Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101755**

ID профиля: **297416**

Вариант 20

Чистовик №1 Математика.

№1

$S = 5a_1 + 10q$; $q \geq 1$, $a_1 \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} a_6 a_{11} > S + 15 \\ a_8 a_9 < S + 39 \end{cases} \Rightarrow a_6 a_{11} > a_8 a_9 - 24$$

$$a_1^2 + 15a_1q + 50q^2 > a_1^2 + 15a_1q + 56q^2 - 24$$

$$q^2 < 4 \Rightarrow \left.\begin{matrix} q \in (-2;2) \\ q \geq 1 \\ q \in \mathbb{Z} \end{matrix}\right\} \Rightarrow q = 1$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 5a_1 + 50 > 5a_1 + 25 \\ a_1^2 + 8a_1 + 7a_1 + 56 < 5a_1 + 49 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases}$$

$(a_1+5)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -5$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 = 0$

$D = 100 - 28 = 72 \Rightarrow a_1 = \dfrac{-10 \pm 6\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left[\begin{matrix} a_1 = -5 - 3\sqrt{2} \\ a_1 = -5 + 3\sqrt{2} \end{matrix}\right. \Rightarrow$

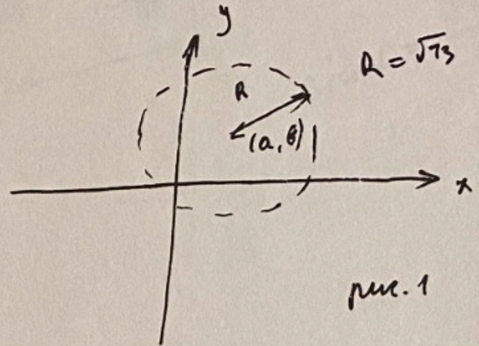
$$(a_1 + 5 + 3\sqrt{2})(a_1 + 5 - 3\sqrt{2}) < 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2}) \\ a_1 \neq -5 \\ a_1 \in \mathbb{Z} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} a_1 = -9 \\ a_1 = -8 \\ a_1 = -7 \\ a_1 = -6 \\ a_1 = -4 \\ a_1 = -3 \\ a_1 = -2 \\ a_1 = -1 \end{matrix}\right.$$

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

Чистовик 2. Математика

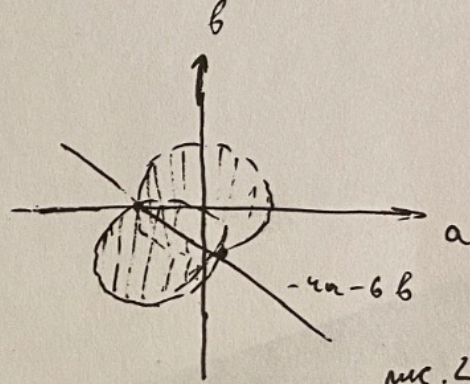
№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b,13)\end{cases}$$



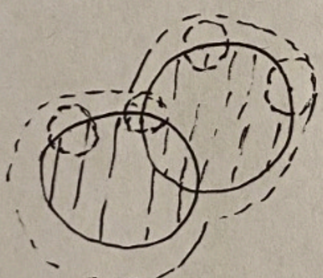
$$a^2+b^2\le \min(-4a-6b,13)$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-4a-6b<13\\ a^2+4a+b^2+6b\le 0 \Leftrightarrow (a+2)^2+(b+3)^2\end{cases}\\ \begin{cases}-4a-6b\ge 13\\ a^2+b^2\le 13\end{cases}\end{array}\right.$$

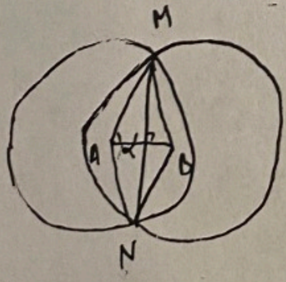


на рис. 2 изобразим все возможные (a,b)

$\forall$ точка (a,b) – центр окр-сти (рис. 1)



– вокруг каждой точки рис. 2 опишем окр-ть с радиусом $\sqrt{13}$ и получим искомую фигуру



$AB = 2\sqrt{13}$

$R = 2\sqrt{13}$

S_0 – ? (площадь пересечения кругов)

