Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101671**

ID профиля: **323274**

Вариант 20

1 страница   Чистовик

1. $S = S_5 = \frac{2a_1+4d}{2}\cdot 5 = 5a_1 + 10d$, где d — разность данной арифм. прогрессии.

При этом $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \in \mathbb{Z}$, $a_{n+1} > a_n \Rightarrow d > 0$, также ясно, что если $d \notin \mathbb{Z}$, то $a_2 = a_1 + d \notin \mathbb{Z}$ — противоречие $\Rightarrow d \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \boxed{d \in \mathbb{N}}$ (·)

$a_6 a_{11} = (a_1+5d)(a_1+10d) > S+15 = 5a_1+10d+15$

$a_8 a_9 = (a_1+7d)(a_1+8d) < S+39 = 5a_1+10d+39$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a_1+5d)(a_1+10d) > \cancel{S+15}\ 5a_1+10d+15 & (1) \\ 5a_1+10d+39 > (a_1+7d)(a_1+8d) & (2) \end{cases}$$

Сложим эти неравенства, получим:

$$\cancel{5a_1} + \cancel{10d} + 39 + \cancel{a_1^2} + \cancel{15a_1 d} + 50d^2 > \cancel{5a_1} + \cancel{10d} + 15 + \cancel{a_1^2} + \cancel{8a}\,\cancel{15a_1 d} + 56d^2$$

$\Rightarrow d^2 < 4 \Rightarrow$ Учитывая (·): $d < 2 \Rightarrow \boxed{d = 1}$

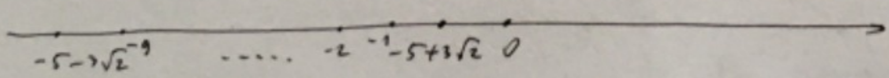
Подставим полученное значение в (1):

$a_1^2 + 15a_1 + 50 > 5a_1 + 25 \Leftrightarrow a_1^2 + 10a_1 + 5 > 0 \Leftrightarrow (a_1+5)^2 > 0$, что верно $\forall a_1 \neq -5 \Rightarrow \boxed{a_1 \neq -5}$ (*)

Подставим полученное значение d в (2):

$a_1^2 + 15a_1 + 56 < 5a_1 + 49 \Leftrightarrow a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

$\Leftrightarrow$ ~~$a_1 \in (-5-\sqrt{18}$~~ $a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2})$



Заметим, что $a_1 \in \mathbb{Z}$ и учитывая (*), получим, что

~~$a_1 = -2$~~

$\boxed{a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}}$

Ответ: $-1, -2, -3, -4, -6, -7, -8, -9$.

Чистовик

② $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 13 & (1) \\ a^2+b^2 \leq \min(-4a-6b, 13) & (2) \end{cases}$

Заметим, что если a, b удовл. (2), то (1) неравенству удовлетворяет круг радиуса $\sqrt{13}$ с центром в точке $(a; b)$

Найдём множество точек $(a;b)$, удовл. (2):

Ⓘ Пусть $-4a-6b<13 \Leftrightarrow b>-\frac{2}{3}a-\frac{13}{6}$, что задаёт полуплоскость ~~выше~~ прямой $b=-\frac{2}{3}a-\frac{13}{6}$

(2) $\Leftrightarrow a^2+b^2 \leq -4a-6b \Leftrightarrow (a+2)^2+(b+3)^2 \leq 13$, что задаёт круг радиуса $\sqrt{13}$ с центром в точке $(-2;-3)$. Тогда допустимое ~~Д-ем~~ множество точек будет пересечением этих фигур.

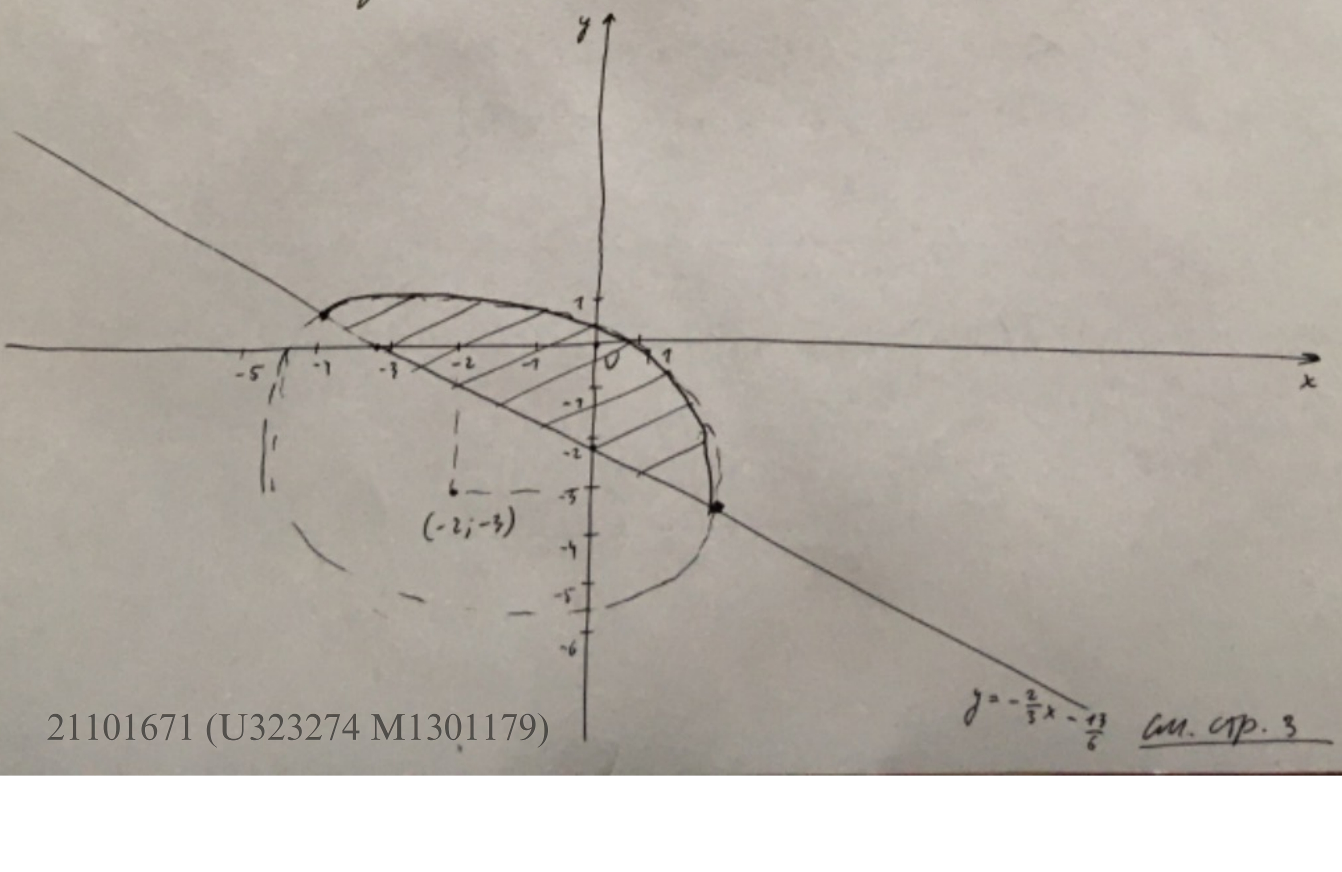
Ⓘⓘ Пусть $-4a-6b \geq 13 \Leftrightarrow b \leq -\frac{2}{3}a-\frac{13}{6}$, что задаёт полуплоскость

