Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101752**

ID профиля: **855047**

Вариант 20

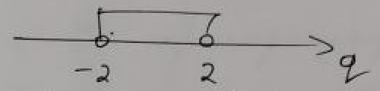
① Чистовик

Б1:

$$\begin{cases} a_6 \cdot a_{11} > S+15 \\ a_8 \cdot a_9 < S+39 \\ S = 5a_1 + 10q \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1q + 50q^2 > 5a_1 + 10q + 15 \\ a_1^2 + 15a_1q + 56q^2 < 5a_1 + 10q + 39 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (q^2 - 4) < 0$$



Т.к. $q \in \mathbb{Z} \Rightarrow q = 1$, прогрессия возрастающая.

$q = 1$:

$$\begin{cases} (a_1+5)(a_1+10) > 5a_1 + 10 + 15 \\ (a_1+7)(a_1+8) < 5a_1 + 10 + 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} D = 72 \\ a_1 = \dfrac{-10 \pm 2\sqrt{18}}{2} \end{array} \right|$$

$$\begin{cases} (a_1+5)^2 > 0 \\ (a_1 - (-5+\sqrt{18}))(a_1 - (-5-\sqrt{18})) < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_1 \in (-5-\sqrt{18}; -5+\sqrt{18})$$

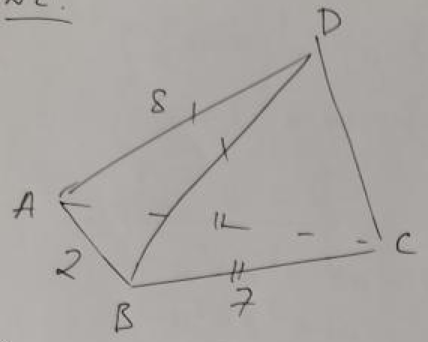
$$\Rightarrow a_n \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_1 \in \{-1; -2; -3; -4; -5; -6; -7; -8; -9\}$$

Ответ: : a_1 может принимать следующие значения:

$a_1 \in \{-1; -2; -3; -4; -5; -6; -7; -8; -9\}$.

② Чистовик

№2:



Дано: $AD=8$; $AB=2$; $BC=7$

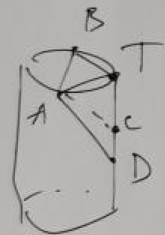
Найти: CD

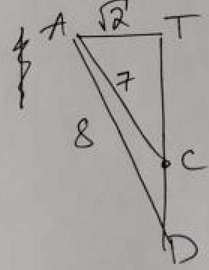
Решение: По т. о $3^х$ перпендикулярах $AB \perp CD$.

$\Rightarrow AB \parallel$ основанию цилиндра $\Rightarrow AB = d_{min} = 2$. $\Rightarrow$ Минимальный радиус $= 1$.

C и D видим как T

$BT = \sqrt{2} = AT$. Пусть $x = CD$





$x = \sqrt{8^2-2} - \sqrt{7^2-2} =$

$= \sqrt{62} - \sqrt{47}$

Ответ: $CD = \sqrt{62} - \sqrt{47}$.

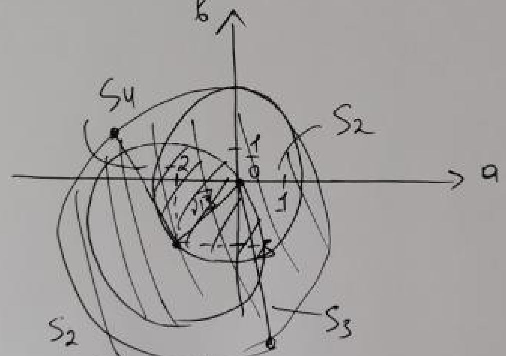
③ Чистовик

№3:
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b;\ 13)\quad(1)\end{cases}$$

Найдём a и b:

(1): $$\begin{cases}a^2+b^2+4a+6b\le 0\\ a^2+b^2\le 13\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a+2)^2+(b+3)^2\le 13\\ a^2+b^2\le 13\end{cases}$$



$S_M=S_1+S_2+S_3+S_4-S_5$

S_1 - часть окружности (120°) радиуса $2\sqrt{13}$ с центром в т. B. (−2; −3)

S_2 - часть окружности (120°) с центров в т. A (0;0)

S_3, S_4 - часть окружности радиуса $\sqrt{13}$, углом 60°.

