

Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101700**

ID профиля: **864059**

Вариант 20

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 13 & \leftarrow \text{гипер-мне окружности} \\ a^2 + b^2 \leq \min(-4a - 6b, 13) \end{cases}$$

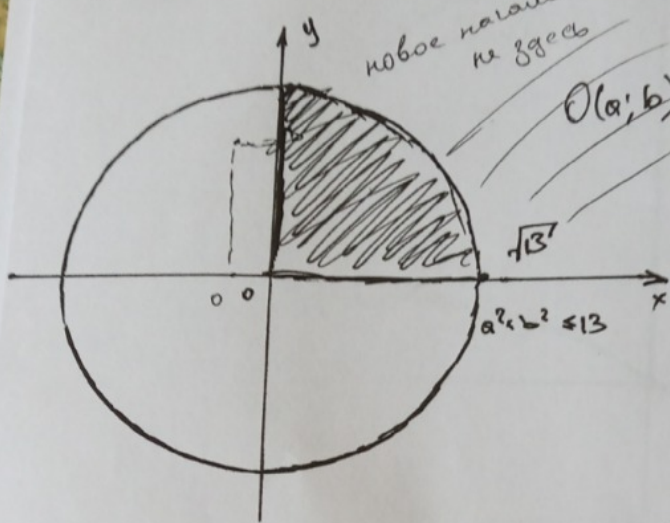
a - хор
b - хор

I a и b - положительные \Rightarrow не выполняем ($m, n, -4a - 6b < 0$)

