Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101874**

ID профиля: **852854**

Вариант 20

Чистовик №1.

Пусть x – разность арифм. прогрессии. По услов. $x > 0$ ...

$a_6 = a_1 + 5x$

$a_{11} = a_1 + 10x$

$$a_6 a_{11} = 50x^2 + 15x a_1 + a_1^2$$

~~$a_8 = a_1 +$~~ $a_8 = a_1 + 7x$

$a_9 = a_1 + 8x$

$$a_8 a_9 = 56x^2 + 15x a_1 + a_1^2$$

По услов.
$$\begin{cases} 50x^2 + 15xa_1 + a_1^2 > S + 15 \\ 56x^2 + 15xa_1 + a_1^2 < S + 39 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$56x^2 + 15xa_1 + a_1^2 + S + 15 < 50x^2 + 15xa_1 + a_1^2 + S + 39 \iff$$

$6x^2 < 24 \iff$

$x < 2$, поскольку все числа прогрессии целые

$x = 1$

1

$S = 5a_1 + 10x = 5a_1 + 10$

$$\begin{cases} 50 + 15a_1 + a_1^2 > 5a_1 + 10 + 15 & 1) \\ 56 + 15a_1 + a_1^2 < 5a_1 + 10 + 39 & 2) \end{cases}$$

Решим систему

Чистовик

1) $50+15a_1+a_1^2>5a_1+10+15 \Leftrightarrow$

$a_1^2+10a_1+25>0 \Leftrightarrow$

$(a_1+5)^2>0$ это означает, что $a_1 \neq -5$

2) $56+15a_1+a_1^2<5a_1+10+39 \Leftrightarrow$

$a_1^2+10a_1+7<0$

$D=100-28=72$

$\begin{cases} a_1<\dfrac{-10+2\sqrt{18}}{2} \\ a_1>\dfrac{-10-2\sqrt{18}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a_1<-5+\sqrt{18} \\ a_1>-5-\sqrt{18} \end{cases}$

Теперь выпишем все целые знач. a_1, не равн. -5 возможн.

②

$a_1=-5-4=-9$

$a_1=-5-3=-8$

$a_1=-5-2=-7$

$a_1=-5-1=-6$

$a_1=-5+1=-4$

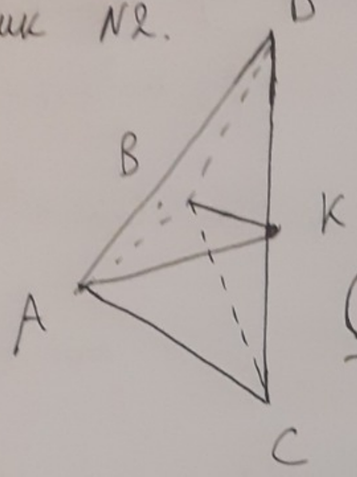
$a_1=-5+2=-3$

$a_1=-5+3=-2$

$a_1=-5+4=-1$

Ответ: $\{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Чистовик №2.



Проведём BK параллельно основанию цилиндра

Поскольку ~~точка A и B удале~~

AB = BD, AC = BC и CD паралл. $\boxed{(\text{см. } * \ \angle CKB = \angle CKA = 90)}$ оси цилиндра,

~~т.к. AB ∥ основ. ци~~

AB параллельно основанию цилиндра

~~AB~~ Значит пл-ть (ABK) параллельна основ. цилиндра,

значит ~~R цилиндра~~ радиус цилиндра равен радиусу окр-ти описанной около $\triangle ABK$, ~~пусть~~ обозначим его за r

$$\frac{AB}{\sin\angle ABK} = 2r \Rightarrow r = \frac{AB}{2\sin\angle ABK}$$

Наименьш. знач. r достигается, когда $\sin\angle ABK = 1$, значит $\triangle ABK$ прямоуг.

$\triangle ADC = \triangle BDC$ по 3 стор.