(2) $\Leftrightarrow a^2+b^2 \leq 13$, что задаёт круг радиуса $\sqrt{13}$ с ~~в~~ центром в точке $(0;0)$. Допустимое мн-во точек будет пересечением этих фигур

Т.о. множеством допустимых точек $(a;b)$ будет ~~об~~ объединением множеств, полученных в Ⓘ и Ⓘⓘ.

Т.о. мы нашли множество всех точек, ~~являющихся~~ которые могут являться центрами круга, заданного (1).

Для начала изобразим множество этих центров на плоскости xOy: Изобразим множество точек, заданных Ⓘ:



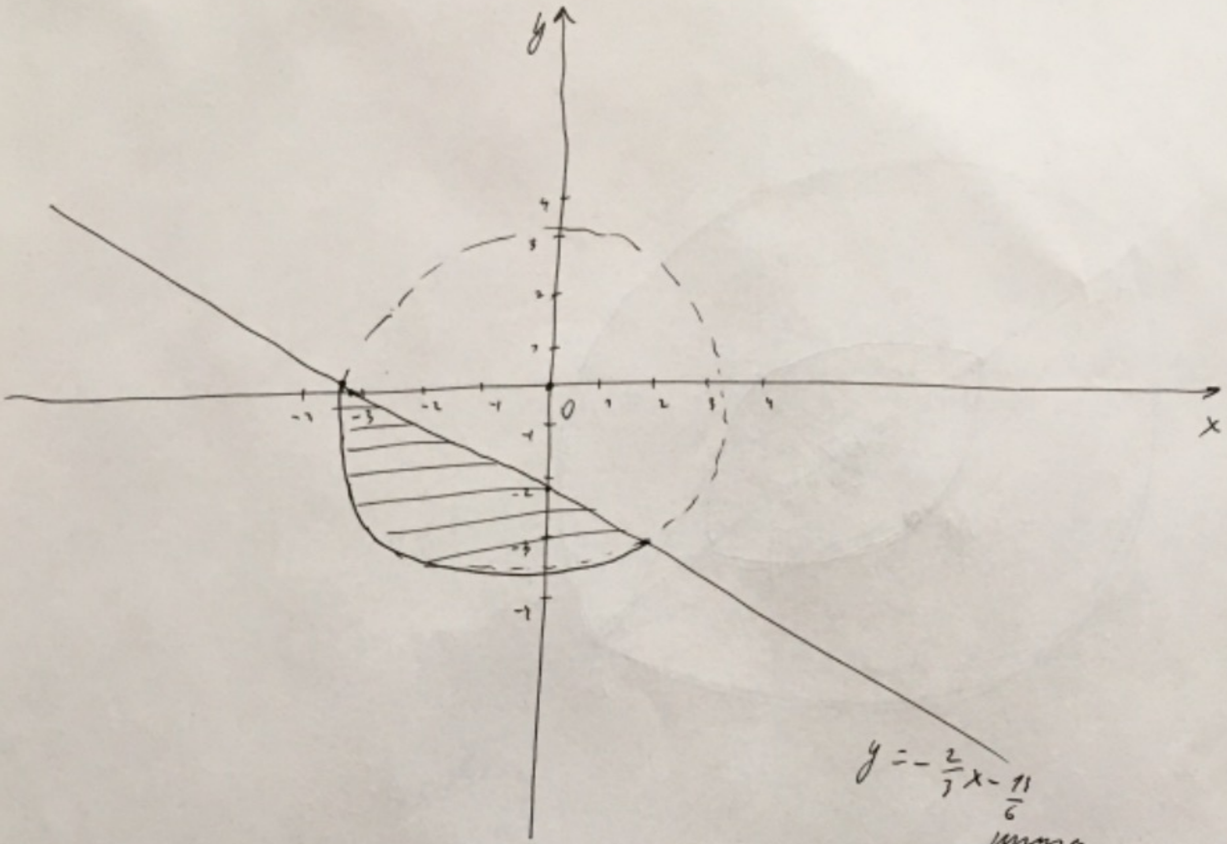
см. стр. 3

3 Страница

Чистовик

3 Продолжение 1

Теперь изобразим множество точек, заданных II:



При этом заметим, что расстояние от центра ~~окружности~~ круга, заданного I до ц. ~~окр~~ круга заданного II равно $\sqrt{13}$. При этом:

$$\left.\begin{aligned} &x^2+y^2=13 \\ &(x+2)^2+(y+3)^2=13 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2+y^2=(x+2)^2+(y+3)^2$$

$$\Rightarrow 4x+6y+13=0 \Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}x-\frac{13}{6}.$$

т.о. заметим, что точки пересечения окружностей (границ кругов I и II) лежат на прямой $y=-\frac{2}{3}x-\frac{13}{6}$, при этом равны их радиусы и их центры находятся на расстоянии радиуса $\sqrt{13}$ друг от друга.

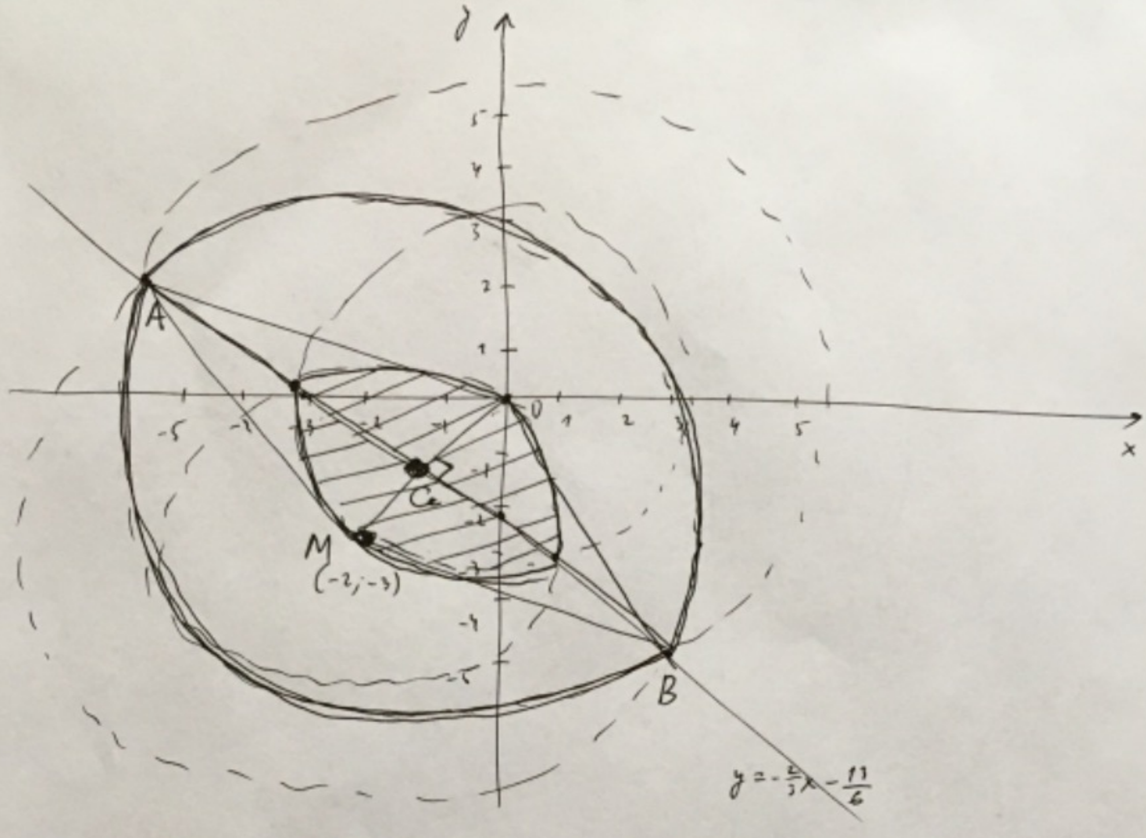
Изобразим множество точек ~~(a;b)~~ с использованием полученных результатов

см. стр. 4

4 страница

Чистовик

3 Продолжение 2



Тогда заметим, что если это множество точек является центрами кругов, заданных (1), то множество точек заданных (2) представляет собой пересечение двух окружностей радиуса $2\sqrt{13}$ с центрами в $(0;0)$ и $(-2;-3)$.