$$I \ a^2 + b^2 \leq 13!$$

$$\Rightarrow \max(|a|, |b|) \leq \sqrt{13}$$

$(\sqrt{13} < 4)$



$$II \ a < 0; \ b > 0.$$

$$4 \ -4a \cdot 6b \leq 13.$$

$$a^2 + b^2 \leq -4a - 6b.$$

$$a^2 + 4a + b^2 + 6b \leq 0.$$

$$4|a| \geq a^2 + b^2 + 6b.$$

$$4|a| - a^2 \geq b^2 + 6b.$$

$$-4a - a^2 \geq 6b + b^2$$

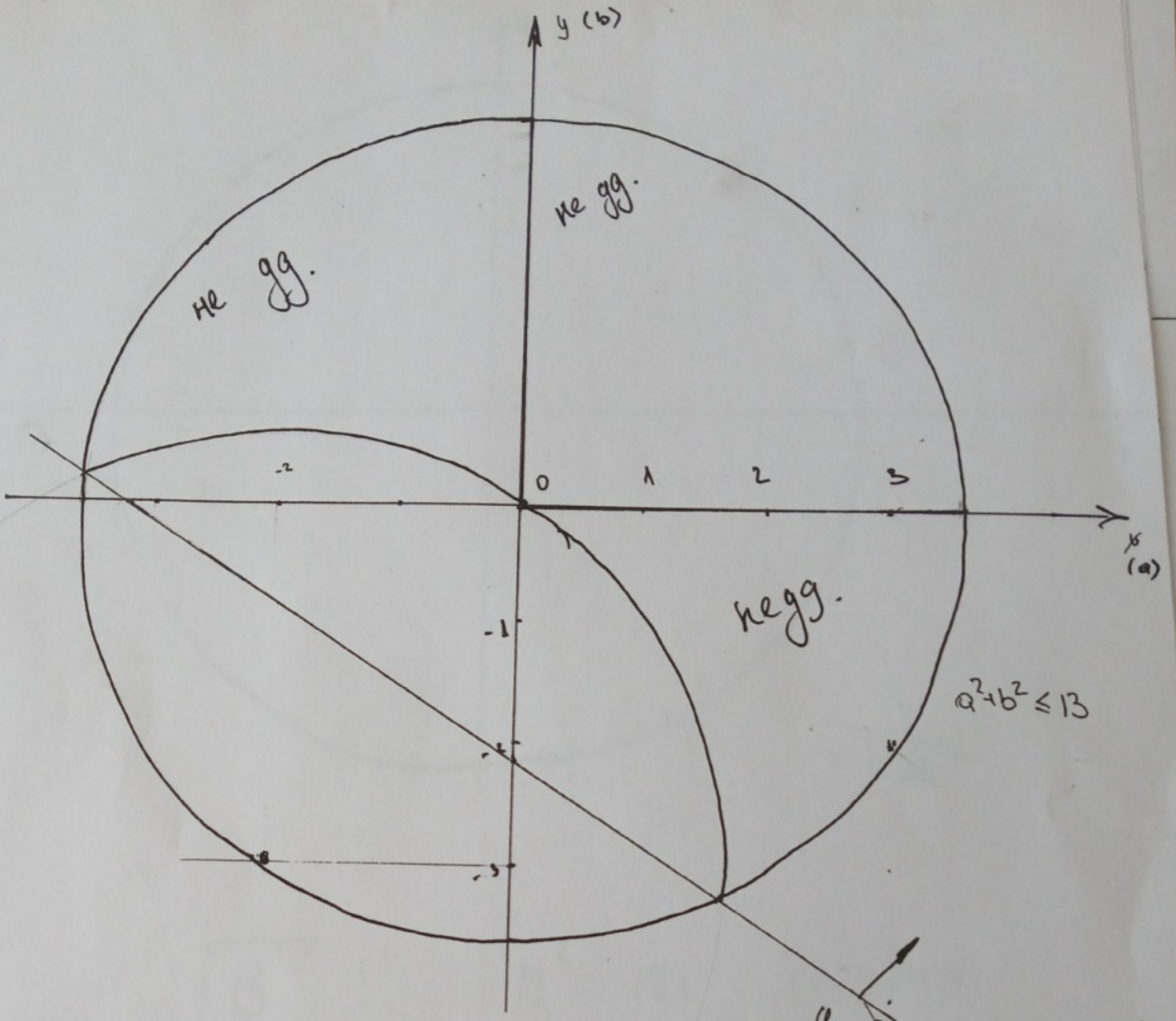
$$-a(4+a) \geq 6b + b^2$$

условие $a^2 + b^2 \leq \min(-4a - 6b, 13)$.

Если $-4a - 6b < 13$, то $6b + 13 > -4a$.

$$\Leftrightarrow 4a > -6b - 13$$

$$a > -1,5b + 3\frac{1}{4}$$



gün mənə bənzər prinsip:
 $a^2 + b^2 \leq -4a - 6b$

$$a^2 + 4a + b^2 + 6b \leq 0$$

$$a^2 + 4a + 4 + b^2 + 6b + 9 - 13 \leq 0$$

$$(a+2)^2 + (b+3)^2 \leq 13$$

O(-2, -3)

