Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101914**

ID профиля: **848852**

Вариант 20

N2 Чистовик 3 $AB=2$, $AC=CB=7$, $AD=DB=8$

Чистовик 1

N1 a_1; a_1+d; a_1+2d; a_1+3d; a_1+4d $\quad a_8 a_9 < S+39$

$S = 5a_1+10d$ – по условию, $a_6 a_{11} = (a_1+5d)(a_1+10d) >$ $> 5a_1+10d+15$; $(a_1+7d)(a_1+8d) < 5a_1+10d+39$. Заметим, что все числа целые ⇒ d – целое. ⇒

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2+15a_1d+56d^2 < 5a_1+10d+39 \\ a_1^2+15a_1d+50d^2 > 5a_1+10d+15 \end{cases} \Big| -$$

$6d^2 < 24$, поскольку d – целое, то нам подходит только $d=1$, т.к. $d^2<4$, $2^2=4$ ⇒

$$\Rightarrow \begin{cases} (a_1+5\cancel{d})(a_1+10) > 5a_1+10\cancel{d}+15 \\ (a_1+7\cancel{d})(a_1+8) < 5a_1+49 \end{cases}$$

Эти переходы верные, т.к. мы из числа меньшего, чем $5a_1+10d+39$ вычитаем число большее, чем $5a_1+10d+15$, значит разность будет меньше, чем $5a_1+10d+39-5a_1-10d-15 \leq$ [illegible]. ~~Тогда~~ Равенство не может получиться, т.к. знаки строгие ⇒

$$\begin{cases} a_1+10a_1+25>0 \\ a_1+10a_1+7<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1+5)^2>0 \quad a_1\neq -5 \\ a_1 = \frac{-10\pm\sqrt{72}}{2} = -5\pm3\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow$$

⇒ $-10 < -5\pm3\sqrt{2} < 0$ ⇒ По условию a – целое, т.к. прогрессия состоит только из целых чисел ⇒ $a\in[-9;-1]\setminus\{-5\}$.

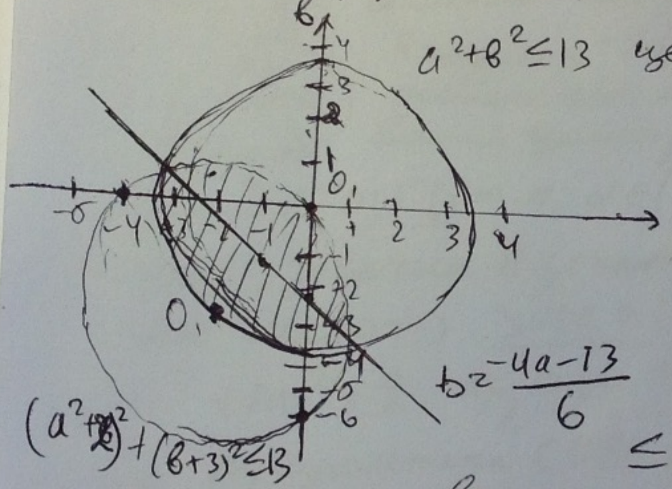
№2 Чистовик ③ $AB=2,\ AC=CB=7,\ AD=DB=8$

Чистовик ②

№3 $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b,13)\end{cases}$

① $\left[\begin{array}{l}a^2+b^2\le -4a-6b,\ -4a-6b<13\\ a^2+b^2\le 13,\ -4a-6b\ge 13\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}(a^2+2)^2+(b+3)^2\le 13\ \text{I}\\ a^2+b^2\le 13\ \text{II}\end{array}\right.$

I, $b>\frac{-4a-13}{6}$ II $b\le\frac{-4a-13}{6}$. Теперь нарисуем это в координатах $(a;b)$



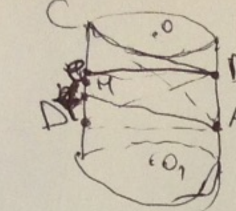
очевидно, что $a^2+b^2=13$ проходит через центр окр. $(a^2+2)^2+(b+3)^2\le 13$. Получается, что OO_1 = радиусу $=\sqrt{13}$.

Множество точек, которое удовлетворяет ~~первом~~ второму условию на графике обозначено штриховкой.