$S_1=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot(2\sqrt{13})^2=S_2=\frac{1}{3}\pi\cdot 4\cdot 13$

$S_3=\frac{1}{6}\pi(\sqrt{13})^2=S_4=\frac{1}{6}\cdot\pi\cdot 13$

$S_5=2\cdot\frac{(\sqrt{13})^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{13\sqrt{3}}{2}\quad\Rightarrow S=13\pi-\frac{13\sqrt{3}}{2}$ Ответ: $13\pi-\frac{13\sqrt{3}}{2}$.

$\cancel{-5}-2\sqrt{5} < \cancel{-5}-\sqrt{18}$ 1

$-2\sqrt{5} < -\sqrt{18}$

$20 > 18$

Черновик I

$-5-2\sqrt{5}$, $-5-\sqrt{20}$, $-5+\sqrt{20}$, $-5+2\sqrt{5}$ a_1

$a_1 \in \varnothing$. При $q=1$.

$a_1 - ?$ $a_n \in \mathbb{Z}$

S1: $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

$$a_6 \cdot a_{11} > S+15$$

$$a_8 \cdot a_9 < S+39$$

$$(a_1+5q)\cdot(a_1+10q) > S+15$$

$$a_1^2 + 15a_1q + 50q^2 > S+15$$

$$S = a_1 + a_1 + q + a_1 + 2q + a_1 + 3q + a_1 + 4q =$$

$$= 5a_1 + 10q$$

$$a_1^2 + 15a_1q + 50q^2 > 5a_1 + 10q + 15$$

$$a_1^2 + (15q-5)a_1 + 50q^2 - 10q - 15 > 0$$

$$(a_1+7q)(a_1+8q) < S+39$$

$$\ominus\begin{cases} a_1^2 + 15a_1q + 56q^2 < 5a_1 + 10q + 39 \\ a_1^2 + 15a_1q + 50q^2 > 5a_1 + 10q + 15 \end{cases}$$

$$-6q^2 > -24$$

$$q^2 < 4 \Rightarrow (q^2-4) < 0$$

$+$ $-$ $+$ -2 2 q

$\boxed{q \in (-2; 2)}$ $q \in \mathbb{Z} \Rightarrow q \in \{\cancel{-1}; \cancel{0}; 1\}$.

1) $a_1^2 + 15a_1q + 50q^2 > S+15$

$(a_1-(-5\pm2\sqrt{5}))(a_1+(-5\pm2\sqrt{5})) > 0$

$+$ $-$ $+$ $-5-2\sqrt{5}$ $-5+2\sqrt{5}$ a_1

$\boxed{a_1 \in (-\infty; -5-2\sqrt{5}) \cup (-5+2\sqrt{5})}$

$a_1^2 + 15a_1 + 56 < 5a_1 + 10 + 39$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

$D = 100 - 28 = 72 = 3^2 \cdot 8$

$a_1 = \dfrac{-10 \pm 3\sqrt{8}}{2} =$

$= -5 \pm \sqrt{18}$

$+$ $-$ $+$ $-5-\sqrt{18}$ $-5+\sqrt{18}$ a_1

$\boxed{a_1 \in (-5-\sqrt{18}; -5+\sqrt{18})}$.

$$5a_1 + 10q = S \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (a_1+5q)(a_1+10q) > 5a_1 + 10q + 15 \\ (a_1+7q)(a_1+8q) < 5a_1 + 10q + 39 \end{cases}$$

$a_1^2 + 15a_1 + 50 > 5a_1 + 10 + 15$

$a_1^2 + 10a_1 + 5 > 0$

$D = 100 - 20 = 80$

$a_1 = \dfrac{-10 \pm 2\sqrt{20}}{2} = -5 \pm \sqrt{20}$.

$$a_1^2 + 15a_1\cdot(-1) + 50 > 5a_1 + 10\cdot(-1) + 15$$

$a_1^2 + 10a_1 + 45 > 0$ $D = 100 - 4\cdot45 < 0$. $a_1 = \dfrac{5\pm\sqrt{85}}{2}$

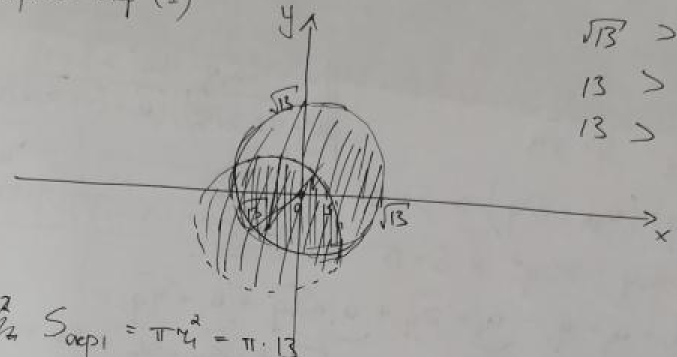
$a_1^2 > 5a_1 + 15$ $a_1^2 - 5a_1 - 15 > 0$. $D = 25 + 4\cdot15 =$

$= 25 + 60 = 85 = 5\cdot17$

№3: $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \quad (1) \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b,\ 13) \quad (2) \end{cases}$ Черновик ② $(x;y)$

S_M - ?