$$y = -\frac{2}{3}x - 2\frac{1}{6}$$

$$a > -1,5b + 3\frac{1}{4}$$

$$6b > -4a - 13$$

$$b > -\frac{2}{3}a - 2\frac{1}{6}$$

$$(a+2)^2 + (b+3)^2 - 13 = a^2 + b^2 - 13$$

$$a^2 + 4a + 4 + b^2 + 6b + 9 - 13 = a^2 + b^2 - 13$$

$$4a + 6b + 13 = 0$$

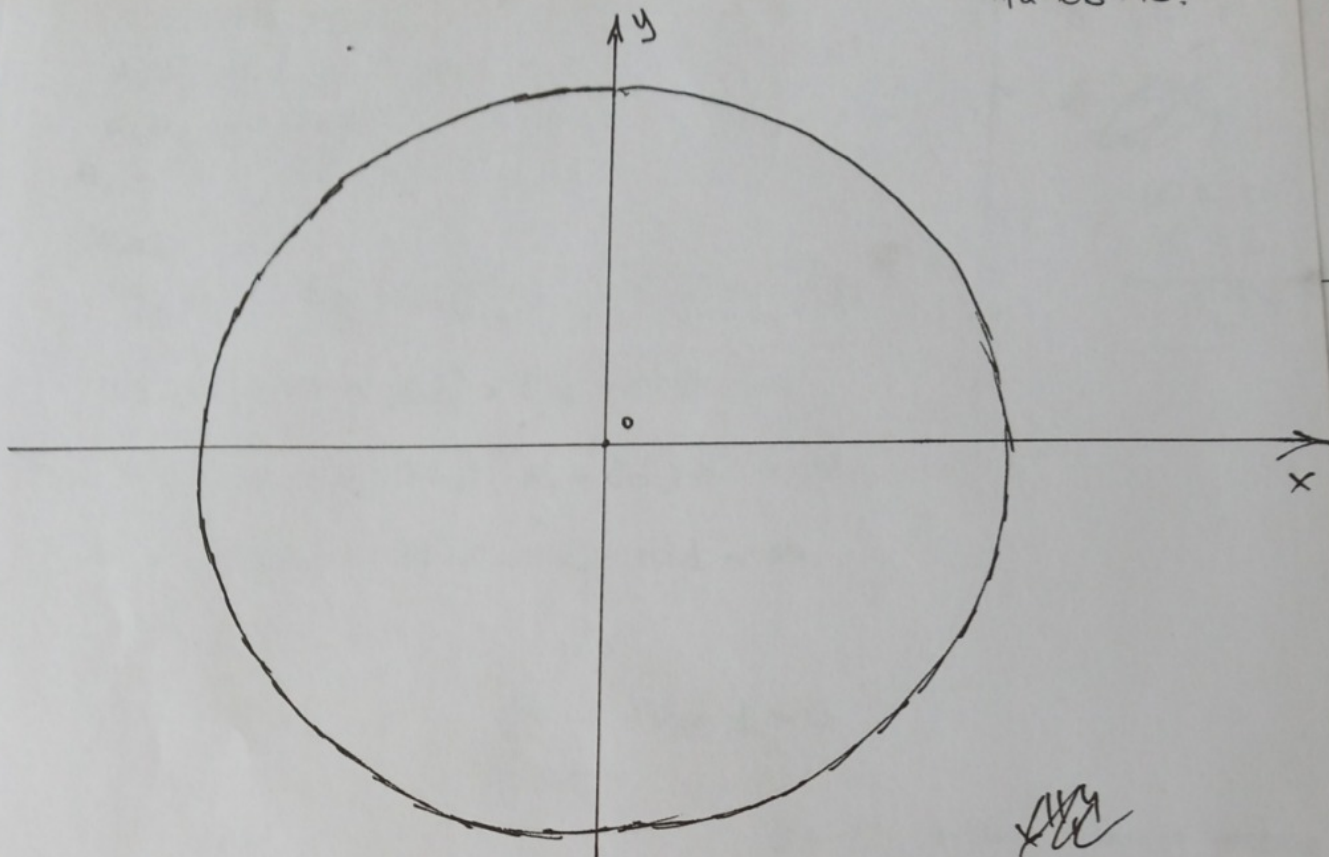
$$a^2 + b^2 - 13 = 0$$

$$a = \frac{-6b - 13}{4}$$

$$\left(\frac{-6b - 13}{4}\right)^2 + b^2 - 13 = 0$$

$$1. S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5a_3 = 10d$$

$$-4a - 6b = 13.$$



$$\sqrt{13} : \quad 11^2 = 121 \quad 12^2 = 144.$$

$$\begin{array}{r} > 113 \\ \times 113 \\ \hline 339 \\ 113 \\ 113 \\ \hline 12,769 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} > 114 \\ \times 114 \\ \hline 12769 \\ + 114 \\ \hline 12883 \\ + 113 \\ \hline 12996 \end{array}$$

$$40^2 = 1600$$

$$35^2 = 12,25$$

$$36^2 = 1296$$

$$\sqrt{13} \approx 3,6.$$

$$\begin{array}{r} > 35 \\ \times 35 \\ \hline 125 \\ 105 \\ \hline 12,25 \\ + 36 \\ \times 36 \\ \hline 216 \\ 100 \\ \hline 1296 \\ + 36 \\ \hline 1260 \end{array}$$

1. $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5a_1 + 10d$.
 Geometrische Reihe,
 $a_1 < a_n \rightarrow S < 15$
 $a_1 a_5 < S + 39$.
 $a_1 = ?$

Wahr - d.

i. $a_6 a_{11} = (a_1 + 5d)(a_1 + 10d) > S + 15$.

$a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2 > 5a_1 + 100d + 15$.

ii. $a_8 a_9 = (a_1 + 7d)(a_1 + 8d) < S + 39$.

$a_1^2 + 150a_1 d + 56d^2 < 5a_1 + 100d + 39$.

$24 > 6d^2 > 0$

$$\begin{aligned} 4 > d^2 > 0 \\ 2 > d > -2 \\ d \neq 0. \end{aligned}$$

$d > 0 \Rightarrow 2 > d > 0$
 (Bsp. 1.1)

$\Rightarrow d = 1$. m.h. geometrische Reihe.

1. $(a_1 + 5)(a_1 + 10) > 5a_1 + 100 + 15$.

~~$a_1^2 + 150a_1 + 50 > 5a_1 + 25$~~

$a_1^2 + 100a_1 + 25 > 0$.

$(a_1 + 5)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -5$

2. $(a_1 + 7)(a_1 + 8) < 5a_1 + 100 + 39$.

$a_1 + 150a_1 + 56 < 5a_1 + 100$

$8,1 + 100a_1 + 7 < 0$.

$(a_1 + 2)(a_1 + 5) < 0$.

