Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101916**

ID профиля: **336101**

Вариант 20

$d^2<4$

$d<2$

$\Downarrow$

$d=1$

$\frac{2a+4}{2}\cdot 5 = (a+2)5 + 10$

$(a+5)(a+10) > (a+2)5+15$

$a^2+15a+50 > 5a+10+15$

$a^2+10a+25>0$

$(a+5)^2>0 \Rightarrow a=-5$

Ans: ~~$a\in[-9;$~~ $a=\{-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1\}$

№2

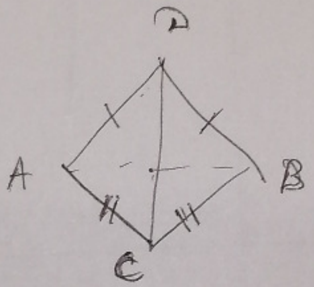
$AB=2$

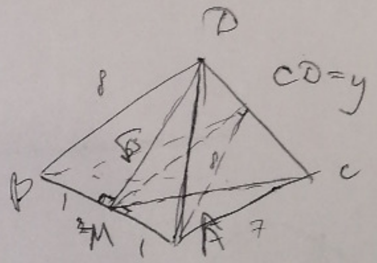
$AC=CB=7$

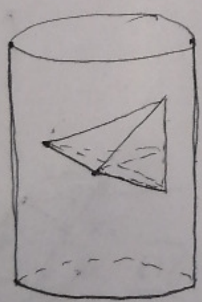
$AD=DB=8$

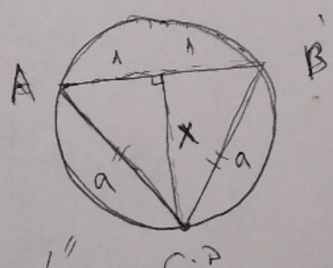
$CD=y$

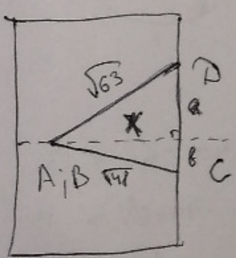
Find: $r_{min}=?$



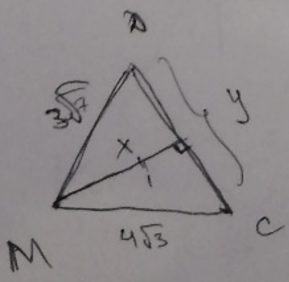








$X=1$



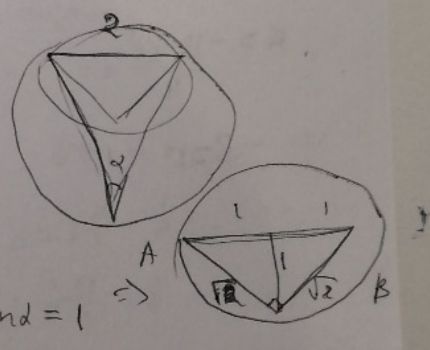
~~$y=4\sqrt{...}-1$~~

$2R\sin\alpha = 2$

$R\sin\alpha = 1$

$R=\frac{1}{\sin\alpha}$

$R_{min} \Leftrightarrow \sin\alpha = 1$



21101916 (U336101 M1298763)

Чистовик

№1 $\{a_n\} \in \mathbb{Z} \Rightarrow d \in \mathbb{Z}$

$\{a_n\} \uparrow\uparrow \Rightarrow d > 0$

$S_5 = \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = 5a_1 + 10d$

① $a_6 \cdot a_{11} = (a_1 + 5d)(a_1 + 10d) > 5a_1 + 10d + 15$

$a_1^2 + 15a_1d - 5a_1 - 10d + 50d^2 - 15 > 0$

② $a_8 \cdot a_9 < S + 39$

$(a_1 + 7d)(a_1 + 8d) < 5a_1 + 10d + 39$

$a_1^2 + 15a_1d - 5a_1 - 10d + 50d^2 - 15 > 0 > a^2 + 15a_1d + 56d^2 - 5a_1 - 10d - 39$

$24 > 6d^2$

$d^2 < 4$

$d < 2$

$0 < d < 2$

$\Downarrow$

$d = 1$

Тогда подставим $d = 1$ в ① и ②:

① $(a_1 + 5)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -5$

② $a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

$a_1 \in (-5 - 3\sqrt{2}; -5 + 3\sqrt{2})$

$4 < 3\sqrt{2} < 5$

$\Downarrow$

$a_1 = \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Ответ: $a_1 = \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