DC – общ.
~~AB~~
$AD = BD$
$AC = BC$

3

$\Downarrow$
$\angle ACD = \angle BCD$

~~△~~ тогда $\triangle ACK = \triangle BCK$ по 2 стор. и углу между ними

$AC = BC$
CK – общ.
$\angle ACK = \angle BCK$

$\Downarrow$
$AK = BK$ (*)

значит $\triangle ABK$ – р/б и прямоуг., $AB = 2$

$\Downarrow$

$AK = BK = \sqrt{2}$

чистовик

DC паралл. оси цилиндра, значит DC перп. основ. цилиндра,

значит $DC \perp (ABK)$

$\angle AKD = \angle BKD = \angle AKC = \angle BKC = 90$

Тогда по теор. Пифагора найдем DK и CK

$DK = \sqrt{AD^2 - AK^2} = \sqrt{62}$

$CK = \sqrt{AC^2 - AK^2} = \sqrt{47}$

$CD = \cancel{\sqrt{62} + 1.}\ CK + KD = \sqrt{47} + \sqrt{62}$ 4

Ответ: $CD = \sqrt{47} + \sqrt{62}$

№3 Чистовик

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 & 1) \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b;\ 13) & 2) \end{cases}$$

1) − ур-ние окр-ти с ~~внутр~~ внутр. частью с центром в т. $(a; b)$ радиуса $\sqrt{13}$

2) $a^2+b^2 \le \min(-4a-6b;\ 13) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le -4a-6b \\ a^2+b^2 \le 13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2+4a+b^2+6b \le 0 \\ a^2+b^2 \le 13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

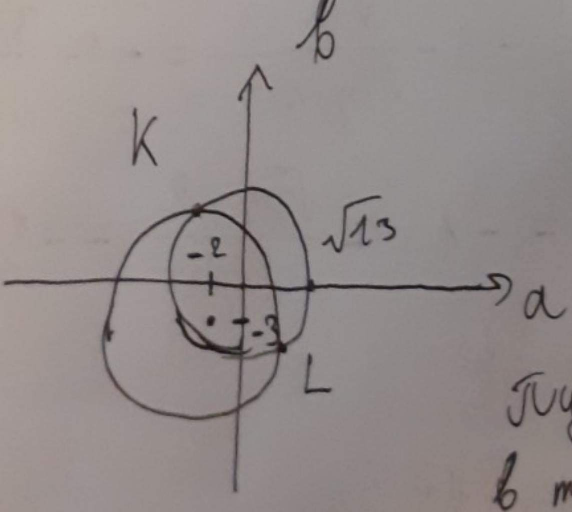
ур-ние

$$\begin{cases} (a+2)^2+(b+3)^2 \le 13 & 2.1) \\ a^2+b^2 \le 13 & 2.2) \end{cases}$$

В координатах $(a; b)$

2.1) − ур-ние окр-ти с внутр. частью с центром в т. $(-2; -3)$ радиуса $\sqrt{13}$

2.2) − ур-ние окр-ти с внутр. ~~част~~ частью с центром в $(0; 0)$ радиуса $\sqrt{13}$



5

Пусть окр-ти пересекаются в точках K и L

чистовик

Тогда $a \in$ ~~изменяется в пределах~~ [a-коорд. т. K ; a-коорд. т. L]

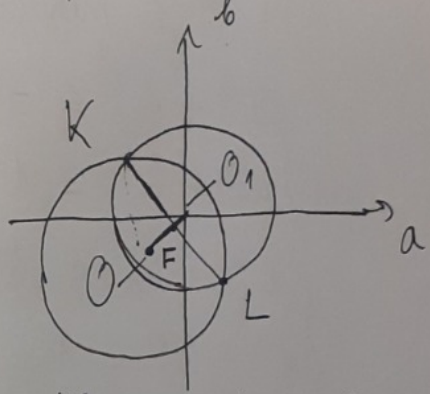
$b \in$ [b-коорд. т. L ; b-коорд. т. K]