~~$a_1 \in (-5, -2)$~~

$6 \cdot |a_1| =$
 $\frac{1000}{8,146} = 1,54$

$\Rightarrow = 100 - 4 \cdot 9 =$
 $= 92 \cdot \frac{-10 \pm \sqrt{92}}{2}$
 $a_1 = \frac{-10 - \sqrt{92}}{2}$

$\sqrt{92} = 6\sqrt{2} =$
 $\approx 6 \cdot 1,41 =$
 $\approx 8,64$

$8,64 - 10 =$

$\frac{144}{864}$

N2.



ММММММММММ

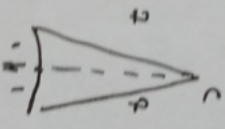
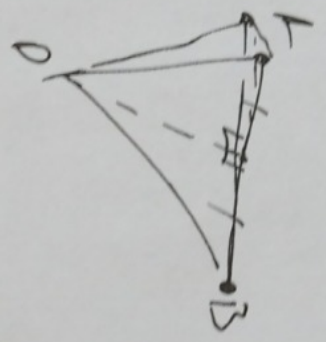
Ерпробур

ММММММММММ

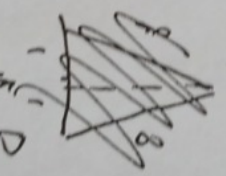
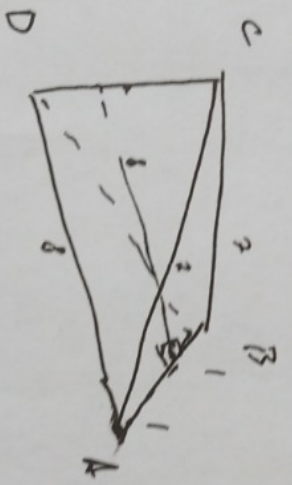
$AC = CB$

$AD = DB$

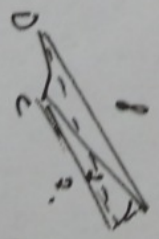
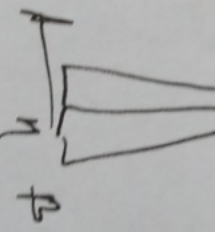
Pr - HОrуmе Kеrуmа, gаmаngрa



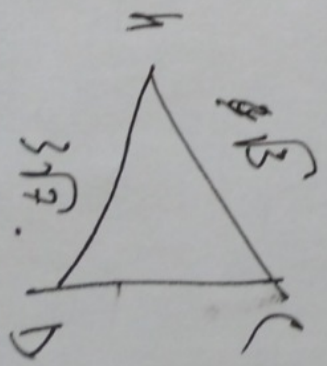
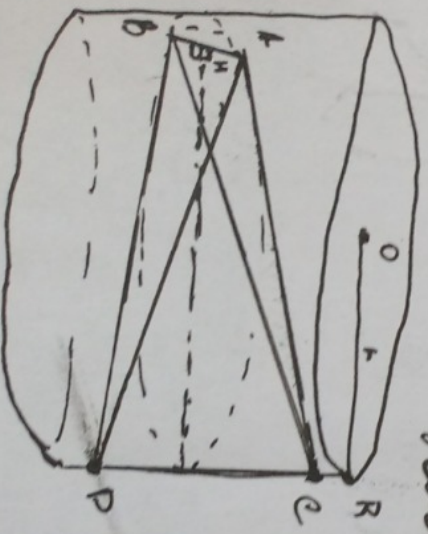
$CH = \sqrt{48} = 8\sqrt{3}$



$DH = \sqrt{68} = 8\sqrt{2}$



Brueмuу, smо mн pаgуgе gуmаngрa Kе fоrуmе CH.



Числовик

№1. Пусть шаг арифметической прогрессии - d .

Заметим, что d - натуральное число, т.к. арифм. прогрессия состоит из целых чисел и возрастает.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

$$S = a_1 + \dots + a_5 = 5a_1 + 10d.$$

$$\Downarrow \quad a_6 a_{11} = (a_1 + 5d)(a_1 + 10d) = a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2 > S + 15.$$

$$a_8 a_8 = (a_1 + 8d)(a_1 + 9d) = a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2 < S + 39.$$

$$a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2 > S + 15$$

$$S + 39 > a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2 \quad | (+) \text{ (сложим обе части)}$$

$$24 > 6d^2$$

$$4 > d^2 \Rightarrow 2 > d > 0 \Rightarrow d = 1.$$

$$\text{Тогда } a_6 a_{11} = (a_1 + 5)(a_1 + 10) = a_1^2 + 15a_1 + 50 > 5a_1 + 10 + 15$$

$$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$$

$$(a_1 + 5)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -5.$$

$$a_8 a_8 = a_1^2 + 15a_1 + 56 < 5a_1 + 10 + 39$$

$$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$$

Решим уравнение $a_1^2 + 10a_1 + 7 = 0$!