График: окр (1)



$\sqrt{13} > 1$

$13 > 1$

$13 > 4$

$S_{окр1} = \pi r_1^2 = \pi \cdot 13$

$S_{окр2} = \pi r_2^2 = \pi \cdot (-4a-6b)^2$ $\qquad 4a+6b \geqslant 13$

$S_1 = 13\pi \qquad S_2 = \pi(4a+6b)^2$

При $q=-1$: $a_1 \in \varnothing$

При $q=0$: 1) $a_1^2 \geqslant 5a_1+15$

$a_1^2-5a_1-15 > 0$

$D = 25+4\cdot 15 = 5(5+12) = 5\cdot 17$

$a_1 = \frac{5 \pm \sqrt{5\cdot 17}}{2}$

$\left(a_1 - \left(\frac{5+\sqrt{85}}{2}\right)\right)\left(a_1 - \left(\frac{5-\sqrt{85}}{2}\right)\right) > 0$

$+ \quad \frac{5-\sqrt{85}}{2} \quad - \quad \frac{5+\sqrt{85}}{2} \quad + \quad \to a_1$

2) $a_1^2 < 5a_1$

$\begin{cases} (a_1+5q)(a_1+10q) > 5a_1+10q+15 \\ (a_1+7q)(a_1+8q) < 5a_1+10q+39 \end{cases}$

$D = 100-28 = 72$ $\qquad D = 100-100 = 0$

$a_1 = \frac{-10 \pm 3\sqrt{8}}{2} = -5 \pm \sqrt{18}$ $\qquad \boxed{a_1 \ne -5}$

$\begin{cases} a_1^2+15a_1+50 > 5a_1+10+15 \\ a_1^2+15a_1+56 < 5a_1+10+39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+10a_1+25 > 0 \\ a_1^2+10a_1+7 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} (a_1+5)^2 > 0 \\ (a_1-(-5+\sqrt{18}))\cdot(a_1-(-5-\sqrt{18})) < 0 \end{cases}$

$+ \quad -5-\sqrt{18} \quad - \quad -5+\sqrt{18} \quad + \quad \to a_1$

Отв: $a_1 \in (-5-\sqrt{18};\ -5+\sqrt{18})$

№3: $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 & (1)\\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b,\ 13) & (2)\end{cases}$ Черновик ② $(x;y)$

S_M - ?

③ Черновик

$\begin{cases}(a_1+5q)(a_1+10q) > 5a_1+10q+15\\ (a_1+7q)(a_1+8q) < 5a_1+10q+39\end{cases}$

$-5-\sqrt{18} < -9$

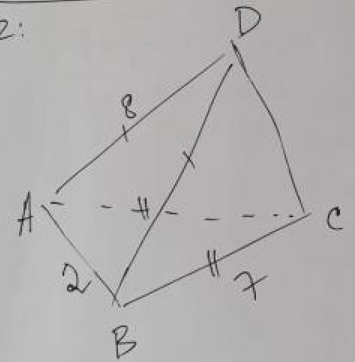
$-\sqrt{18} < -4$

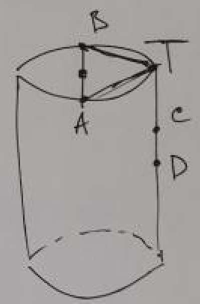
$18 > 16$

$\begin{cases}a_1^2+15a_1q+50q^2 > 5a_1+10q+15\\ a_1^2+15a_1q+56q^2 < 5a_1+10q+39\end{cases}$

$+\begin{cases}-a_1^2-15a_1q-50q^2 < -5a_1-10q-15\\ a_1^2+15a_1q+56q^2 < 5a_1+10q+39\end{cases}$

№2:





Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101752**

ID профиля: **855047**

Вариант 20

(1) Чистовик

№4:

$$\begin{cases} НОД(a, b, c) = 10 \\ НОК(a, b, c) = 2^{17} \cdot 5^{16} \end{cases}$$

кол-во (a, b, c) – ?

Пусть $a = 10 \cdot A$, $b = 10 \cdot B$, $c = 10 \cdot C$. Тогда:

$A \cdot B \cdot C = 2^{17} \cdot 5^{16}$, $НОД(A, B, C) = 1$.