Пусть точки пересечения этих окружностей A и B, и $M(-2;-3)$ (показано на графике), пусть G — середина AB, тогда $OG \perp AB$

$\Rightarrow$ OG расстояние от $(0;0)$ до прямой $y=-\frac{2}{3}x-\frac{13}{6}$

из прямоугольного треугольника с вершинами $(0;0)$, $(0;-\frac{13}{6})$, $(-\frac{13}{4};0)$ получаем, что высота OG в нем равна

$OG = h = \frac{ab}{c}$, где $a=\frac{13}{6}$, $b=\frac{13}{4}$, $c=\sqrt{(\frac{13}{6})^2+(\frac{13}{4})^2} = 13\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{16}} =$

$=\frac{13\sqrt{13}}{12} \Rightarrow OG = h = \frac{\frac{13}{6}\cdot\frac{13}{4}}{\frac{13\sqrt{13}}{12}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

См. на стр. 5

5 страница Чистовик

3 Продолжение 3

Тогда из $\triangle GOB$: ~~$\angle GOB =$~~ $\cos\angle GOB = \dfrac{OG}{OB} = \dfrac{\frac{\sqrt{13}}{2}}{2\sqrt{13}} = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow \angle GOB = \arccos\frac{1}{4} \Rightarrow$ из равенства $\triangle AOG = \triangle GOB = \triangle AGM = \triangle MGB$:

$\angle AOB = \angle AMB = 2\arccos\frac{1}{4}$

~~Тогда найдём площадь одного из круговых секторов ограниченных дугой AB: $S_1 = \frac{\pi(2\sqrt{13})^2 \cdot 2\arccos\frac{1}{4}}{2\pi} = 52\arccos\frac{1}{4}$, тогда пло~~

Заметим, что площадь искомой фигуры равна удвоенной площади сегмента, отсекаемого AB от любой из окружностей (меньшего из них), а площадь сегмента: $S_{сег} = S_{сек} - S_{\triangle}$,

тогда $S = 2S_{сег} = 2S_{сек} - 2S_{\triangle}$

$$S_{сек} = \frac{\pi(2\sqrt{13})^2 \cdot 2\arccos\frac{1}{4}}{2\pi} = 52\arccos\frac{1}{4}$$

$$S_{\triangle} = S_{AOB} = S_{AMB} = \frac{OG \cdot AB}{2}$$

$$AB = 2\sqrt{OB^2 - OG^2} = 2\sqrt{52 - \frac{13}{4}} = 2\sqrt{\frac{208-13}{4}} = \sqrt{195}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle} = \frac{\frac{\sqrt{13}}{2}\cdot\sqrt{195}}{2} = \frac{13\sqrt{15}}{4}$$

$$\Rightarrow S = S_{сег} = 2(S_{сек} - S_{\triangle}) = 2\left(52\arccos\frac{1}{4} - \frac{13\sqrt{15}}{4}\right) =$$

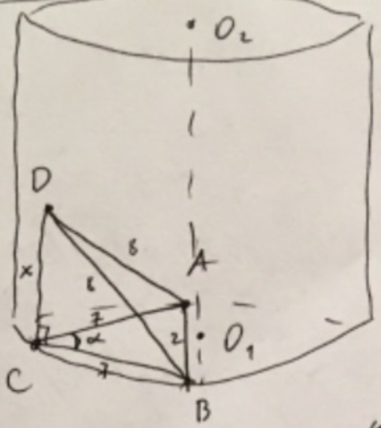
$$= 104\arccos\frac{1}{4} - \frac{13\sqrt{15}}{2}$$

$$\boxed{S = 104\arccos\frac{1}{4} - \frac{13\sqrt{15}}{2}}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } 104\arccos\frac{1}{4} - \frac{13\sqrt{15}}{2}}$$

Чистовик

2



Пусть O_1, O_2 — центры оснований цилиндра

$CD \parallel O_1O_2 \Rightarrow CD \perp ABC$

~~$(O_1O_2 \perp ABC)$~~

~~Пусть $CD = x$~~

~~По теореме косинусов для $\triangle ABC$:~~

~~$4 = 2\cdot 49 - 2\cdot 49\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{94}{98} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{4}{98}$~~

~~$\Rightarrow$ по т. косинусов для $\triangle ABC$:~~

~~$\frac{AB}{\sin\alpha} = 2R \Leftrightarrow \frac{2}{\frac{2}{49}} = 2R \Rightarrow \boxed{R = \frac{49}{2}}$~~

Пусть ABC не параллельна плоскости нижнего основания, но тогда для тетраэдра вершины A, B, C которого в плоскости, параллельной плоскости основания цилиндра радиус окружности основания цилиндра будет меньше $\Rightarrow$ ADC лежит в плоскости, парал. плоскости нижнего основания $\Rightarrow CD \parallel O_1O_2$, $O_1O_2 \perp ABC$

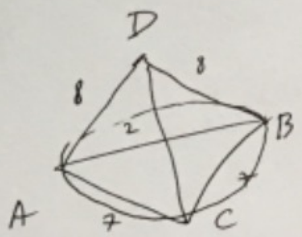
$\Rightarrow CD \perp ABC \Rightarrow$ из $\triangle DBC$ $(\angle DCB = 90^\circ)$: $DC = \sqrt{64-49} = \sqrt{15}$

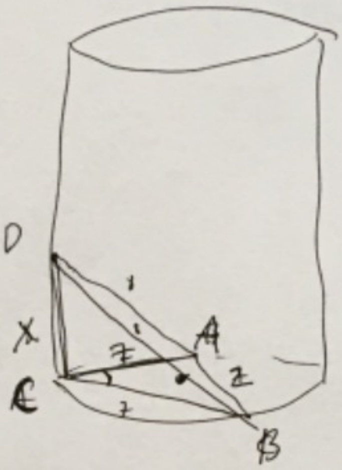
$\boxed{\text{Ответ: } \sqrt{15}.}$

Черновик

$$4 = 2\cdot 49 - 2\cdot 49\cos\alpha$$

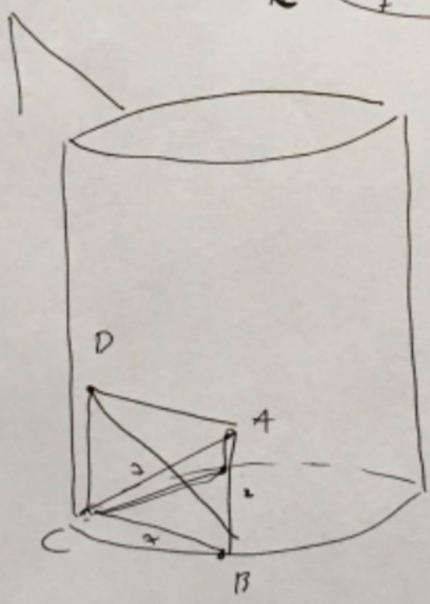
$$\cos\alpha = \frac{98-4}{2\cdot 49} = \frac{94}{98} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{4}{98} = \frac{2}{49}$$