Заметим, что $(x-a)^2+(y-b)^2\le 13$ — множество точек внутри окружности $(a;b)$ — центр и $\sqrt{13}$ — радиус $\Rightarrow$ Нам подходят все точки из области, выделенной штриховкой и удаленные на расстояние непревышающее $\sqrt{13}$.

Осталось найти площадь этой фигуры.

№2 Чистовик 3 $AB=2$, $AC=CB=7$, $AD=DB=8$

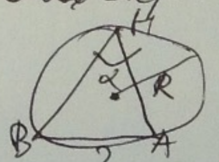


проведём ~~BE~~ Be и Af – высоты к CD, заметим, что ~~все~~ f, e и H – это одна точка H, т.к. $CB=A$, $AD=DB$, CD – общая $\Rightarrow \triangle ACD = \triangle CBD \Rightarrow \frac{Ce}{eD} = \frac{Cf}{fD} \Rightarrow$

$\Rightarrow eD = fD$, и $e=f=H \Rightarrow$ Поскольку $CD \parallel OO_1 \Rightarrow$ $BH \perp CD$ и $\Rightarrow$ и $AH \perp CD \Rightarrow AH$ и $BH \perp OO_1$ – ~~главной~~ оси цилиндра.

$\Rightarrow \{BHA\}$ ~~...~~ $\perp$ оси, тогда опишем окружность вокруг $BHA \Rightarrow$ поскольку $BHA \perp$ оси $\Rightarrow$ основания цилиндра = окр. описанной вокруг $BHA \Rightarrow$ равны их радиусы $\Rightarrow$

$\Rightarrow$

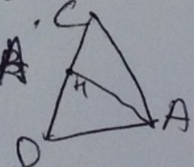


R ~~опр.~~ окр. $= R$ основания цилиндра по условию выбираем только тот тетраэдр, для которого R основания цилиндра – min. $\Rightarrow \frac{AB}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow$

$\sin\alpha \in [0;1]$, т.к. $\alpha \in [0;90] \Rightarrow$ нам нужен наименьший радиус, значит в знаменателе должно стоять наибольшее число $\Rightarrow \underline{\sin\alpha = 1} \Rightarrow R = \frac{AB}{2} = 1 \Rightarrow \angle AHB = 90^0$

$BH^2 + AH^2 = 2^2$, где $AH=BH$ $\Rightarrow 2AH^2 = 2^2 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2}} = AH$

из треугольника CDA



$AC^2 - AH^2 = CH^2 = 7^2 - \frac{4}{2} = \sqrt{47}$

$HD^2 = AD^2 - AH^2 = 64 - 2 = \sqrt{62} \Rightarrow CD = \sqrt{62} + \sqrt{47}$.

Заметим, что такое значение CD – единственное, т.к. $R \to \min$, а если менять местами ~~вы~~ расположение точек A и B – ничего не изменится.

$S = 5a_1 + d$; $a_1 + 2d + a_1$

Чистовик ②

$+(y-b)^2 \le 13$

$\le \min(-4a-6b, 13)$

$-6b, -4a-6b < 13 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (a^2+ \\ a^2+ \end{array} \right.$

$, -4a-6b \ge 13$

-13 II $b \le \frac{-4a-13}{6}$ Те

натах $(a;b)$

очевидно,

$+b^2 \le 13$ центр окр

получается

$> \sqrt{13}$

Множест

удовлет

му услов

значено и

$\frac{-4a-13}{6}$ Заменим

≤ 13 –

утри окружност

одходят все

триховкой и у

$\sqrt{13}$.

йти точ

Черновик

N1

S – сумма a_1, a_2, a_3 $a_6 a_{11} > S+15$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = S$ $a_8 a_9 < S+39$

$\begin{cases} a_6 a_{11} > S+15 \\ a_8 a_9 < S+39 \end{cases}$

1) a_1
2) $a_1 + d$
3) $a_1 + 2d$
4) $a_1 + 3d$
5) $a_1 + 4d$

2) $a_1 + d$
3) $a_1 + 2d$

$(a_1 + 7d)(a_1 + 8d) < \cancel{a_1 + a_2 + a_3}$

$S = 5a_1 + 10d$

$a_8 + a_{10} = 2a_9$

$a_1^2 + a_1 15d + 64d^2 < 5a_1 + 10d + 39$

$a_1^2 + 10a_1 + 64d^2 + 10d - 39 < 0$

$\begin{cases} D = 100 - 4(64d^2 - 10d - 39) < 0 \\ (a_1 + 5d)(a_1 + 10d) > 5a_1 + 10d + 15 \end{cases}$