1) два числа – $5^{k_{1,2}}$
одно число – 2^{16}

$(2^{16}, 5^0, 5^{15})$
$(2^{16}, 5^1, 5^{14})$
$(2^{16}, 5^2, 5^{13})$
....
$(2^{16}, 5^6, 5^7)$

$3! \cdot 7 = 42$

кол-во перестановок из $3^х$ элементов, все элементы разные

2) одно число – 5^{15}
два числа – $2^{k_{1,2}}$

$(5^{15}, 2^0, 2^{16})$
$(5^{15}, 2^1, 2^{15})$
$(5^{15}, 2^2, 2^{14})$
....
$(5^{15}, 2^7, 2^9)$

$8 \cdot 3! = 48$

$5^{15}, 2^8, 2^8$
равные

этот вариант даёт 3 перестановки, 5^{15} может стоять на $1^м$, $2^м$ или $3^м$ месте.

$42 + 48 + 3 =$
$= 93$

Ответ: 93 – кол-во троек (a, b, c)

2

Чистовик

№5:

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

При каких x два равны, а $3^е$ больше на 1?

Допустимо: $x > 5\frac{1}{5}$.

Пусть $y = x-4$: $\log_{\sqrt{2y}} y = 2\log_{2y} y = c$

$\log_{y^2}(5y-6) = \frac{1}{2}\log_y(5y-6) = a$

$\log_{\sqrt{5y-6}} 2y = 2\log_{5y-6} 2y = b$

$$a \cdot b = \frac{2\log_{(5y-6)} 2y}{2\log_{(5y-6)} y} = \log_y 2y = \frac{2}{c}$$

$\Rightarrow a \cdot b = \frac{2}{c}$

$$\Rightarrow \frac{\log_y(5y-6)}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\log_{(5y-6)} 2y = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\log_{2y} y}$$

$\Rightarrow y = 2 \Rightarrow$ $c = 1$ ~~...~~.

$a = 1$

$b = 2$ ~~...~~ Подставили и нашли.

$\Longrightarrow x = 6$

Ответ: При $x = 6$.

① Черновик

№4:

$$\begin{cases} НОД(a,b,c) = 10 = 2\cdot 5 \\ НОК(a,b,c) = 2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$$

кол-во(a,b,c) – ?

$a,b,c \in \mathbb{N}$

НОД – наибольший общий делитель.

НОК – наименьшее общее кратное.

$a \vdots 10$ $b \vdots 10$ $c \vdots 10$

$2^{17}\cdot 5^{16} \vdots a$

$\vdots b$

$\vdots c$

$3{,}2{,}1 = 3!$

$+\ 5^{15};\ \underbrace{2^{8}, 2^{8}}_{1} = 3$ пер.

$\boxed{7}$ $\boxed{8}$

3 2

$2^{17}\cdot 5^{16} \vdots 2$

$\vdots 4$

$\vdots 8$

$\dots \vdots 2^{17}$

$5^{16}\cdot 2^{17} \vdots 5$

$\vdots 25$

$\vdots 125$

$\dots \vdots 5^{16}$

$a_1 = a_2 \leq a_3$

$a_3 - a_1 = a_3 - a_2 = 1.$

№5:

1) $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$

2) $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$

3) $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

Допустимо:

$x-4>0$ $x>4$

$2x-8 > 0.$ $x>4$

$5x-26>0$ $x>\frac{26}{5}$

$\Rightarrow x > 5\frac{1}{5}$

$x-4 \neq 0$ $x\neq 4$

$5x-26>0$ $x>\frac{26}{5}$

$2x-8>0$ $x>4$

$(1)=(2)$:

$$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$$

$$2\log_{2x-8}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$$

$$\log_{2x-8}(x-4)^2 = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$$

$$\log_{2x-8}(x-4)^2 = \frac{1}{\log_{(5x-26)}(x-4)^2}$$

2

1) $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 2\log_{2(x-4)}(x-4) = \dfrac{2(}{\log_{(x-4)}2 + \log_{(x-4)}(x-4)} =$

$= \dfrac{2}{\log_{(x-4)}2+1} = \dfrac{2}{\frac{1}{\log_2(x-4)}+1} = \dfrac{2\log_2(x-4)}{1+\log_2(x-4)}$.