$$D = 100 - 28 = 72.$$

$$\sqrt{72} = 6\sqrt{2} \approx 8,46$$

$$\left[a_1 \approx \frac{-10 + 8,46}{2} \right.$$

$$\left. a_1 \approx \frac{-1,54}{2} = -0,77 \right.$$

$$\left[a_1 \approx \frac{-10 - 8,46}{2} \right.$$

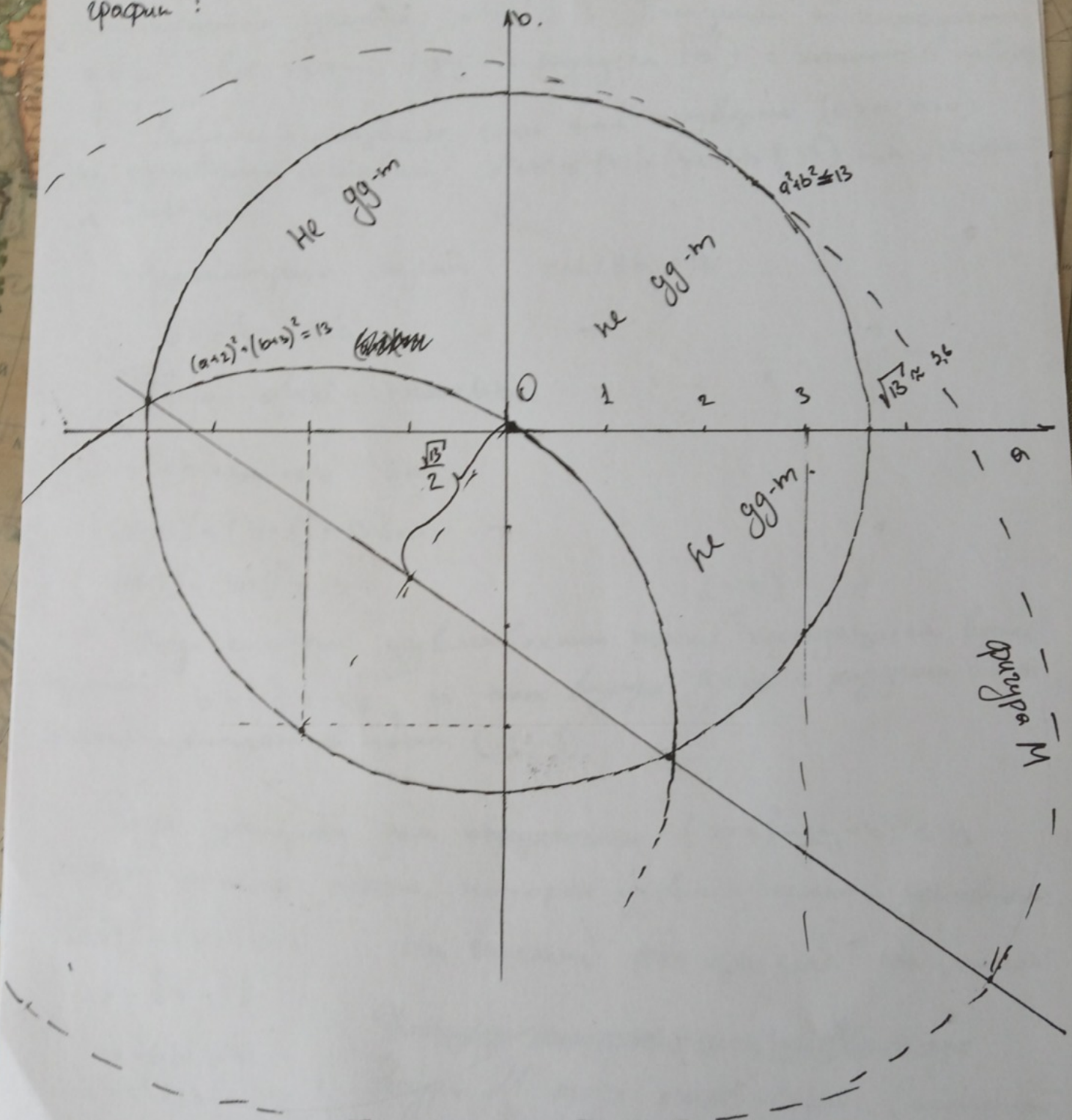
$$\left. a_1 \approx \frac{-18,46}{2} = -9,23. \right.$$

$$a_1 \in (-9,23; -0,77) ; a_1 \neq -5 \text{ и } a_1 \text{ целое} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1.$$

Числовна

13 (продржето)
срфин :



Фигура М

Коиштогь такав фигура будет составиет $(\frac{13\sqrt{13}}{3} - \frac{13\sqrt{3}}{2}) \cdot 5$

Числовик

№3. Заметим, что в любом углу (подходящем) соблюдается условие $a^2 + b^2 \leq 13$. Построим на плоскости aOb все точки (круг с радиусом $\sqrt{13}$) с началом в т. $(0;0)$.