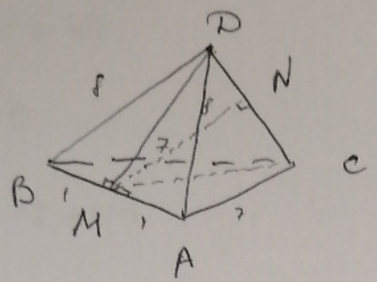
Чистовик

№2 $AB=2$

$AC=CB=7$

$AD=DB=8$

$\boxed{CD : R_{min}} = ?$

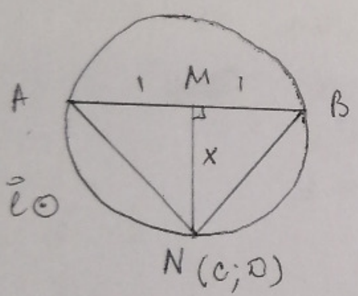


1) $\triangle DBA$ и $\triangle ABC$ – равнобедренные $\Rightarrow \exists\, M:\ DM \perp BA \perp CM$,

$BM = MA = \frac{AB}{2} = 1$

2) Любое сечение через AB будет отсекать $\triangle ABN$: $BN = NA$

Рассмотрим цилиндр сверху:



Пусть $MN = x$ – расстояние от AB до CD

Т.к. $CD \parallel \ell$ – образующей цилиндра, то $MN \perp \ell$

Значит, $MN = x \in (ABN) \perp CD \Rightarrow$ ~~лежит~~ $\triangle ABN$ лежит в плоскости основания цилиндра

Пусть его радиус R:

$AB = 2R \sin\angle ANB = 2 \Rightarrow R = \frac{1}{\sin\angle ANB} \Rightarrow R_{min} \sim \sin\angle ANB_{max} = 1$

Т.е. $\angle ANB = 90^\circ \Rightarrow AN = NB = \sqrt{2}$, $AM = MB = MN = \underline{x = 1}$

3) Теперь рассмотрим $\triangle MDC$:

$DM = \sqrt{BD^2 - BM^2} = \sqrt{64-1} = \sqrt{63}$

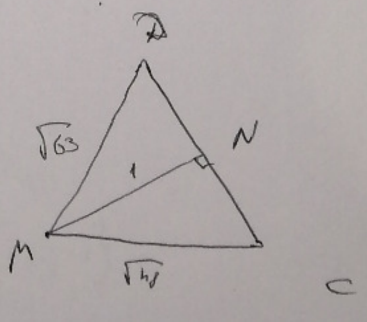
$MC = \sqrt{AC^2 - MA^2} = \sqrt{49-1} = \sqrt{48}$

MN – высота $= 1$

$DN = \sqrt{DM^2 - MN^2} = \sqrt{62}$

$NC = \sqrt{MC^2 - MN^2} = \sqrt{47}$

$DC = DN + NC = \sqrt{62} + \sqrt{47}$



Ответ: $\sqrt{62} + \sqrt{47}$

2

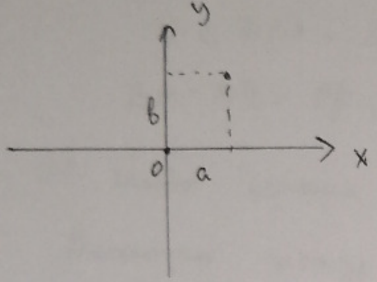
Чистовик

№3 М:

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 & ① \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b, 13) & ② \end{cases}$$

① В XY – ур-е окружности в центре $(a;b)$ и $R=\sqrt{13}$

a, b – параметры, т.е. при их изменении окружность двигается в XY.

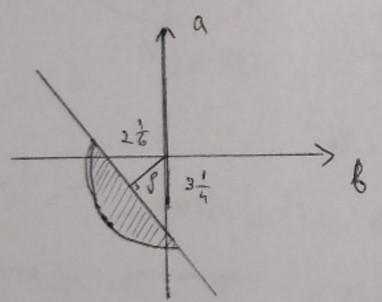


$$\rho(C(a;b);O(0;0)) = \sqrt{a^2+b^2}$$

② $a^2+b^2 \le 13$ всегда. Значит $\rho \le \sqrt{13}$ тоже всегда.

Значит центр окружности ① двигается внутри множества $a^2+b^2 \le 13$ всегда.