Черновик

2

2) $\log_{(x-4)^2}(5x-26) = \log_{x-4}\sqrt{5x-26}$

3) $\log_{\sqrt{5x-26}} 2(x-4) = \log_{\sqrt{5x-26}} 2 + \log_{\sqrt{5x-26}}(x-4) =$

$= \dfrac{1}{\log_2\sqrt{5x-26}} + \dfrac{1}{\log_{(x-4)}\sqrt{5x-26}} = \dfrac{\log_{(x-4)}\sqrt{5x-26}+\log_2\sqrt{5x-26}}{\log_2\sqrt{5x-26}\cdot\log_{x-4}\sqrt{5x-26}}$

$$\log_{x-4}\sqrt{5x-26} = \frac{2\log_2(x-4)}{1+\log_2(x-4)}$$

$$\log_{x-4}\sqrt{5x-26} + \log_{x-4}\sqrt{5x-26}\cdot\frac{1}{\log_{x-4}2} = 2\log_2(x-4)$$

$$\log_{x-4}\sqrt{5x-26} - \frac{2}{\log_{x-4}2} + \log_2\sqrt{5x-26} = 0.$$

$$\log_{x-4}\sqrt{5x-26} + \log_2\sqrt{5x-26} = \frac{2}{\log_{x-4}2}$$

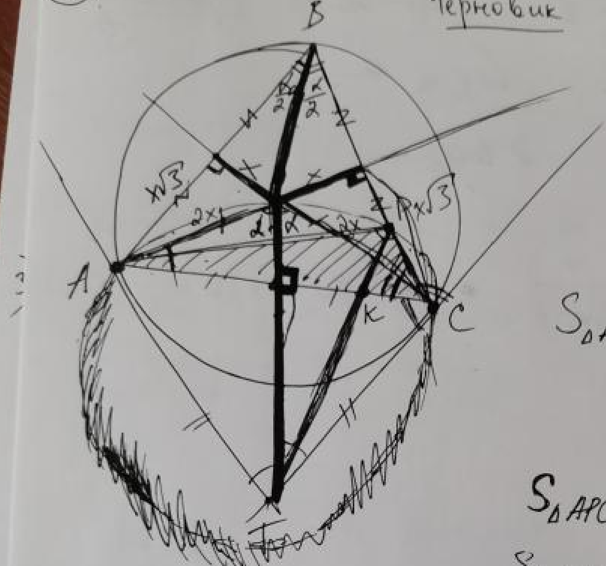
$$\frac{\log_{\sqrt{5x-26}} \cancel{x-4}\,2 + \log_{\sqrt{5x-26}}(\cancel{2}x-4)}{\log_{\sqrt{5x-26}}2\cdot\log_{\sqrt{5x-26}}(\cancel{2}x-4)} = \frac{2}{\log_{x-4}2}$$

$$\frac{\log_{\sqrt{5x-26}} 2(x-4)}{\log_{\sqrt{5x-26}}2\cdot\log_{\sqrt{5x-26}}(x-4)} = \frac{2}{\log_{(x-4)}2}$$

②

③

Черновик



$S_{\triangle APK} \quad S_{\triangle CPK}$

$\| \qquad\quad \|$

$10 \qquad\quad 8$

а) $S_{\triangle ABC}$ – ?

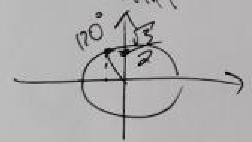
$S_{\triangle APC} = pr = \frac{1}{2} \sin\alpha \cdot a \cdot b =$

$= \frac{abc}{R} = \frac{1}{2} a h_a$

$S_{\triangle APC} = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cdot AB \cdot PC = 18$

$S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cdot R^2 = ?$

$= \frac{18 \cdot OC^2}{AB \cdot PC}$



$\frac{1}{2} \sin 120 = \frac{18}{AB \cdot PC} \Rightarrow AB \cdot PC = \frac{18 \cdot 4}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow S_1 = \frac{\cancel{18} \cdot OC^2}{\left(\frac{\cancel{18} \cdot 4}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{OC^2}{4\sqrt{3}}$

№5: $2x-8=A$ $\quad x-4=b$ $\quad 5x-26=c$ Черновик

4

$\log_{a^{1/2}} b, \quad \log_{b^2} c, \quad \log_{c^{1/2}} a.$

$2\log_a b, \quad \frac{1}{2}\log_b c, \quad 2\log_c a.$

$\frac{1}{2}\frac{1}{\log_c b} \cdot 2\log_c a =$

$\frac{\log_y(5y-6)}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\log_{(5y-6)} 2y = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\log_{2y} y}$

$= \frac{\log_{5y-6} 2y}{\log_{5y-6} y} = \frac{1}{\log_{2y} y}$

$\log_y 2y = \frac{1}{\log_{2y} y}$

$\log_{2y} y \cdot \log_y 2y = 1.$

$\cancel{\log_2^2 4 = 2}$ $\quad y^2 = 2y$

$y = 2.$