подходит ли
$x=4$ или $x=6$:
$x=4$:
$0 \neq -6$ ↯
$x=6$:
$2^4 = 4$ ↯
Т.к. не подходит, пересечения
нет, случай невозможен

4.3 $\text{II} = \text{III} = 1$; $\text{I} = 2$

I $(x-4) = 2(x-4)$
$\Leftrightarrow x=4$

II из 4.1
$x=6$; $x=7$

⇓

Уже пустое пересечение

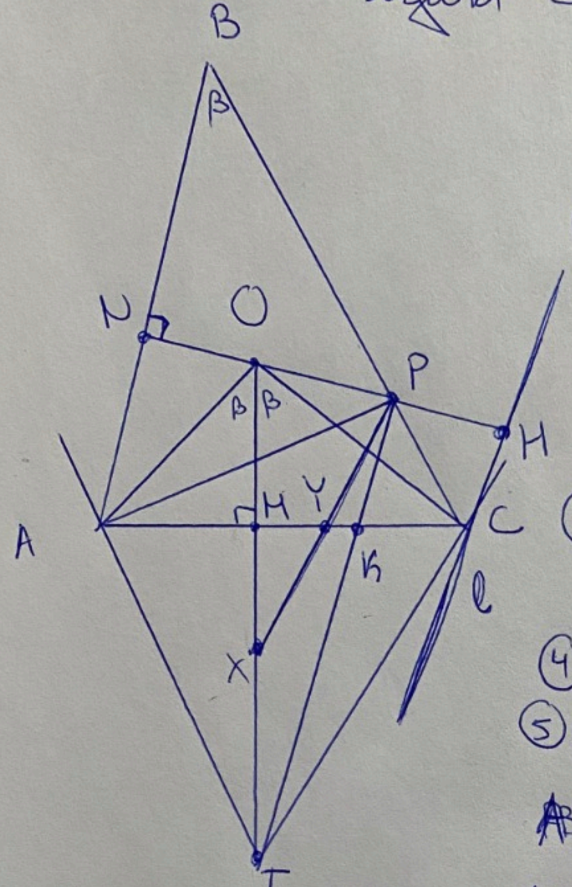
---

5 Таким образом, мы перебрали все возможные варианты и получили один корень, удовлетворяющий ОДЗ.
⇓

Ответ: при $x=6$

Чистовик
Лист 4 из 4

Задача 3



① $\angle ABC = \beta$
⇓
$\angle AOC = 2\beta$, как центральный для ω_{ABC}

② O лежит на сер. перп. к AC и T лежит на сер. пер. к AC
⇓
OT – сер. пер. AC
$OT \cap AC = M$; $AM = MC$.

③ AOPC – вписанный.
⇓
$\angle APC = \angle AOC = 2\beta$

④ $N \in AB$; $AN = BN$

⑤ $\angle BAP = \angle APC - \angle ABP = \beta = \angle ABP$
⇓
ABP – р/б; P – на сер. перп к AB, но O – тоже
N, O, P ⇓ – на одной прямой $\perp$ AB

⑥ $\frac{KC}{KA} = \frac{S_{PKC}}{S_{PKA}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

Обозначим $KA = 8x \Rightarrow KC = 10x$
Т.к. M – середина $AM = 9x = MC \Rightarrow MK = x$

⑦ $X \in OT$, OX – диаметр
$PX \cap AC = Y$; PY – бисс., т.к. $\angle APX = \angle XOA = \angle XOC = \angle XPC$
⇓
$\frac{AY}{YC} = \frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PC}$ и $PX \parallel AB$, т.к. углы β к BA

⑧ Через C проведём $l \parallel AB$
$NP \cap l = H$
$S_{ABC} = \frac{NH \cdot AB}{2}$
$NH = NP \cdot \left(\frac{AC}{AY}\right) = NB\left(1 + \frac{YC}{AY}\right) = NB\left(1 + \frac{PC}{PB}\right)$

⑨ $S_{ABC} = S_{APC} \cdot \left(1 + \frac{PC}{PB}\right) = S_{APC} \cdot \left(1 + \frac{PC}{PA}\right) = S_{APC} \cdot \left(1 + \frac{YC}{YA}\right) = (S_{APK} + S_{CPK})\left(1 + \frac{8}{9}\right) =$
$= 18 \cdot \left(1 + \frac{8}{9}\right) = \frac{17}{9} \cdot 18 = 34$

б) $AC = 18$