1) ∃ $13 < -4a-6b \Rightarrow a < \frac{-6b-13}{4}$; $a^2+b^2 \le 13$

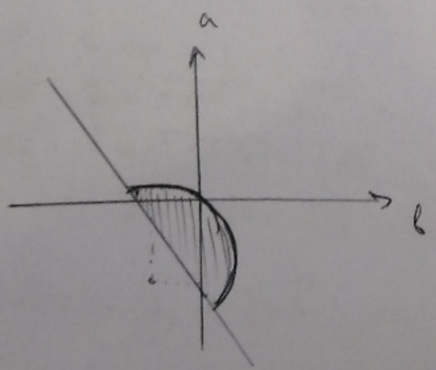


~~Теnер~~ Заштрихованная область – допустимые $(a;b)$

тогда $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$: ρ_{min} – высота из $O(0;0)$ до прямой $a=\frac{-6b-13}{4}$

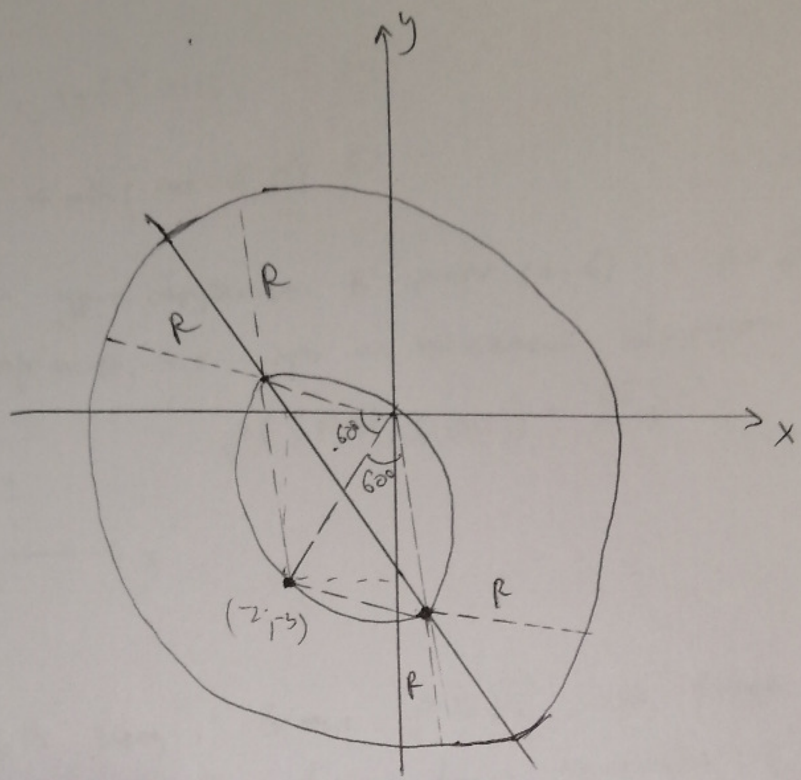
$$\rho_{min} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

2) ∃ $13 > -4a-6b \Rightarrow a > \frac{-6b-13}{4}$; $(a+2)^2+(b+3)^2 \le 13$



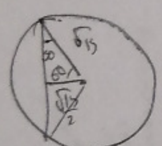
21101916 (U336101 M1298763)

Чистовик



Полученная фигура – два совмещенных круга

~~Т~~ Точнее – один круг, из которого вырезали полосу.



$\cancel{S = 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 13}$

(2 совмещенных сегмента)

$$S' = \pi R^2 \cdot \frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi R^2}{3}; \quad R = 2\sqrt{13}$$

$$S'' = S' - \frac{\sqrt{13}}{2} \cdot \sqrt{13} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = S' - \frac{13\sqrt{3}}{4}$$

$$S = \frac{2\pi}{3} \cdot 4 \cdot 13 - \frac{13}{2} \cdot \sqrt{3}$$

Ответ: $\frac{8\pi}{3} \cdot 13 - \frac{13}{2}\sqrt{3}$

4

№1

S_5 $\qquad a_6 \cdot a_{11} > S + 15 \qquad d > 0 \in \mathbb{Z}, a_1 \in \mathbb{Z}$