$a_1^2 +$

$100 - 256d^2 + 40d + 39$

$139 - 256d^2 + 40d$

$56d^2 < 39$

$56d^2 > 15d^2$

$32 < 39$

$24 > 15$

$8 < 13$

① $\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39 \\ a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15 \end{cases}$

$6d^2 < 24$ $d^2 < 4$

$(d-2)(d+2) < 0$

① $a_1^2 + a_1(15d - 5) + 56d^2 - 10d - 39 < 0 \Rightarrow$

$D = (15d-5)^2 - 4(56d^2 - 10d - 39) < 0$

$225d^2 - 150d + 25 - 224d^2 + 40d$ $\times 4 \; 39 \; 156$

$a_1^2 + 15a_1 + 50 - 5a_1 - 25 > 0$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$ $(a_1+5)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \ne 5$

$a_1^2 + 15a_1 + 56 - 5a_1 - 49 < 0$

$a_1 + 10a_1 + 7 < 0$ 72 $\frac{-10 \pm \sqrt{72}}{2}$

36

$\frac{-10 \pm \sqrt{100-28}}{2} = -5 \pm 3\sqrt{2} =$

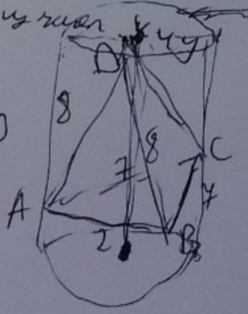
$18 \cdot 4 = 9 \cdot 2 \cdot 4$

$-10 \pm 3 \cdot 2\sqrt{2}$

$\min x, y$ – минимум из чисел

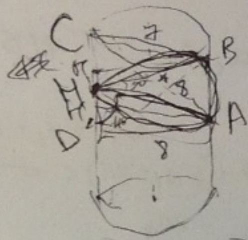
1,4 −0,8

$-10 < -5 \pm 3\sqrt{2} < 0$



N

Черновик.



1) $\triangle CBD = \triangle CAD$ $CB = CA$

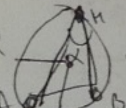
$DB = DA$ CD - общ

$\frac{CH_1}{H_1D} = \frac{CH_2}{H_2D}$

2) $BH \perp CD$, $AH \perp CD$, $CD \parallel$ оси цил. => $BH \perp$ оси

$\triangle ABH$

$\frac{AB}{\sin\alpha} = 2R$



— поскольку все прямоугольны на цилиндре => основания цилиндра = опи. окр. около ABH R цил. = R опи. AHB

$\sin\alpha \in (0;1]$

когда R - наименьший, когда $2R \to \min$ при $\angle AHB$ sin - наименьшем, $= \frac{R}{} = \frac{AB}{2} = 2$

$\triangle BHA$, $HB = HA$ $\angle BHA$, $AB = 2$ => $AH^2 + BH^2 = BA^2$ $2AH^2 = BA^2$

$BA = \sqrt{2} \cdot 4$

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 13 \\ a^2 + b^2 \leq \min(-4a - 6b, 13) \end{cases}$$

1) $a^2 - 14a$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \leq -4a - 6b, & -4a - 6b < 13 \\ a^2 + b^2 \leq 13, & -4a - 6b \geq 13 \end{cases}$$

$a^2 + 4a + b^2 + 6b$

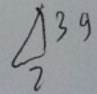
$(a+2)^2 + (b+3)^2 \leq$

$\frac{-4a-13}{6} < b$

$9+4$

$b \leq \frac{-4a-13}{6}$

$-2\frac{1}{6}$ $4-13$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101914**

ID профиля: **848852**

Вариант 20

№4 чистовик 4

$$\begin{cases} ① \text{НОД}(a;b;c) = 10 = 2^1 \cdot 5^1 \\ ② \text{НОК}(a;b;c) = 2^{17} \cdot 5^{16} \end{cases}$$ по условию

Из ② следует, что можно разложить $a, b, c = 2^d \cdot 5^e$

Тогда $a = 2^{d_1} \cdot 5^{e_1}$, $b = 2^{d_2} \cdot 5^{e_2}$, $c = 2^{d_3} \cdot 5^{e_3}$. Из ① следует, что $a, b, c \vdots 10 \Rightarrow$ d_2, $10 = 2^1 \cdot 5^1 \Rightarrow d_1, d_2, d_3 \geq 1$, $e_1, e_2, e_3 \geq 1$