Найдём ур-ние прямой KL

$$a^2+b^2-13=(a+2)^2+(b+3)^2-13 \iff$$

$$4a+6b+13=0$$

Поскольку радиусы окр-тей равны прямая KL равноудалена от центров окр-тей



Пусть O и O_1 - центры окр-тей, а F - т. пересеч. KL и OO_1

по теор. Пифагора $KF=\sqrt{OK^2-OF^2}=\sqrt{13-(1+2{,}25)}=$

$=\sqrt{9{,}75}=\frac{\sqrt{39}}{2}$

Угол наклона KL к оси a — $\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}\right)=\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)=$

$=\arccos\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)=\alpha$

a-коорд. т. K $\quad -1-KF\cdot\cos\alpha=-1-\frac{\sqrt{39}\cdot 3}{2\cdot\sqrt{13}}=-1-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

b-коорд. т. K $\quad -1{,}5+KF\cdot\sin\alpha=-1{,}5+\frac{\sqrt{39}\cdot 2}{2\cdot\sqrt{13}}=-1{,}5+\sqrt{3}$

a-коорд. т. L $\quad -1+KF\cdot\cos\alpha=-1+\frac{3\sqrt{3}}{2}$

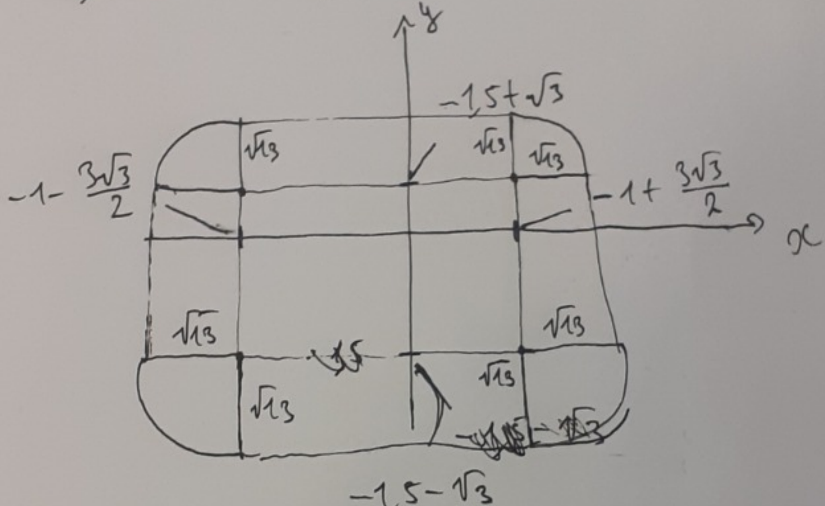
b-коорд. т. L $\quad -1{,}5-KF\cdot\sin\alpha=-1{,}5-\sqrt{3}$

Чистовик

тогда искомая фигура M – ~~...~~ это беск. множ-во окр-тей радиуса 13 с центрами в т. (a; b), где

$a \in [\cancel{-1-2}\ -1-\frac{3\sqrt{3}}{2}; -1+\frac{3\sqrt{3}}{2}]$

$b \in [-1{,}5-\sqrt{3}; -1{,}5+\sqrt{3}]$



Площадь фигуры M будет равна площади большого контура на рисунке

$$S = (-1{,}5+\sqrt{3}-(-1{,}5-\sqrt{3}))\left(-1+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\left(-1-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\right) +$$

$$+ 2\sqrt{13}(-1{,}5+\sqrt{3}-(-1{,}5-\sqrt{3})) + 2\sqrt{13}\left(-1+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\left(-1-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\right) +$$

$$+ \pi\cdot 13 = 2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3} + 2\sqrt{13}\cdot 2\sqrt{3} + 2\sqrt{13}\cdot 3\sqrt{3} +$$

$$+ 13\pi = 18 + 2\sqrt{13}\cdot 5\sqrt{3} + 13\pi = 18 + 10\sqrt{39} + 13\pi$$

7

Ответ: $S = 18 + 10\sqrt{39} + 13\pi$.