$\{a_n\} \in \mathbb{Z} \uparrow \qquad a_8 \cdot a_9 < S + 39$

$a_1 - ?$

$$S_5 = \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = (a_1 + 2d)5 = 5a_1 + 10d = S_5$$

$$a_6 \cdot a_{11} = (a_1 + 5d)(a_1 + 10d) > 5a_1 + 10d + 15$$

$$a_1^2 + 5da_1 + 10da_1 + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15$$

$$a_1^2 + 15da_1 - 5a_1 - 10d + 50d^2 - 15 > 0$$

$$(a_1 + 7d)(a_1 + 8d) < 5a_1 + 10d + 39$$

$$a_1^2 + 15a_1d + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39$$

$$\cancel{a_1^2} + \cancel{15da_1} - \cancel{5a_1} - \cancel{10d} + 50d^2 - 15 > 0 > \cancel{a_1^2} + \cancel{15a_1d} + 56d^2 - \cancel{5a_1} - \cancel{10d} - 39$$

$$-15 + 39 > 6d^2$$

$$24 > 6d^2$$

$$d^2 < 4$$

$$\boxed{d < 2} \Rightarrow d > 0, d \in \mathbb{Z} \Rightarrow d = 1$$

$46 - 39 = 7$; $\quad 56 - 49 = 7$

Тогда $S_5 = 5a_1 + 10$

$\Downarrow$

$$a_1^2 + 15a_1 - 5a_1 - 10 + 50 - 15 > 0$$

$$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$$

$$(a_1 + 5)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -5$$

$$a_1^2 + 15a_1 - 5a_1 - 10 + 56 - 39 < 0$$

$$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$$

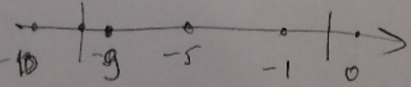
$$D = 100 - 28 = 72 = 36 \cdot 2$$

$$a_1 = \frac{-10 \pm 6\sqrt{2}}{2} = -5 \pm 3\sqrt{2}$$

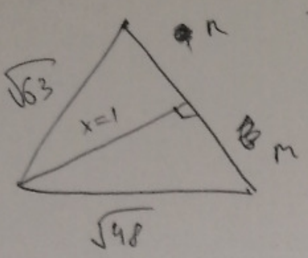
$$a_1 \in (-5 - 3\sqrt{2}; -5 + 3\sqrt{2})$$

$3\sqrt{2} = \sqrt{18} < 5 \Rightarrow a_1 \in [-9; -1]$

4



21101916 (U336101 M1298763)