Заметим, что максимально одна из степеней может равняться 17, т.к. НОК$(a;b;c)$ содержит 2^{17}, ~~а минимум одна из степеней~~ d_1, d_2, d_3 ~~только одна~~

а минимальная из степеней $d_1, d_2, d_3 = 1$. Максимальная из степеней 17, т.к. если одна из степеней хотя бы 18, то одно из чисел $a, b, c \vdots 2^{18}$, тогда и НОК $\vdots 2^{18}$, значит противоречие, т.к. у нас НОК $\vdots 2^{17}$ только. , а минимальная из степеней $d_1, d_2, d_3 = 1$, т.к., если d_1, d_2 или $d_3 > 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ Все три числа $a, b, c \vdots 4$, и НОД $\vdots 4$, а наш НОД $= 10 \not\vdots 4$. ~~тогда посчитаем~~ Тогда аналогично для (e_1, e_2, e_3) — минимальное из них равно 1, т.к. НОД кратен максимум 5^1, а максимальное из них равно 16, т.к. из-за НОК, который кратен максимум $5^{16} \Rightarrow$ Посчитаем кол-во таких троек чисел, тогда 3 способа выбрать $d_1 = 1$, тогда 2 способа выбрать $d_2 = 17 \Rightarrow$ уже $3 \cdot 2$, тогда, когда мы выбрали $d = 1$ и $d = 17$, $\Rightarrow$ осталось от 2 до 16 — степени которым может быть равна d_3 $\Rightarrow$ 15 способов выбрать число от 2 до 16, тогда ~~тогда заметим~~ заметим, что если мы выбрали две d_1 и d_2 такие что они обе равны 1 $\Rightarrow$ вариантов будет только 3, $1, 1, 17$; $1, 17, 1$ и $17, 1, 1$ $\Rightarrow$ аналогично с вариантами, где $d_1 = d_2 = 17$ их тоже только 3 $17, 17, 1$; $1, 17, 17$ и $17, 1, 17$ $\Rightarrow$ тогда кол-во вариантов выбрать $d_1, d_2, d_3 = 3 \cdot 2 \cdot 15 + 3 + 3$, а кол-во вариантов $e_1, e_2, e_3 = 3 \cdot 2 \cdot 14 + 3 + 3$, т.к. 3 варианта выбрать $e_1, e_2, e_3 = 1$ осталось выбрать из оставшихся двух одно, которое равно 16 и 2–15 — выбрать одно любое = 14 вариантов.

Ро аналогично $\mathrm{cd}_2 \mathrm{yy}$ нас получаются такие варианты, что двух из тройки $\ell_1 = \ell_2 = 1$, $\ell_3 = 16$ – только 3 варианта и если $\ell_1 = \ell_2 = 16$, $\ell_3 = 1$ – тоже только 3 варианта => всего таких троек будет равно

$(3 \cdot 2 \cdot 15 + 3 + 3)(3 \cdot 2 \cdot 14 + 3 + 3) = \underline{8640}$, ответ: 8640

№6 $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$, $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$, $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

Рассмотрим первый случай, обозначим $2x-8 = a$, $x-4 = b$, $5x-26 = c$, тогда наши логарифмы преобразуются в $\log_{\sqrt{a}} b = \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$, $\log_{(x-4)^2} 5x-26 = \log_{b^2} c$, $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = \log_{\sqrt{c}} a$ =>

=> $\log_{\sqrt{a}} b = z = \log_{b^2} c = z$, $\log_{\sqrt{c}} a = z+1$ – первый случай, заметим, что по определению логарифма $\sqrt{a}^z = b$, $a^{\frac{z}{2}} = b$, $b^{2z} = c$, тогда $a^{z^2} = c$ => $a = c^{\frac{1}{z^2}}$, тогда $\log_{\sqrt{c}} a = \frac{2}{z^2}$ по свойству логарифма $\log_{\sqrt{c}} c^{\frac{1}{z^2}} = \log_{c} c^{\frac{2}{z^2}} = \frac{2}{z^2}$ => $\log_{\sqrt{c}} a = \frac{2}{z^2} = z+1$

=> $\frac{2}{z^2} - 1 = z$ => $\frac{2-z^2}{z^2} = z$ $\quad z^2(z+1) = 2$ => $z = 1$ – только,

$\log_{\sqrt{a}} b = 1$, $\log_{b^2} c = 1$ => $\sqrt{a} = b$, $b^2 = c$ => $a = c$ =>

=> $2x - 8 = 5x - 26$ => $\boxed{x = 6}$, тогда $b = 2$, $a = 4$, $c = 4$.