21101874 (U852854 M1297717)

$$(a+2)^2+(b+3)^2=a^2+b^2$$

$\cancel{a+2}$

$a^2+4a+4+b^2+6b+9\leq 13$

$a^2+b^2\leq 13$ $\qquad$ $4a+6b+13=0$

$-(4a+6b)\leq 13$

$4a+6b=0$

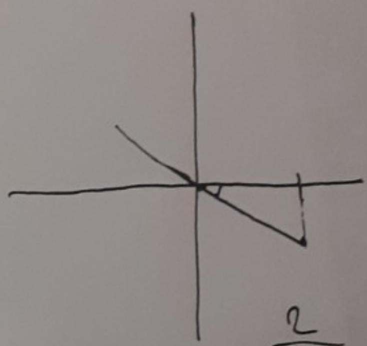
$-4a-6b\leq 13$

$b=-\frac{2}{3}a$

$6b+13\geq -4a$

$6b\geq -4a-13$

$b\geq -\frac{2}{3}a-\frac{13}{6}$



$-4a-6b\leq 13$

$\frac{2}{\sqrt{13}}$

$4a$

$-4a-6b$ ~~=~~ $-13=0$

$a^2+b^2-13 = -4a-6b-13=0$

$a^2+b^2+4a+6b=0$

$a_1 \dots + a_5 = S$

$a_n = (n-1)x + a_1$

$(5x+a_1)(10x+a_1) = 50x^2 + 15x a_1 + a_1^2 > S + 15$

$(7x+a_1)(8x+a_1) = 56x^2 + 15x a_1 + a_1^2 < S + 39$

$6x^2 < 24 \iff$

$-2 < x < 2$ $\qquad a_1 = \frac{-10+\sqrt{72}}{2} = -5+\sqrt{18}$

$0 < x < 2$ $\qquad a_1 = \frac{-10-\sqrt{72}}{2} = -5-\sqrt{18}$

$S = a_1 + a_1 + x \dots + a_1 + 4x = 5a_1 + 10x$

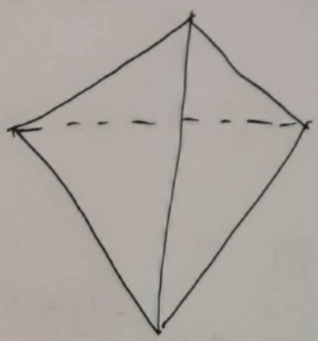
$$\begin{cases} 50x^2 + 15xa_1 + a_1^2 > 5a_1 + 15 + 15 \\ 56x^2 + 15xa_1 + a_1^2 < 5a_1 + 15 + 39 \end{cases} \iff$$