Заметим также, что та же четверть ($a > 0; b > 0$) не удовлетворяет условию $a^2 + b^2 \leq \min(4a - 6b, 13)$, т.к. $-4a - 6b < 0$, а $a^2 + b^2 > 0$.

Рассмотрим угол $-4a - 6b < 13$:

$$b > -\frac{2}{3}a - 2\frac{1}{6}$$

Тогда $a^2 + b^2 \leq -4a - 6b$

$$a^2 + b^2 + 4a + 6b \leq 0,$$

$$(a+2)^2 + (b+3)^2 - 13 \leq 0.$$

$$(a+2)^2 + (b+3)^2 \leq 13.$$

$(a; b)$

Тогда системы удовлетворяют точки, находящиеся выше прямой $b = -\frac{2}{3}a - 2\frac{1}{6}$ и ~~также~~ внутри круга с радиусом $\sqrt{13}$ и ~~центром~~ центром в точке $(-2; -3)$.

Тогда центры для окружности $(x+a)^2 + (y+b)^2 \leq 13$ могут быть точки, которые удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} (a+2)^2 + (b+3)^2 \leq 13 \\ b > -\frac{2}{3}a - 2\frac{1}{6} \\ -4a - 6b \geq 13 \\ a^2 + b^2 \leq 13 \end{cases}$$

На графике это показано как "лимон"

~~Фигура M тогда тоже будет "лимоном"~~
Фигура M тогда тоже будет "лимоном"

(т.к. подходящие точки - точки, расположенные не ближе чем $\sqrt{13}$ от угловых точек (a, b)).

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101700**

ID профиля: **864059**

Вариант 20

21101700 (U864059 M1297610)

$$1; 2^{16} \cdot 5^k; 2^i \cdot 5^{15}; 0 \leq k \leq 14.$$

$$\begin{aligned} & 1; 2^n \cdot 5^{15}; 2^{16} \cdot 5^j \\ & 1; 2^{16} \cdot 5^{15}; 2^i \cdot 5^j \\ & 1; 2^n \cdot 5^k; 2^{16} \cdot 5^{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 17 \cdot 16 = 15 \cdot 16 = 17 \cdot 30 = \\ & + 17 \cdot 30 = 15 \cdot 15 = - \\ & = 17 \cdot 80 = 15 \cdot 81 \\ & = 17 \cdot 96 + 15 \cdot 31 = \\ & = 1292 + 465 = \\ & = 1757 \\ & \frac{1757}{2020} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2^1; 2^{16} \cdot 5^k; 5^{15} \\ & 2^1; 2^{16} \cdot 5^{16}; 5^k \\ & \frac{1757}{2020} \end{aligned}$$

$$15 \cdot 15 = 15 \cdot 15 = 2.$$

$$\begin{aligned} & 2^{16}; 2^n \cdot 5^k; 5^{15} \\ & 2^{16}; 2^n \cdot 5^{16}; 5^k \\ & 2^{16}; 2^{16} \cdot 5^k; 5^{15} \\ & 2^{16}; 2^{16} \cdot 5^{15}; 5^k \end{aligned}$$

$$(16 \cdot 15 + 15 \cdot 16 + 15 + 15) \cdot 2 = 465.$$

$$I = \sqrt{11}$$

$$(x-4)^2 = 5x-26$$

$$\sqrt{5x-26} = 2x-8$$

$$\begin{cases} x=6 \\ x=7 \end{cases}$$

6 корней.