$\Rightarrow n = \sqrt{62}$

$m = \sqrt{47}$

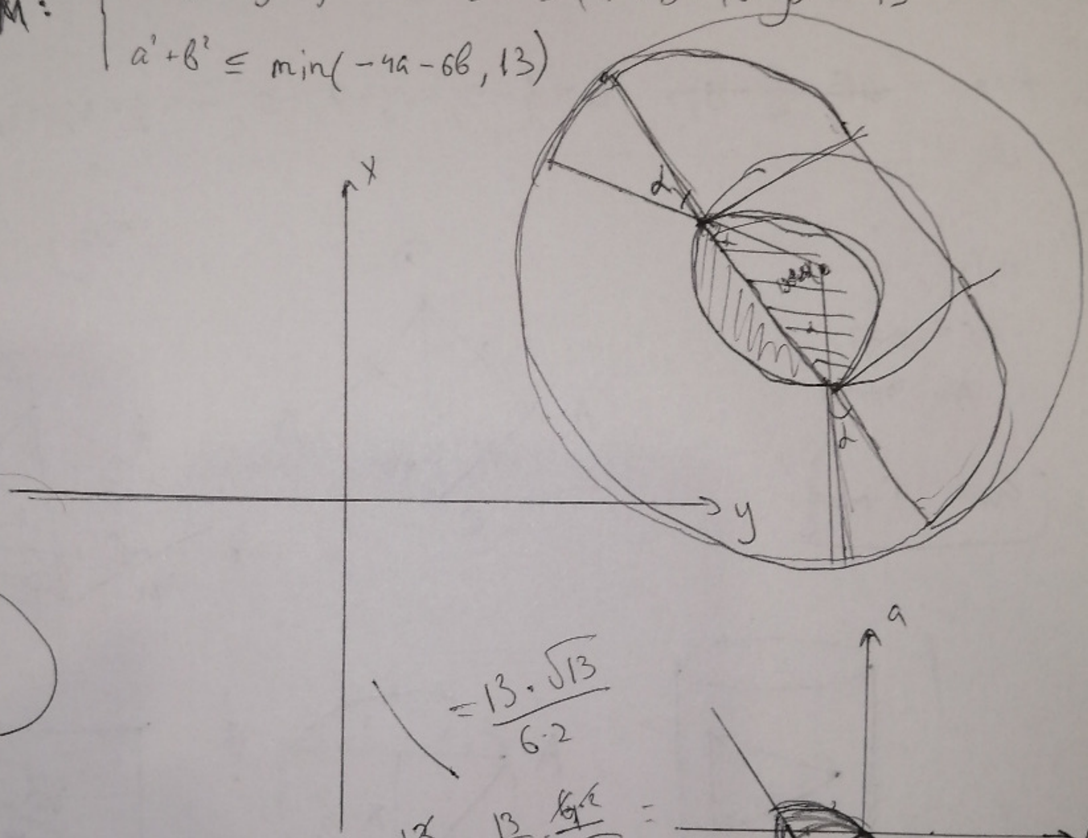
$CD = \sqrt{62} + \sqrt{47}$

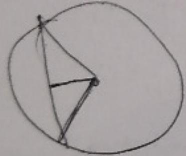
№3 $\exists a, b \in \mathbb{R}$:

(x,y) :

$$M: \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 13 \iff (a-x)^2 + (b-y)^2 \le 13 \\ a^2 + b^2 \le \min(-4a-6b, 13) \end{cases}$$

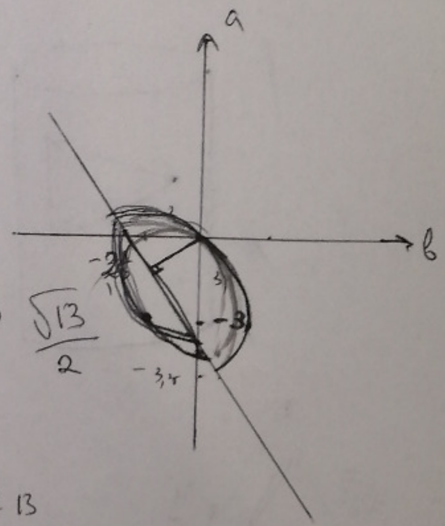
$S_M = ?$





$$= \frac{13 \cdot \sqrt{13}}{6 \cdot 2}$$

$$\rho_{min} = \frac{13}{6} \cdot \frac{13}{4} \cdot \frac{6 \cdot 2}{13\sqrt{13}} = \frac{13\sqrt{13}}{2 \cdot 13} \quad \frac{\sqrt{13}}{2}$$



1) $-4a - 6b < 13$

$4a + 6b > -13$

$\cancel{b > \frac{-13-4a}{6}} \Rightarrow a^2 + b^2 \le -4a - 6b$

$a > \frac{-13-6b}{4} =$

$= -3{,}25 - 1{,}5b$

$a^2 + 4a + b^2 + 6b + 4 + 9 \le 13$

$(a+2)^2 + (b+3)^2 \le 13$

$-3\frac{1}{4} - \frac{3}{2}b = 0$

$b = -\frac{13 \cdot 2}{4 \cdot 3} = -\frac{13}{6} = -2\frac{1}{6}$

$$+\frac{13}{6} \cdot \frac{13}{4\sqrt{\frac{13^2}{36} + \frac{13^2}{16}}} = \frac{13^2}{6 \cdot 4 \cdot 13}$$

$\frac{13}{6} \cdot$

$$\frac{13^2}{36} + \frac{13^2}{16} = 13\sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{16}} = 13\sqrt{\frac{4}{4 \cdot 9 \cdot 4} + \frac{9}{4 \cdot 4 \cdot 9}} =$$

$$= 13\sqrt{\frac{13}{36 \cdot 4}} =$$

21101916 (U336101 M1298763)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101916**

ID профиля: **336101**

Вариант 20

№1 НОД$(a;b;c) = 10$ $\qquad 2^{\alpha}\,5^{\beta}$ $\qquad 2^{\gamma}\,5^{\delta}$

НОК$(a;b;c) = 2^{17}\cdot 5^{16}$

$\{a;b;c\} = 2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}$

При этом $10 = 2\cdot 5$

Следовательно ~~у всех из них~~ хотя бы у одного из них

$\alpha = 1$

$\beta = 1$

~~будет~~ $\alpha_{max} = 17$

$\beta_{max} = 16$

~~Или сумма их показателей~~ равна 17

~~4~~

$2 \quad 2^2 \quad 2^3$

2^3

$2 \quad 2^2\cdot 5 \quad 2\,5^2$

НОК: $2^2\cdot 5^2$

$2^{\alpha}\cdot 5^{\beta} \qquad 2^{\gamma}5^{\delta} \qquad 2^{\varphi}5^{\lambda}$