$a_1^2 + a_1(15x-5) >$

$x = 1$ $\qquad 50 + 15a_1 + a_1^2 > 5a_1 + 10 + 15$

ABF

$$\frac{AB}{\sin\angle AKB} = 2r \Rightarrow r = \frac{AB}{2\sin\angle AKB}$$



$$a^2+b^2 \le -4a-6b \Leftrightarrow$$

$$a^2+4a \quad +b^2+6b \le 0 \Leftrightarrow$$

$$a^2+4a+4 \quad +b^2+6b+9 \le 13 \Leftrightarrow$$

$CD > 6$

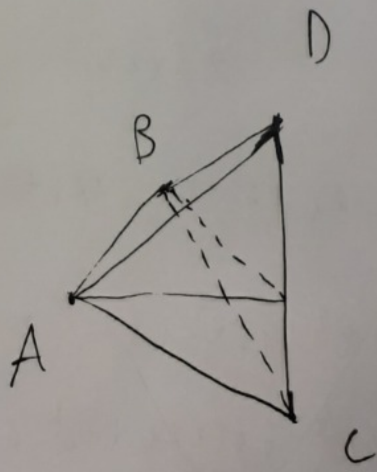
$CD < 10$

$$(a+2)+(b+3)^2 \le 13$$

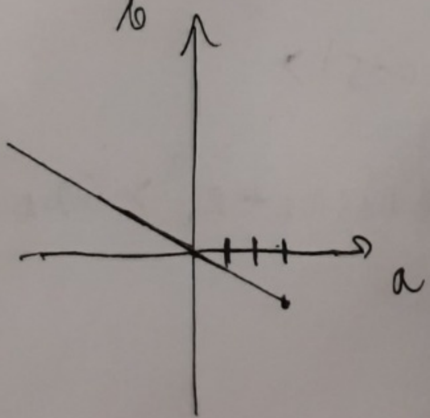
$$-4a-6b=0$$

$$-2a-3b=0$$

$$b=-\frac{2}{3}a$$



$$a^2+b^2 \le 13$$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101874**

ID профиля: **852854**

Вариант 20

Чистовик №4

$НОД(a; b; c) = 10 \Rightarrow \begin{cases} a \geq 10 \\ b \geq 10 \\ c \geq 10 \end{cases}$

$НОК(a; b; c) = 2^{17} \cdot 5^{16} \Rightarrow$ ~~наибольш. степень вхожд. 2 в разлож. a, b и~~

⇓

наиб. из степеней вхождения 2 в разлож. числа a, b и c это 17,

а наиб. из степеней вхождения 5 в разлож. чисел a, b и c это 16

~~Будь~~ ~~Запишем числа a, b и c~~

Пусть $a = 2^{a_2} \cdot 5^{a_5}$ $\quad a_2, a_5, b_2, b_5, c_2, c_5 \in N$

$b = 2^{b_2} \cdot 5^{b_5}$

$c = 2^{c_2} \cdot 5^{c_5}$

$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a_2 = 17 \\ b_2 = 17 \\ c_2 = 17 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a_5 = 16 \\ b_5 = 16 \\ c_5 = 16 \end{array}\right. \end{array}\right.$ а также $\left[\begin{array}{l} a_2 = 1 \\ a_5 = 1 \\ b_2 = 1 \\ b_5 = 1 \\ c_2 = 1 \\ c_5 = 1 \end{array}\right.$ т.к. $НОД(a; b; c) = 10$

Таким образом нам нужно выбрать 2 числа: 1 из $\{a_2; b_2; c_2\}$, другое из $\{a_5; b_5; c_5\}$, а далее выбрать 1 из оставш. чисел (которое будет равно 1)

Первый выбор осуществл. 9 способами

Теперь рассм. 2 выбор

1

21101874 (U852854 M1297718)

чистовик

если мы выберем $\left[\begin{array}{l} a_2=1 \\ b_2=1 \\ c_2=1 \end{array}\right.$ то ~~второй выбор~~ у нас ~~будет~~

будет ~~осуществляться~~ $17 \cdot 16 \cdot 16$ ~~способами~~ вариантов для опред. оставш. чисел

~~а если мы выберем а~~

если мы выберем $\left[\begin{array}{l} a_5=1 \\ b_5=1 \\ c_5=1 \end{array}\right.$ у нас будет $17 \cdot 17 \cdot 16$ для определения оставш. чисел

Поскольку нам важно, какое именно число мы примем за 1, то всего комбинаций из оставш. для второго выбора чисел будет $2 \cdot (17 \cdot 16 \cdot 16 + 17 \cdot 17 \cdot 16) = 2 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 33$

Значит всего сущ-ет $9 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 33$ троек $(a; b; c)$

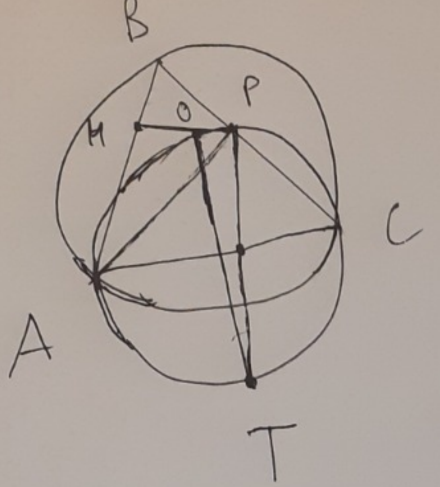
$9 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 33 = 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 33 = 161568$

Ответ: 161568 троек $(a; b; c)$

2

~~N~~ чистовик N6

а)