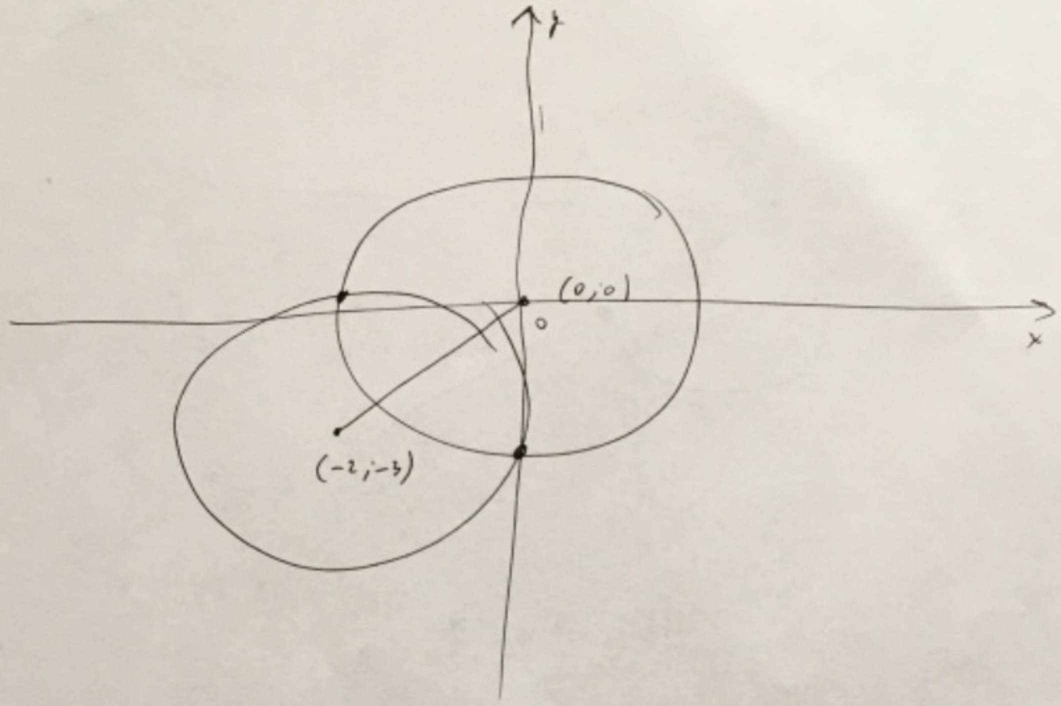


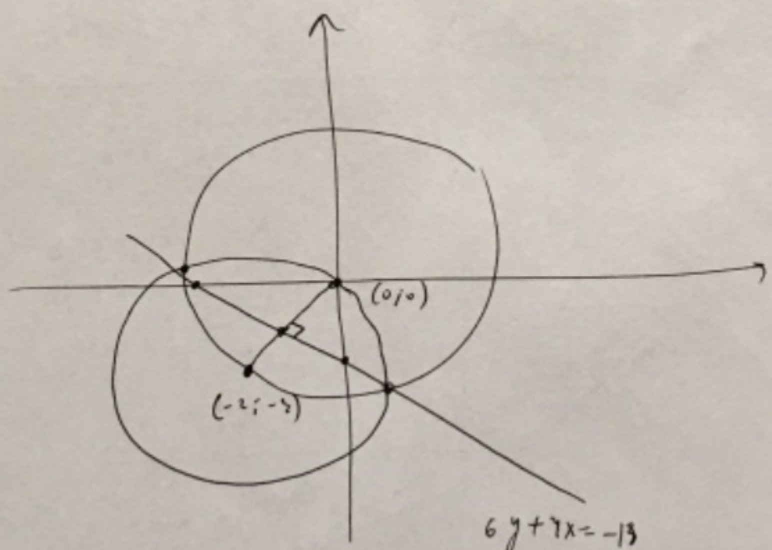
$$\frac{2}{\frac{2}{49}} = 2R$$

$R = 49$



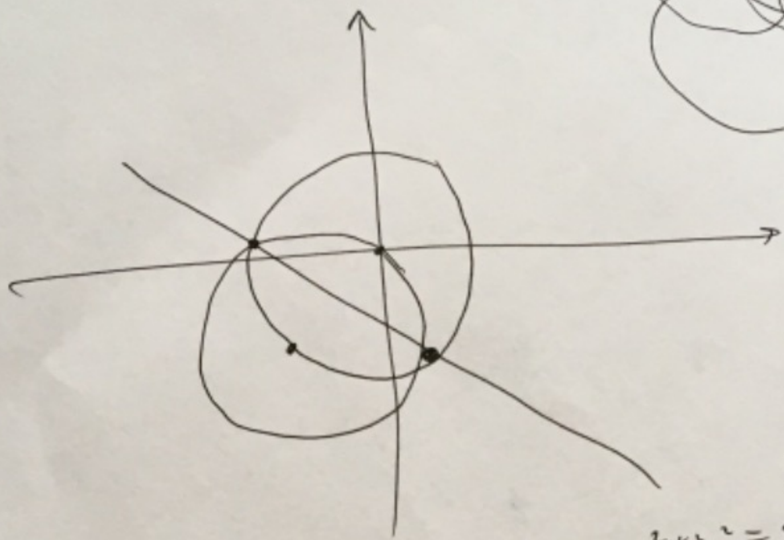
Черновик





21101671 (U323274 M1301179)