$$\sqrt{5x-26} = 2x-8$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

3

$$I = \sqrt{11}$$

$$\sqrt{2x-8} = x-4$$

$$\sqrt{5x-26} = 2x-8$$

$$2x-8 = (x-4)^2$$

$$(x-4-2)(x-4) = 0$$

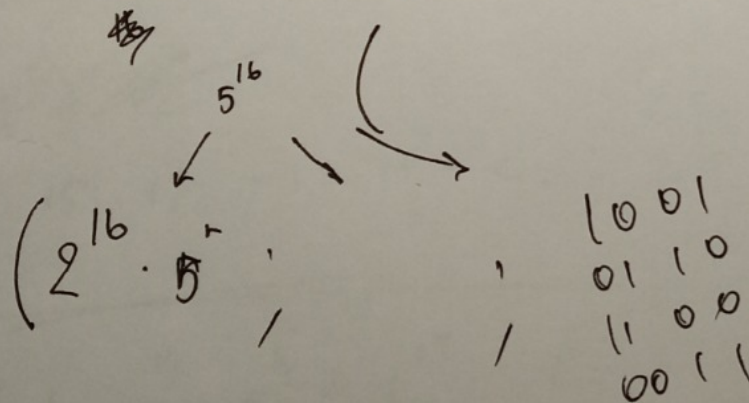
$$x=6 \quad (\text{не кор.})$$

$$x=4 \quad (\text{не 6 кор.})$$

~~(a, b, c) и (r, i, j)~~ (n, i, j) и (j, i, r) - разное.

~~Рассмотрим~~ Рассмотрим со стороны P_a .

I. Пусть $P_a = 2^{16}$
 $P_b = 5^{16}$



~~хорошо~~

~~хорошо~~

$$1 ; 2^{16} \cdot 5^k ; 5^{15} \cdot 2^j$$

$$15 \cdot 16 =$$

$$1 ; 2^n \cdot 5^k ; 5^{15} \cdot 2^{16} = 17 \cdot 16$$

21101700 (0864059 M127610)

11. $HOD(a, b, c) = 10$

$HOK(a, b, c) = 2^{19} \cdot 5^{16} \Rightarrow a, b, c$ соизмеримы
 $2 = \text{max } a$
 $5 = \text{max } c$

$a = 2 \cdot 5 \cdot P_a$
 $b = 2 \cdot 5 \cdot P_b$
 $c = 2 \cdot 5 \cdot P_c$

P_a, P_b, P_c взаимнопросты

~~P_a, P_b, P_c взаимнопросты~~ P_a, P_b, P_c взаимнопросты

Пусть P_a соизмерим с $\Rightarrow P_b$ (не взаимно соизмеримы)
 соизмеримы только 2-ми

$a = 10 \cdot 2^{16}$
 $b = 10 \cdot 2^7$

$\frac{10}{2^7} \cdot \frac{2^{16}}{2^7} = \frac{10 \cdot 2^9}{2^{14}}$

$HOK(P_a; P_b; P_c) = 2^{16} \cdot 5^{15}$, причем $HOD(P_a; P_b; P_c) = 1$.

~~$P_a = 1$~~
 ~~$P_b = 5^{15}$~~
 ~~$P_c = 2^{16}$~~

$P_b = 5^n, 2^k, 0 < n < 15$
 $P_c = 2^{16} \Rightarrow 17 \cdot 16 = 272$ (применяя)
 $P_b = 2^{16} \Rightarrow 14 \cdot 17$ (применяя)
 $P_a = 5^{15} \cdot 2^r, 0 \leq r \leq 16$

$P_c = 2^n, 2^k, 0 < n < 16$

$P_b = 5^n \Rightarrow 15 \cdot 16$ (применяя)

$P_c = 2^{16} \cdot 5^r, 0 \leq r \leq 16$

$P_a = 2^n, 2^k, 0 < n < 16$

$P_b = 5^k, 2^l, 0 < k < 15$

$P_c = 2^{16} \cdot 5^r$

$\Rightarrow 15 \cdot 14$ (применяя)

№5 (продолжение)

Чистовик

$$(II) - (III)$$

$$\sqrt{(x-4)^2} = 5x-26$$

$$\sqrt{5x-26} = 2x-8$$

$$\begin{cases} x=6 \\ x=7 \end{cases}$$

$$\sqrt{5x-26} = 2x-8$$

Заметим, что 6 и 7 не удовлетворяют нижней дробной

ответ: 6.

Стр. 4

№5 Пусть $\sqrt{2x-8} = a$; $x-4 = b$; $\sqrt{5x-26} = c$. Именован

Тогда три ища стоят машины:

(I) $\log_a b$

(II) $\log_b c^2$

(III) $\log_c a^2$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x-8 \geq 0 \\ 2x-8 \neq 1 \\ x-4 > 0 \\ (x-4)^2 \neq 1 \\ 5x-26 \geq 0 \\ 5x-26 \neq 1. \end{cases}$

Перемножим их. (ни одно из них не равно 0, т.к. $x \neq 8$; $\sqrt{5x-26} \neq 1$; $\sqrt{2x-8} \neq 1$. (из ОДЗ)).

$$\log_a b \cdot \log_b c^2 \cdot \log_c a^2 = \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a^2 = \log_a b \cdot \log_b a^2 = 2 \log_b a \cdot \log_a b = 2.$$

Пусть два из ищ равны i , третье равно $i+1$:

$$i^2(i+1) = 2,$$

$$i^3 + i^2 - 2 = 0.$$

$$(i-1)(i^2 + 2i + 2) = 0.$$

Единственной корень - 1.