$\angle OCT = \angle OAT = 90°$

$\angle OCT + \angle OAT = 180°$

⇓

OCTA - впис., значит т. T лежит на окр-ти, описанной около AOC

$\angle OCT = 90 \Rightarrow OT$ - диаметр

Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle AOC = 2\alpha$, тогда и $\angle APC = 2\alpha$

$\angle APB = 180 - 2\alpha$ тогда $\angle BAP = \alpha \Rightarrow \Delta ABP$ - р/б

$AP = BP$

$\angle OPT = 90°$ (опир. на диаметр

O - т. пересеч. сер. перп.

поскольку ΔABP - р/б его мед. совп. с выс., а значит проходит через т. O

пусть PH - выс. ΔABP

$\angle PHA = 90°$; $\angle HPT = 90° \Rightarrow \angle PHA + \angle HPT = 180°$

значит $PT \parallel AB$, значит PK отсекает от ΔABC подобный ему ΔPKC

$\frac{CK}{KA} = \frac{S_{\Delta PKC}}{S_{\Delta PKA}} = \frac{4}{5} \Rightarrow$ ~~k =~~ $k_{подобия} = \frac{4}{9}$

3

~~$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta KPC}}$~~ $\frac{S_{\Delta KPC}}{S_{\Delta ABC}} = k^2 = \frac{16}{81} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{81}{16} \cdot 8 = 40{,}5$

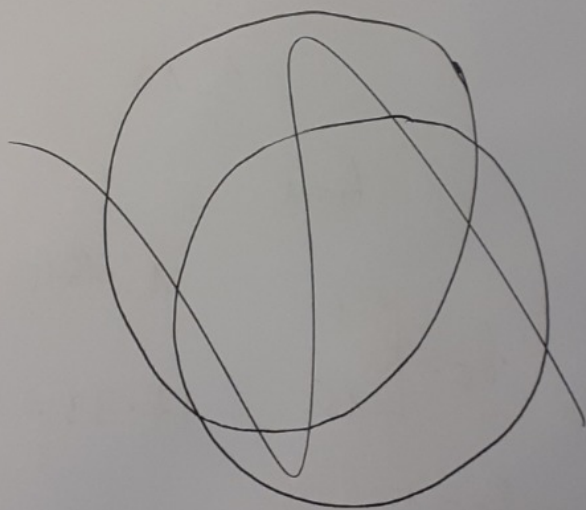
Ответ: $S_{\Delta ABC} = 40{,}5$.

21101874 (U852854 M1297718)

a_2, b_2, c_2

a_5, b_5, c_5

$3 \cdot 3$



$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(2x-8)}(x-4)^2$

НОД $(a; b; c) = 10$

НОК $(a; b; c) = 2^{17} \cdot 5^{16}$

$3 \cdot 5 \cdot 7 A$

$3, 4$

$2, 3, 6$

$2 \cdot 4 = 2 \cdot 4$

$a \vdots 10$

$6, 9$

$3 \cdot 18 = 6 \cdot 9$

$b \vdots 10$

$c \vdots 10$

$a_2 = 17$

$b_2 = 1$

$a_5 = 16$

$15 \cdot 16 \cdot 15$

$b_2 = \left[\begin{array}{l} 1 \\ \dots \\ 16 \end{array}\right.$

$b_5 = \left[\begin{array}{l} 1 \\ \dots \\ 15 \end{array}\right.$

$17 \cdot 33 = 510 + 51 = 561$

$b_5 = 1$

$288 \cdot 17 \cdot (17 \cdot 2 - 1) = \cancel{17^2 \cdot 2 \cdot 289} -$

$\times \begin{array}{r} 561 \\ 288 \end{array}$

$\begin{array}{r} 54 \\ 288 \\ \times\ 561 \\ \hline 288 \\ 1728 \\ 1440 \\ \hline 161568 \end{array}$

21101874 (U852854 M1297718)

$BL \cdot AB = BP \cdot BC$

$BP = AP$

$LC = BL$