$2^{17}\cdot 5^{\beta} \qquad 2^{1}\cdot 5^{\delta} \qquad 2^{\varphi}$

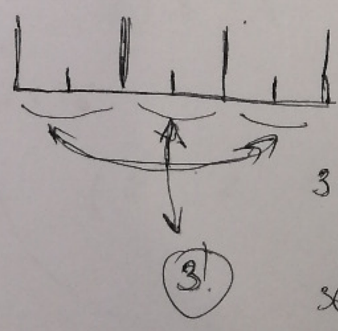
$2^{17}\,5^{16} \qquad 2^{1}\,5^{1} \qquad 2^{\alpha}\,5^{\beta}$

$2^{17}\,[5^{16} \quad 5^{1} \quad 5^{\beta}]$

2^{1}

~~α, β~~ $\quad \alpha \in [1;17]$

$\beta \in [1;16]$



~~$19\cdot 18$~~

$3\cdot 3 \ldots =$

$6\cdot 6 = 36$

$36 = 3!\cdot X$

$X = 6$

$2^1 \quad 2^{17}$
$2^1 \quad 2^2 \ldots 2^{17}$

$5^1 \quad 5^{16}$
$5^1 \ldots 5^{16}$

3 $\qquad$ 3

$$C_{19}^{3}\cdot C_{18}^{3} = \frac{19!}{16!\cdot 3!}\cdot\frac{18!}{15!\cdot 3!} = \frac{17^2\cdot 18^2\cdot 16\cdot 19}{6\cdot 6} = 9\cdot 16\cdot 19\cdot 17^2$$

Чистовик

№4 $НОД(a;b;c) = 10$

$НОК(a;b;c) = 2^{17} \cdot 5^{16}$

~~{a;b;c} = 2~~ $НОД = 10 \Rightarrow$ каждое число делится на 2 и 5

$\exists$ число вида $2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$, у которого $\alpha = 1$, $\beta = 1$ (возможно, другое число)

$НОК = 2^{17} \cdot 5^{16} \Rightarrow \exists$ число вида $2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$, $\alpha = 17$; β любое ≤ 16;

$\beta = 16$; $\alpha =$ любое ≤ 17

Чтобы создать 3 числа, необходимо:

1) выбрать из множества $\{2^1; 2^2 \ldots 2^{17}\}$ любое число и выбрать $2^1; 2^{17}$

2) Аналогично из множества $\{5^1; \ldots 5^{16}\}$

$a = \lfloor 2^x, 5^y \rfloor$ $x = 1; y = 1$

$b = \lfloor 2^w; 5^z \rfloor$ $w = 17; z = 16$

$c = \lfloor 2^{\lambda}; 5^{\varphi} \rfloor$ $\lambda \in [1;17]$; $\varphi \in [1;16]$

При $\lambda = 1$: a b c

$\lfloor 2^1, 5^1 \rfloor$ $\lfloor 2^{17}, 5^{16} \rfloor$ $\lfloor 2^1, 5^{\varphi} \rfloor$

Так можно выбрать 3 позиции для двойки (т.к. число 2^1 повторяется) и $3! = 6$ позиций для пятерки. Всего 18 вариантов троек

Аналогично при $\varphi = 1$

И отдельный случай при $\varphi = \lambda = 1$ $\lfloor 2^1 5^1 \rfloor 2^1 5^1 \lfloor 2^{17} 5^{16} \rfloor$

Для таких чисел троек всего 3.

Всего пар $\lambda_{max} \cdot \varphi_{max} = 17 \cdot 16$

1

(см. след. стр)

№4 Продолжение:

Итого: пятнадцать ~~троек~~ наборов чисел вида $2^1 5^1; 2^1\cdot 5^4; 2^{17}\cdot 5^{16}$

шестнадцать ~~троек~~ наборов чисел вида $2^1\cdot 5^1; 2^7\cdot 5^1; 2^{17}\cdot 5^{16}$

1 ~~тройка вида~~ набор чисел $2^1 5^1; 2^1 5^1; 2^{17}\cdot 5^{16}$

И $17\cdot 16-15-16-1$ для $2^1 5^1$ $2^{17}\cdot 5^{16}$ $2^7 5^4$

Последний набор чисел для любого одного набора из 6 чисел позволяет составить 36 троек (a, b, c)

Итого: $18\cdot 15 + 18\cdot 16 + 1\cdot 9 + 36\cdot 15\cdot 16 =$

$= \cancel{18(15+16)+}$

$270 + 288 + 9 + 8640 =$

$= 9207$

Ответ: 9207

Чистовик

(№5) $A = \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$

$B = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$C = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