Площадь сектора: $S_Д = \dfrac{\alpha R^2}{2}$

$$S_0 = 2(S_Д - S_{\Delta MAN})\ ; \quad S_{\Delta MAN} = \frac{1}{2}R^2\sin\alpha$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}5\,AB}{R} = \frac{\sqrt{13}}{2\cdot 2\sqrt{13}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha = 2\arccos\frac{1}{4}$$

$$S_0 = 2R^2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin\alpha}{2}\right) = R^2(\alpha - \sin\alpha)$$

$$S = \pi R^2 + \pi R^2 - S_0 = 2\pi R^2 - R^2(\alpha - \sin\alpha) = R^2(2\pi - \alpha + \sin\alpha) =$$

$$= 4\cdot 13\left(2\pi - 2\arccos\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{15}}{8}\right) = \underline{104\pi - 104\arccos\frac{1}{4} + \frac{13\sqrt{15}}{2}}$$ (Ответ)

Черновик

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 = a_1+q+a_1+2q+a_1+3q+a_1+4q+a_1 = 5a_1+10q$

$q \geq 1$

$a_1 \in \mathbb{Z}$

$q \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} (a_1+5q)(a_1+10q) > 5a_1+10q+15 \\ (a_1+7q)(a_1+8q) < 5a_1+10q+39 \end{cases}$$

$2<4$

$(-9+7)(-9+8) <$

56

$-45+49$

$$\begin{cases} a^2+10aq+5aq+50q^2 > 5a+10q+15 \\ a^2+8aq+7aq+56q^2 < 5a+10q+39 \end{cases}$$

$(-1+7)(-1+8)$

$6 \cdot 7$

$42 < -5+10+39$

$a^2+15aq+50q^2 > X >$

$-50+10+39$

$a^2+15aq+56q^2 < X+24$

$(-10+7)(-10+8)$

$-3 \cdot -2$

$\cancel{a^2}+\cancel{15aq}+50q^2 > \cancel{a^2}+\cancel{15aq}+56q^2-24$

5

$1{,}3<\sqrt{2}<1{,}4$

$24 > 6q^2$

$1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5$

$4 > q^2 \Rightarrow q \in (-2;2) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} q=-1 \\ q=0 \\ q=1 \end{array}\right. \Rightarrow \underline{q=1}$

$q^2<4$

$q \geq 1$

$1{,}4 \cdot 3$

$4{,}2$

$$\begin{cases} a^2+10a+\cancel{5a}+50 > \cancel{5a}+25 \\ a^2+8a+7a+56 < 5a+49 \end{cases}$$

$(-10{,}2;\ 0{,}2)$

$$\begin{cases} a^2+10a+25>0 \\ a^2+10a+7<0 \end{cases}$$

$(a+5)^2>0 \Rightarrow a \neq -5$

-9
-8
-7
-6
-4
-3
-2
-1
10

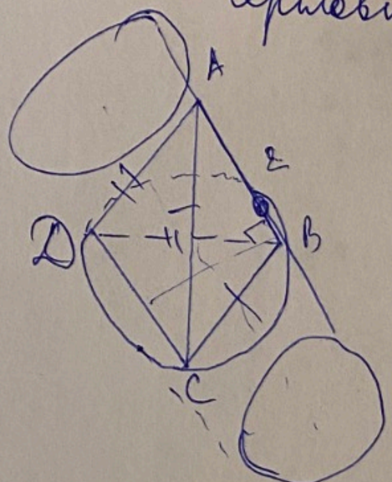
$-9{,}2;-0{,}8$

$4{,}2-5$

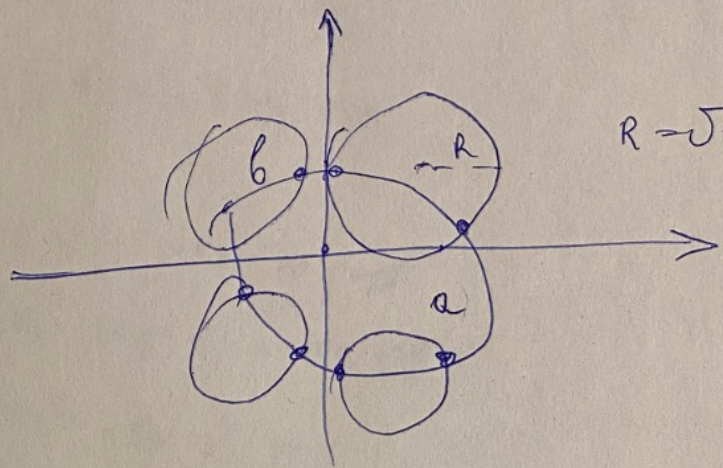
$D=100-28=72=9\cdot 8=9\cdot 4\cdot 2$

$a=\dfrac{-10\pm 6\sqrt{2}}{2} \Rightarrow -5\pm 3\sqrt{2} \Rightarrow a \in (-5-3\sqrt{2};-5+3\sqrt{2})$