Черновик



$x^2+y^2=2\sqrt{13}$

$x^2+y^2=13$

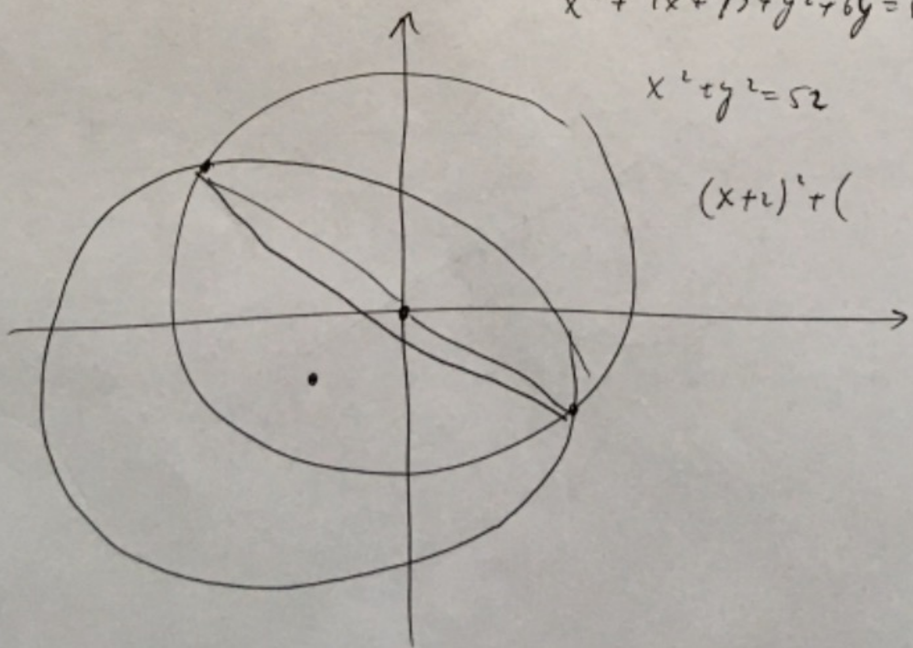
$4x+6y=-13$

$(x+2)^2+(y+3)^2=52$

$x^2+y^2=(x+2)^2+(y+3)^2$

$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}=\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+4x+\cancel{13}+6y$

$x^2+4x+13+y^2+6y=52$



$x^2+y^2=52$

$(x+2)^2+($

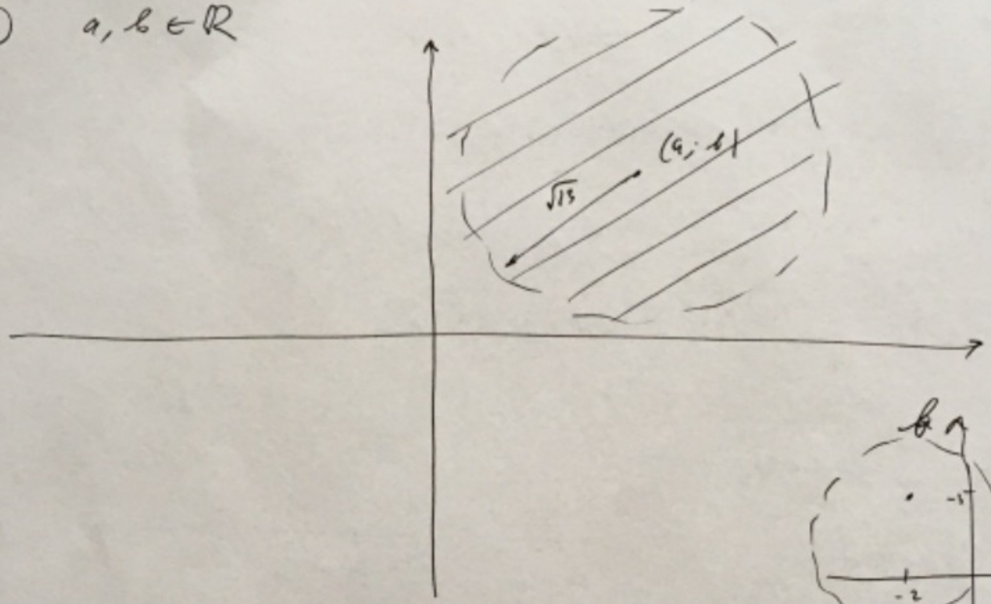
Черновик

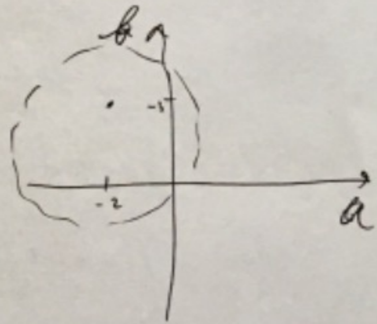
~~$5 = -45 + 40 = -35$~~

$(-9+5)(-9+40) = -4$

$(-9+7)(-9+8) = 2 < 4$

③ $a, b \in R$





$a^2 + b^2 \leq \min(-4a - 6b, 13)$

① Пусть $-4a - 6b \leq 13$

$b > \frac{-4a - 13}{6}$

$a^2 + b^2 \leq -4a - 6b$

$(a+2)^2 - 4 + (b+3)^2 - 9 \leq 0$

$(a+2)^2 + (b+3)^2 \leq 13$

Черновик

$d \geq 1$

① $a_6 a_{11} > S+15$ $\qquad a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \Rightarrow d \in \mathbb{Z}$