1) $AB = A^2$, т.е. $A = B$:

$A \cdot B = 2\log_{2x-8}(x-4) \cdot \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26) = \frac{\ln x-4}{\ln 2x-8} \cdot \frac{\ln 5x-26}{\ln x-4} = \frac{\ln 5x-26}{\ln 2x-8} =$

$= \log_{2x-8}(5x-26) = 2\log_{(2x-8)}(5x-26)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)} = \frac{2}{C}$

но $C = A+1$

$A^2 = \frac{2}{A+1} \Rightarrow A^3 + A^2 = 2 \Rightarrow (A-1)(A^2+A+2) = 0$

$A = 1$

$A = \frac{2}{\log_{(x-4)}2 + \log_{x-4}(x-4)} = 1 \Rightarrow \log_{(x-4)}2 = \frac{2}{A} - 1 = \frac{2}{1} - 1 = 1$

$x - 4 = 2$

$\boxed{x = 6}$

$B(x=6) = \log_{2^2}4 = 1$

$C = \log_2 4 = 2$

2) $A \cdot C = A^2 \Rightarrow A = C$

$A \cdot C = \cancel{A}\ 2\log_{2x-8}(x-4) \cdot 2\log_{5x-26)}(2x-8) = 4\log_{(5x-26)}(x-4) =$

$= 2\log_{(5x-26)}(x-4)^2 = \frac{2}{\log_{(x-4)^2}(5x-26)} = \frac{2}{B} = \frac{2}{A+1} \Rightarrow A = 1$; $x=6$, но

при $x = 6$ $B = 1$, $C = 2$

(см след стр)

3

21101916 (U336101 M1298764)

3) $B=C \Rightarrow BC=B^2$ Чистовик

$$B\cdot C = \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)\cdot 2\log_{(5x-26)}(2x-8) = \log_{(x-4)}(2x-8) =$$

$$= 2\log_{(x-4)}(2x-8)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\log_{(2x-8)^{\frac{1}{2}}}(x-4)} = \frac{2}{A}$$

$$A=B+1 \Rightarrow B^2=(A-1)^2 = A^2 \cancel{+} -2A+1 = \frac{2}{A}$$

$$A^3-2A^2+A-2=0$$

$$(A-2)(A^2+1)=0 \Rightarrow \boxed{A=2}$$

$$\log_{(x-4)}2 = \frac{2}{A}-1 = \frac{2}{2}-1=0$$

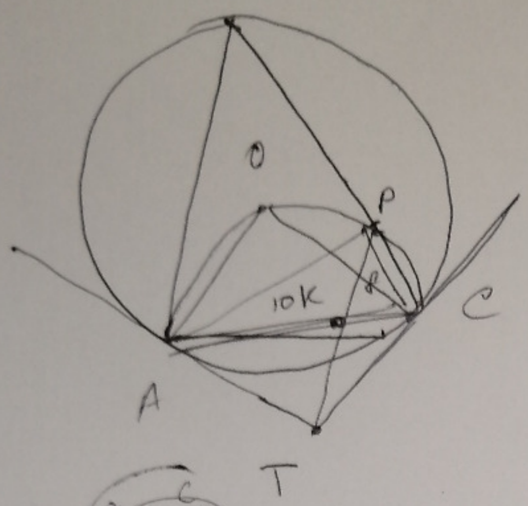
$$(x-4)^0=2$$

$$x\in\varnothing$$

Ответ: $x=6$

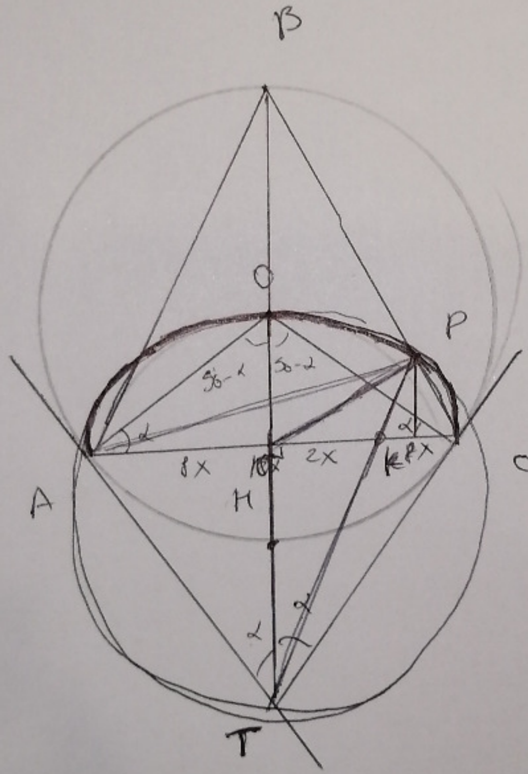
№6

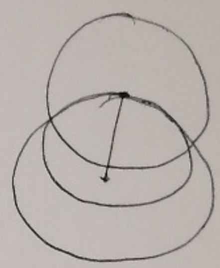
Чистовик



$S_{ABC} = ?$

$\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$ $\Rightarrow$ OT – диаметр