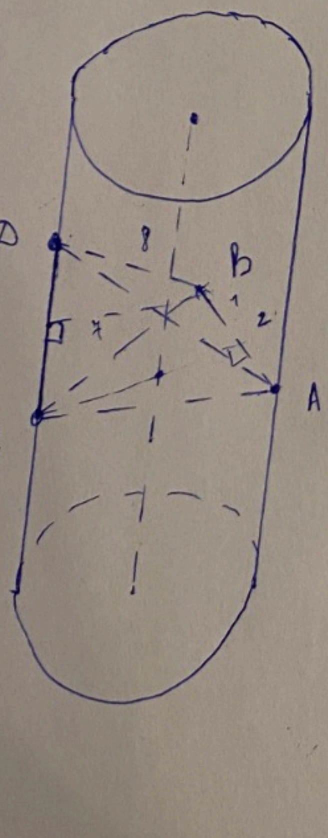
Черновик



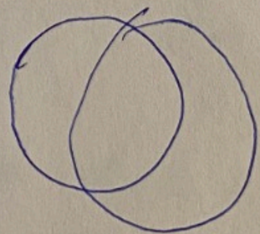
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b, 13) \end{cases}$$

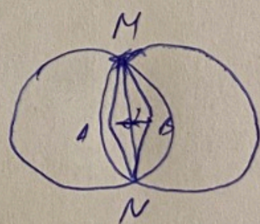


$R=\sqrt{13}$



$$S_{\text{сектора}}=\frac{\alpha R^2}{2}$$





$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{l}{2R}=\frac{1}{4}$$

$$\alpha=2\arccos\frac{1}{4}$$

$$S_{MNB}=\frac{1}{2}R^2\sin\alpha=$$

$$=\frac{13\sqrt{15}}{4}$$

$$S_{MANB}=\frac{13\sqrt{15}}{2}$$

$2R^2\alpha$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101755**

ID профиля: **297416**

Вариант 20

Чистовик

№5

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 2\log_{(2x-8)}(x-4) = 2a$ ОДЗ: $x > 5{,}2$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26) = \frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26) = \frac{1}{2ca} = \frac{1}{2}b$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = 2\log_{5x-26}(2x-8) = 2c$

$$\log_{(x-4)}(5x-26) = \frac{\log_{2x-8}(5x-26)}{\log_{2x-8}(x-4)} = \frac{1}{ca} = b$$

1) $\begin{cases} 2a = 2c \\ \frac{1}{2ca} - 2a = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a = c \\ 1 - 4c^3 = 2c^2 \end{cases}$ $\begin{cases} a = c \\ (2c-1)(2c^2+2c+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow c = \frac{1}{2}$

$\begin{cases} \log_{(5x-26)}(2x-8) = \frac{1}{2} \\ \log_{(2x-8)}(x-4) = \log_{5x-26} 2x-8 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{5x-26} = 2x-8$

$5x-26 = 4x^2 - 32x + 64$

$4x^2 - 37x + 90 = 0$

$D < 0$

корней нет

2) $\begin{cases} 2a = \frac{1}{2ca} \\ 2c - 2a = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} c = \frac{1}{4a^2} \\ \frac{1}{2a^2} - 2a = 1 \end{cases}$

$4a^3 - 2a^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ c = 1 \end{cases}$

$\log_{2x-8}(x-4) = \frac{1}{2}$

$\sqrt{2x+8} = x-4$

$2x - 8 = x^2 - 8x + 16$

$x^2 - 10x + 24 = 0$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = 4 \end{array} \right. \\ x > 5{,}2 \end{cases} \Rightarrow x = 6$

$\log_{5x-26}(2x-8) = 1$

$5x - 26 = 2x - 8$

$3x = 18$

$x = 6$

3) 3-ий случай аналогичен и симметричен 2, где $\begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ корней нет (из 1)

Ответ: 6

Чистовик

№4

$НОД(a, b, c) = 10$

$НОК(a, b, c) = 2^{17} \cdot 5^{16}$

1) пусть $a = 2 \cdot 5 \cdot 2^{x_a} 5^{y_a}$

$b = 2 \cdot 5 \cdot 2^{x_b} \cdot 5^{y_b}$

$c = 2 \cdot 5 \cdot 2^{x_c} \cdot 5^{y_c}$

2) если $НОД = 10 \Rightarrow$ один из $x_a, x_b, x_c = 0$ и один из $y_a, y_b, y_c = 0$