Рассмотрим второй случай, тогда

$\log_{\sqrt{a}} b = z = \log_{\sqrt{c}} a$, $\log_{b^2} c = z+1$, тогда опять же $a^{\frac{z}{2}} = b$, $c^{\frac{z}{2}} = a$ $\quad c^{\frac{z^2}{4}} = b$ => $c = b^{\frac{4}{z^2}}$ =>

=> $\log_{b^2} c = \frac{2}{z^2}$ => аналогично первому случаю $\frac{2}{z^2} = z+1$ =>

=> $\underline{z = 1}$ => $\log_{\sqrt{a}} b = 1 = \log_{\sqrt{c}} a$ => $\sqrt{a} = b$ и $\sqrt{c} = a$,

$\log_{b^2} c = 2$ => $b^4 = c$ $\begin{cases} \sqrt{2x-8} = x-4 \\ \sqrt{5x-26} = 2x-8 \end{cases}$ => $\begin{cases} 2x-8 = x^2-8x+16 \\ 5x-26 = 4x^2-32x+64 \end{cases}$

$4x^2 - 37x + 90$ $\quad \begin{array}{r} 37 \\ \times 37 \end{array}$

Черновик

Чистовик 6

Продолжение 5 задачи.

$$\begin{cases} 2x-8=x^2-8x+16 \\ 5x-26=4x^2-32x+64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-6)(x-4)=0 \\ D<0 \end{cases} \Rightarrow x=6;\ x=4,$$

но ~~$\sqrt{5x-26}=2x-8$, при $x=4 \Rightarrow \sqrt{-6}$~~ $= 5x-26 \geq 0$, при $x=4$

$-6 \geq 0$ — противоречие. А $x=6$ — подходит.

Последний случай, когда $\log_{\sqrt{a}} b = z+1$, $\log_{b^2} c = z_2 = \log_{\sqrt{c}} a$; $b^{2z}=c$, $c^{\frac{z}{2}}=a$, $a^{\frac{1}{z}}=b$, $\log_{\sqrt{a}} b = \frac{2}{z^2} \Rightarrow$

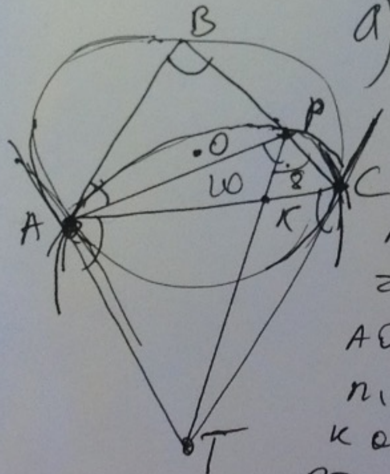
$\Rightarrow k$ снова $=1 \Rightarrow b^2=c$, $\sqrt{c}=a \Rightarrow a^2=b^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=-b \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-8=x-4 \\ 2x-8=4-x \end{array}\right. \Rightarrow \underline{x=4}, \text{ но } 5x-26 \geq 0 \Rightarrow$$

$-6 \geq 0$ — противоречие и ед. $\underline{x=6}$

ответ: $x=6$

№6



а) $S_{PKC}=8$, $S_{PAK}=10$

$\angle APC = \angle AOC$, т.к. вписанные, опирающиеся на одну дугу $= 2\angle ABC$, ~~поскольку AOTC — окр.~~ $\Rightarrow \angle ATC + \angle APC = 180^\circ \Rightarrow T$ лежит на окр. AOPTC, $\angle TAC = \angle TCA = \angle ABC$, т.к. TA и TC — касательные к окружности, APCT — вписанный, PT — биссектриса APC $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$\frac{AP}{PC} = S_{APK}$~~ $\frac{PC}{AP} = \frac{S_{PKC}}{S_{APK}} = \frac{4}{5} \Rightarrow S_{APB} = \frac{5}{4} \cdot 18 = \frac{5 \cdot 9}{2} =$