$AC = 2R\sin 90-\alpha$

$AC = 2r\sin 2\alpha$

$\boxed{\text{Решение:}}$ Опустим OH из O – перпендикуляр на AC

Заметим: $\frac{OH}{AH} = \frac{CH^{=AH}}{TH} \Rightarrow TH \cdot OH = AH^2 \Rightarrow$ A, O, C, T лежат на окружности, OT – диаметр. $\Rightarrow \angle APT = 90^\circ - \alpha$, где $\alpha = \angle OTC$

5

$A = 2\log_{2x-8}(x-4) = \log_{2x-8}(x-4)^2$

$B = \log_{(x-4)^2}(5x-26) = \dfrac{1}{\log_{(5x-26)}(x-4)^2}$

$C = \log_{(5x-26)}(2x-8)^2 = \log_{(5x-26)}4 + \log_{(5x-26)}(x-4)^2 = \log_{(5x-26)}4 + \dfrac{1}{B}$

1) Пусть $C = B+1$

$C = \log_{(5x-26)}4 + \dfrac{1}{B} = \dfrac{B^2+1}{B}$

$\log_{(5x-26)}4 = \dfrac{B^2-1}{B} + 1$

~~$\log_{(5x-26)}4 =$~~ $\log_a b - \dfrac{1}{\log_b a} = \log_a b - \log_b a = \dfrac{\ln b}{\ln a} - \dfrac{\ln a}{\ln b} =$

$= \dfrac{\ln^2 b - \ln^2 a}{\ln a \ln b}$

$A = \log_{(2x-8)}(x-4)^2$

$B = \log_{(x-4)}\sqrt{5x-26}$ 1) $B = C \Rightarrow B = \dfrac{1}{B} + \log_{\sqrt{5x-26}} 2$

$C = \log_{\sqrt{5x-26}}\left(2(x-4)\right)$

$\boxed{x=6}$; $B = \log_2 2 = 1$

$A = \log_4 4 = 1$

$C = \log_2 4 = 2$

$\boxed{x=7}$ $\log(2x-8)$ $14-8=6$

$x-4=$

$\begin{array}{r} 40 \\ -26 \\ \hline 34 \end{array}$

$A = \log_{2a} a^2 = 2\log_{2a} a = \dfrac{2}{\log_a 2a} = \dfrac{2}{\log_a 2 + 1}$

$a = x-4,\ x>5 \Rightarrow a>1$

$b = 5x-26$

$B = \log_a b^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_a b$

$C = \log_{b^{\frac{1}{2}}} 2a = 2\log_b 2a = 2\log_b a + 2\log_b 2$

21101916 (U336101 M1298764)

$2^{17}\ 5^{16}\quad 2^{1}\ 5^{1}\quad 2^{1}\ 5^{1}$

$2^{1}\quad 2^{1-17}\quad 2^{17}\qquad 1\ 1\quad 17$

$5^{1}\quad 5^{1-16}\quad 5^{16}\qquad 11\quad 16$

11 11 16 17

При $\alpha=1;\ \beta=1$

2) 1 1 17

5) 1 1 16

2 5 2 5 2 5

1 1 1 1 17 16

2) 3
5) 3 } 9

При $\alpha=1$:

2) 1 1 17

5) 1 β 16

2 5 2 5 2 5

2) 3
5) 3! = 6 } = 18

При $\alpha\neq1;\ \beta\neq1$

2) 3! = 6
5) 3! = 6 } 36

$18 \times 15 = 90 + 18 = 270$

$9\cdot30$

$N = 17\cdot16$

1) 15 по 18

2) 1 по 9

3) 16 по 18

4) $17\cdot16-32$ по 36

$(2^1\ 2^1\ 2^{17})(5)\ldots$

36×16: 216, 36, 576

576×15: 2880, 576, 8640

8640 + 270 = 8910

8910 + 288 = 9198

9198 + 9 = 9207