пусть $\begin{cases} a = 2 \cdot 5 \cdot 2^{x_a} \cdot 5^{y_a} \\ b = 2 \cdot 5 \cdot 2^{x_b} \\ c = 2 \cdot 5 \cdot 5^{y_c} \end{cases}$ $x_a \neq 0$; $y_a \neq 0$ (иначе повторение ситуаций)

3) из условия НОК $\Rightarrow$ а) $\max(x_a+1; x_b+1) = 17$

б) $\max(y_a+1; y_c+1) = 16$

а) если $x_a+1 = 17$, $x_a = 16 \Rightarrow x_b = 0, 1, 2, \dots, 15$ (16 случаев)

если $x_b+1 = x_a+1 = 17$ $x_a = 15 = x_b$ – 1 случай

если $x_b+1 = 17$ $x_b = 16 \Rightarrow x_a = 1, 2, \dots, 15$ (15 случаев)

всего 32 случая

б) анал-но (а)

если $y_a+1 = 16$ $y_a = 15 \Rightarrow y_c = 0, 1, 2 \dots 14$ – 15 случаев

если $y_c+1 = 16$ $y_c = 15 \Rightarrow y_a = 1, 2, \dots 14$ – 14 случаев

если $y_c+1 = y_a+1 = 16$ $y_c = y_a = 15$ – 1 случай

всего 30 случаев

Тогда из а и б $\Rightarrow$ всего комбинаций – $32 \cdot 30 = 960$

еще есть случаи когда $a = b \neq c$ и наоборот – таких случаев 36

Ответ: 996

21101755 (U297416 M1301090)

черновик

$НОД(a,b,c)=10$

$НОК(a,b,c)=2^{17}\cdot 5^{16} = 10^{16}\cdot 2$

$\left[\begin{array}{l} \cancel{a=10} \\ \cancel{b=20} \\ \cancel{c=90} \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ a -

$a=b\neq c$ - не может

$\left[\begin{array}{l} a=b\neq c \\ a\neq b=c \\ a=c\neq b \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} a=10 \\ b=10 \\ c=10 \end{array}\right.$

$10^{16}\cdot 2,\ 10^{16}\cdot 2$

$10^{16}\cdot 2$

$(10^{16}\cdot 2;\ 10^{16}\cdot 2;\ 10)$

10

$10^{16}\cdot 2 = \dfrac{10+10^{16}\cdot 2}{2}\cdot x$

$\dfrac{10^{16}\cdot 4}{10(1+10^{15})}$

I $10^{15}\cdot 4+4$

$20\cdot 2$

$4\cdot 5\cdot 2$

$2^3\cdot 5$

32
×30
960

$a=2\cdot 5\cdot 2^{x_a}\cdot 5^{y_a}$

$b=\dots$

$c=\dots$

a x, x, 10 ×3 ×4

30
40
60
70
~~80~~
90

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$, $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$, $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

1)

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26) \\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = \log_{(x-4)^2}(5x-26)+1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x \neq 5 \\ 2x-8>0 \\ 2x-8 \neq 1 \\ 5x-26>0 \\ 5x-26 \neq 1 \\ x>4 \end{array}\right. \qquad \begin{cases} x \neq 5 \\ x>4 \\ x \neq 4{,}5 \\ x>5{,}2 \\ x \neq 5{,}4 \\ x>4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x>5{,}2 \\ x \neq 5{,}4 \end{cases}$$

$$2\log_{2x-8}(x-4) - \frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26) = 0$$

$$2\log_{2x-8}(x-4) - \cancel{\frac{\quad}{2}}$$

$$\frac{2}{\log_{x-4} 2x-8} - \frac{\log_{x-4}(5x-26)}{2} = 0$$

$$4 - \log_{x-4}(5x-26)\log_{x-4} 2x-8 = 0$$

$$4 - \lg_{x-4}(5x-26)\left(\log_{x-4}2+1\right) = 0$$

$$2c = \frac{1}{2ca} \qquad \frac{1}{4c^2} = a$$

$$2c - 2a = 1 \qquad \begin{array}{l} a = 1 \\ c = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\log_{5x-26}(2x-8) = \frac{1}{2}$$

$$5x-26 = 4x2$$

21101755 (U297416 M1301090)