$a_8 a_9 < S+39$

$S = S_5 = \frac{2a_1+4d}{2} \cdot 5 = (a_1+2d)\cdot 5 = 5a_1+10d$

$a_6 a_{11} = (a_1+5d)(a_1+10d) > 5a_1+10d+15$ (1)

$a_8 a_9 = (a_1+7d)(a_1+8d) < 5a_1+10d+39$ (2)

(1) $\Leftrightarrow$ $a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2 > 5a_1+10d+15$

(2) $\Leftrightarrow$ $a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2 < 5a_1+10d+39$

$a_1^2 + a_1(15d-5) > 10d+15-50d^2$

$a_1^2 + a_1(15d-5) < 10d+39-56d^2$

$3\sqrt{2} \approx 3 \cdot 1.4 \approx 4.2$

$-5-3\sqrt{2} < -9$

$-3\sqrt{2} < -4$

$\cancel{a_1^2 + a_1(15d}$

$-5-3\sqrt{2}$ $\quad -5+3\sqrt{2}$ $\quad 0$

$S = 5a_1 + 10d$

$\frac{D}{4} = 25-7 = 18$

$(a_1+5d)(a_1+10d) > 5a_1+10d+15$

$\cancel{D = 100}$

$(a_1+7d)(a_1+8d) < 5a_1+10d+39$

$a_1 = -5 \pm \sqrt{18}$

$(a_1+5d)(a_1+10d) + \cancel{5a_1} + \cancel{10d} + \underbrace{39}_{24} > \cancel{5a_1} + \cancel{10d} + \underline{15} + (a_1+7d)(a_1+8d)$

$\cancel{a_1^2} + 15\cancel{a_1}d + 50d^2 + 24 > \cancel{a_1^2} + 15\cancel{a_1}d + 56d^2$

$\Rightarrow 6d^2 < 24 \Rightarrow d^2 < 4 \Rightarrow \boxed{d = 1, 2 \text{ или } 3}$

$(a_1+5)(a_1+20) > 5a_1+25$ $\qquad a_1^2+15a_1+56 < 5a_1+49$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

$a_1^2 + 15a_1 + 50 > 5a_1 + 25$ $\qquad D = 100 - 28 = 72$

$a_1 = \frac{-10 \pm \sqrt{72}}{2} = \frac{-10 \pm 2\sqrt{18}}{2} = -5 \pm 3\sqrt{2}$

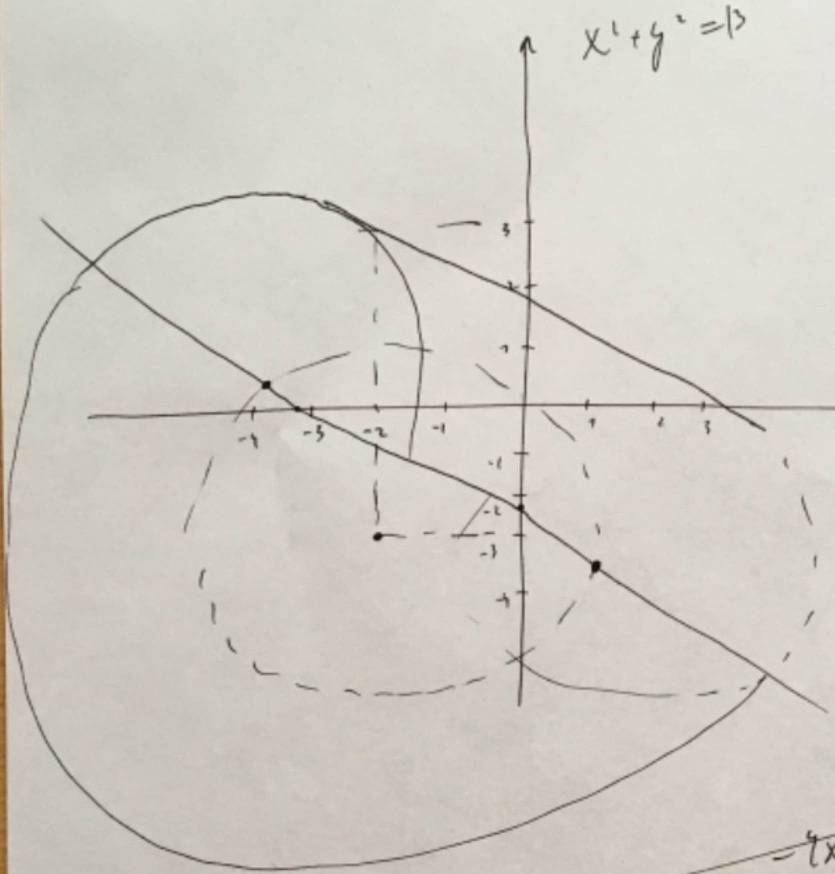
$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

$(a_1+5)^2 > 0 \Rightarrow a \neq -5$

21101671 (U323274 M1301179)