$= 22{,}5 \Rightarrow$ $\underline{S_{ABC} = 18 + 22{,}5 = 40{,}5}$

черновик

№4 $\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=10 \\ \text{НОК}(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$ $a,b,c:10$ 34

$a,b,c=2^{\alpha}\cdot 2^{\beta}$ $a=2^{\alpha_1}5^{\beta_1}$ $b=2^{\alpha_2}5^{\beta_2}$ $c=2^{\alpha_3}5^{\beta_3}$

$\begin{cases} (x-4)^2\neq 1 \\ 1\neq 2x-8>0 \end{cases}$ $x-4>0$ $5x-26>0$ $5x-26\neq 1>0$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$, $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$, $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

a $a+1$ a $\alpha\neq 1$ $\beta\neq 1$ a a $a+1$

$\log_{\sqrt{5x-26}} 2+\log_{\sqrt{5x-26}}(x-4)$

$\log_a b$ $\log_{b^2} c^2$ $\log_c a^2$

$\log_a b=\frac{\log_a b}{\log_a a}$ $\log$

$x=6$ $\alpha=17$ $\boxed{2\cdot 6}$ $\Delta APC=\Delta AOC$ $\boxed{3=17}$

2^{17}

$2x-8=a$, $x-4=b$ $5x-26=c$

$90+6=96$ $84+6$ $\boxed{6+6+6}=\frac{15}{34}$ $\frac{20}{34}$

$k+1$

$\begin{cases} 2x-8=x-4 \\ 2x-8=4-x \\ 3x=12 \\ x=4 \end{cases}$ $x=4$ $a=b$, $a=-b$

990 8640 $c^{22}=c$

$a^{\frac{1}{2^2}}$ $\sqrt{a^2}=b$ $26-8=3$ $\frac{2}{k^2}$ $a^{\frac{k}{c}}$

$(a-b)(a+b)=0$ $a^{\frac{k}{2}}$

$a^{\frac{3}{2}}=b$ $c^{\frac{3}{2}}=a$ $\sqrt{\ }:\frac{1}{2}$ $c^{\frac{1}{2}}=a$

$a^{\frac{2}{2}}$ $\log_{\sqrt{c}} a=$ $a^{\frac{2}{2}}$

$b^{\frac{2\cdot 2\cdot 2}{2}}=\log_{b^{\frac{2\cdot 2}{2}}} a^{\frac{2}{2}}$

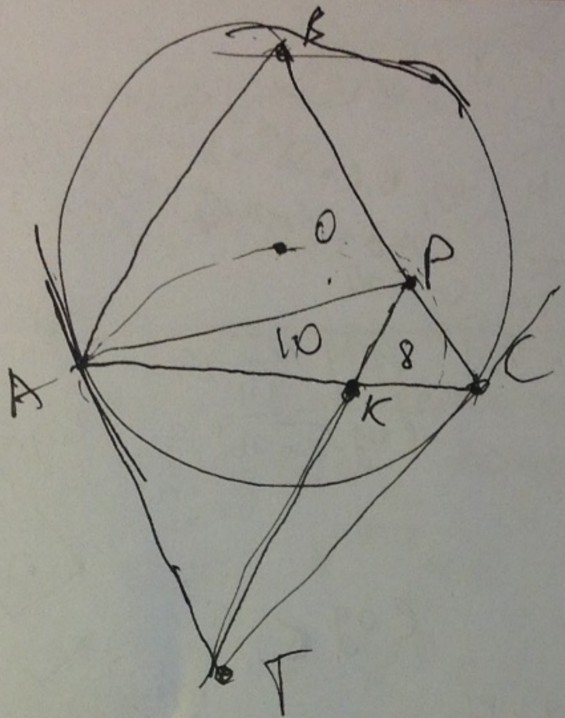
$\log_{a^2} b^2$

$b^4=a^2$ $c^{\frac{1}{2}}$

$a=b^2$ $\sqrt{c}$ $c=c^{\frac{1}{2}}$

$\frac{10\pm 2}{2}=$ $x^2-10x+24=0$ $100-96$

$6;4$



3) $ATC + ABC$

$AOPTC$ – окр

$APC = 2ABC \Rightarrow$ т.к. $BAP = ABC$

AOC.

$\angle APC = \angle AOC$

$\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$