Заметим, что если $\log_j k = 1$, то $j = k$.

Переберем варианты:

(I) = (II) = 1:

$$\begin{cases} \sqrt{2x-8} = x-4 \\ (x-4)^2 = 5x-26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2x-8} = x-4 \\ x^2 - 13x + 42 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ x = 7 \end{cases}$$

$$\sqrt{2x-8} = x-4$$

(I) = (III)

$$\begin{cases} \sqrt{2x-8} = x-4 \\ \sqrt{5x-26} = 2x-8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-8 = (x-4)^2 \\ \sqrt{5x-26} = 2x-8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6)(x-4) = 0 \\ \sqrt{5x-26} = 2x-8 \end{cases}$$

(т.к. задано ОДЗ, то мы можем возводить в квадрат)

входит в

и не ~~яв.~~ ОДЗ; б не уг. вторую условию.

Заметим, что 6 не удовлетворяет нижней условию, т.к. $\sqrt{6} \neq 3$, а 7 удовлетворяет, при этом (III) = 2.

стр. 3

№4. (варианты меню не переиспользуются)

I $P_a; P_b; P_c$

$$1; 2^{16 \cdot 5^h}; 2^i \cdot 5^{15}$$

$$1; 2^n \cdot 5^{15}; 2^{16} \cdot 5^j$$

$$1; 2^{16} \cdot 5^{15}; 2^i \cdot 5^j$$

$$1; 2^n \cdot 5^k; 2^{16} \cdot 5^{15}$$

~~$$1; 2^{16} \cdot 5^{15}; 2^i \cdot 5^j$$~~

$$17 \cdot 16 \cdot 4 - 3$$

II $2^{16}; 2^n \cdot 5^k; 5^{15}$

$$2^{16}; 2^n \cdot 5^{15}; 5^k$$

~~$$2^{16}; 2^n \cdot 5^{15}; 5^k$$~~

(оставшиеся - пункты перестановки P_b и P_c)

$$\Rightarrow (16 \cdot 17 + 16 \cdot 17) \cdot 2 - 3$$

III $2^{16} \cdot 5^h; 2^n \cdot 5^{16}; 1$

$$2^{16} \cdot 5^h; 2^n; 5^{16}$$

оставшиеся - перестановки.

Всего меню: ~~17 \cdot 16 \cdot 4 - 3~~

~~17 \cdot 16 \cdot 4 - 3~~

$$4 \cdot 14 \cdot 17 - 3 \cdot 2$$

IV $2^{16} \cdot 5^{15}; 2^n \cdot 5^k; 1$

$$2^{16} \cdot 5^{15}; 2^n; 5^j$$

оставшиеся - перестановки

Всего вар.тов: $17 \cdot 16 \cdot 4 - 2 - 3$

Учтено

II $P_a; P_b; P_c$

$$2^1; 2^{16} \cdot 5^h; 5^{15}$$

$$2^1; 2^{16} \cdot 5^{15}; 5^j$$

(получены все меню P_a и P_c)

$$\Rightarrow 4 \cdot 15 \cdot 16 - 3$$

V $5^h; 2^{16} \cdot 5^{16}; 2^i$

$$5^h; 2^{16}; 2^i \cdot 5^{16}$$

(оставшиеся - пункты перест. P_b и P_c)

~~$$4 \cdot 14 \cdot 17 - 3$$~~

$$4 \cdot 14 \cdot 17 - 3$$

VI $2^1 \cdot 5^{15}; 2^{16} \cdot 5^k; 1$

$$2^1 \cdot 5^{15}; 2^{16}; 5^k$$

оставшиеся - перестановки

Всего вар.тов:

$$15 \cdot 15 \cdot 4 - 2$$

Всего меню:

$$17 \cdot 16 \cdot 4 - 3 + 4 \cdot 15 \cdot 16 - 3 +$$

$$+ 16 \cdot 17 \cdot 4 - 3 + 4 \cdot 14 \cdot 17 - 3 +$$

$$+ 4 \cdot 14 \cdot 17 - 2 + 15 \cdot 15 \cdot 4 - 2 +$$

$$+ 17 \cdot 16 \cdot 4 - 5 =$$

$$= -21 + 4 \cdot 1754 = 7028 - 21 =$$

$$= 7007$$

Смп. 2