Черновик

$x^2+y^2=13$



$-4x-6y=13$

$y=-\frac{2}{3}x-\frac{13}{6}$

$-\frac{2}{3}x=\frac{13}{6}$

$-4x=13$

$x=-\frac{13}{4}$

$y=-\frac{2}{3}x-\frac{13}{6}$

$-4x-6y=13$

$\cancel{x=\ 6y}$

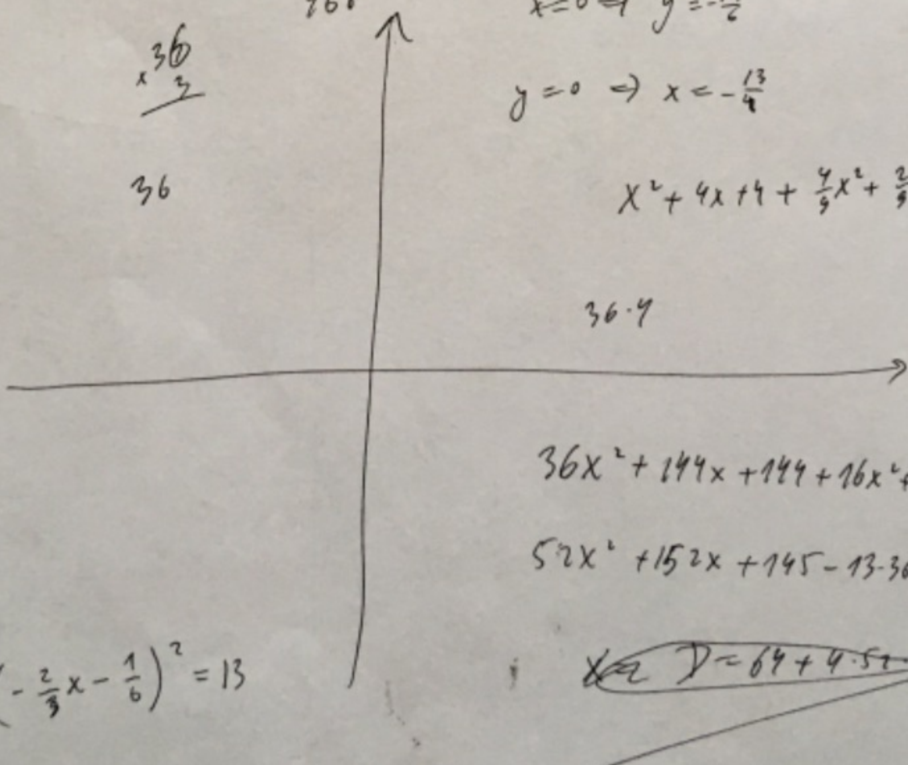
$(x+2)^2+(y+4)^2=13$

$(x+2)^2+\left(-\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}\right)^2=13$

$-4x-6y=13$ $\quad x^2+4x+4+\cancel{\frac{2}{3}}$

$\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}\right)^2=13$

468



36×3

$x=0 \Rightarrow y=-\frac{13}{6}$

$y=0 \Rightarrow x=-\frac{13}{4}$

36

$x^2+4x+4+\frac{4}{9}x^2+\frac{2}{9}x+\frac{1}{36}=13$

$36\cdot4$

$36x^2+144x+144+16x^2+8x+1=13\cdot36$

$52x^2+152x+145-13\cdot36=0$

$\cancel{x_2\ D=64+4\cdot52\cdot467}$

$x^2+\left(-\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}\right)^2=13$

$x^2+\frac{4}{9}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{36}=13$

$\cancel{36x^2+16x^2+8x+1=468}$

$\cancel{52x^2+8x-467=0}$

Черновик

③ ① $-4a-6b<13 \Rightarrow b>-\frac{4}{6}a-\frac{13}{6}$

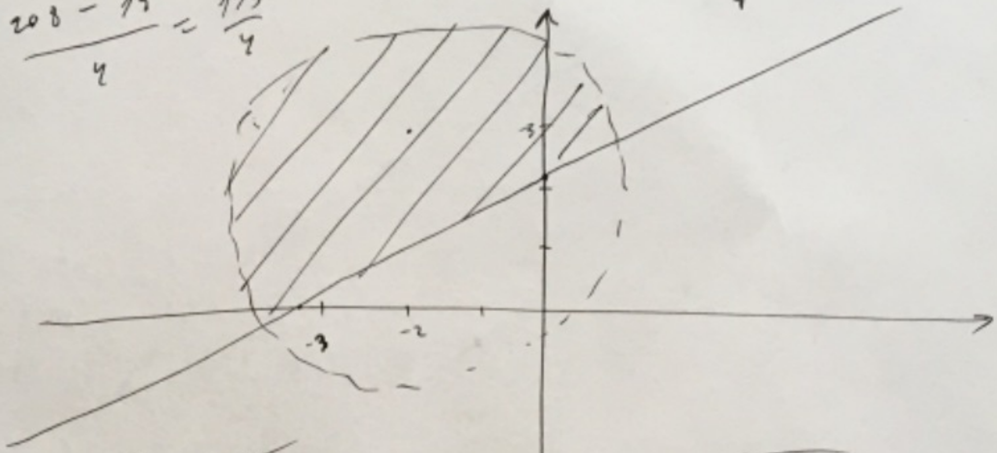
$a^2+b^2\le -4a-6b \Leftrightarrow (a+2)^2+(b+3)^2\le 13$

$-\frac{4}{6}a-\frac{13}{6}=0$

$4a=-13$

$a=-\frac{13}{4}$

$\frac{208-13}{4}=\frac{195}{4}$



$\frac{\cancel{13}\sqrt{13}}{\cancel{24}\,2}\cdot\frac{12}{\sqrt{13}}$

$\sqrt{\frac{169}{36}+\frac{169}{16}}=$

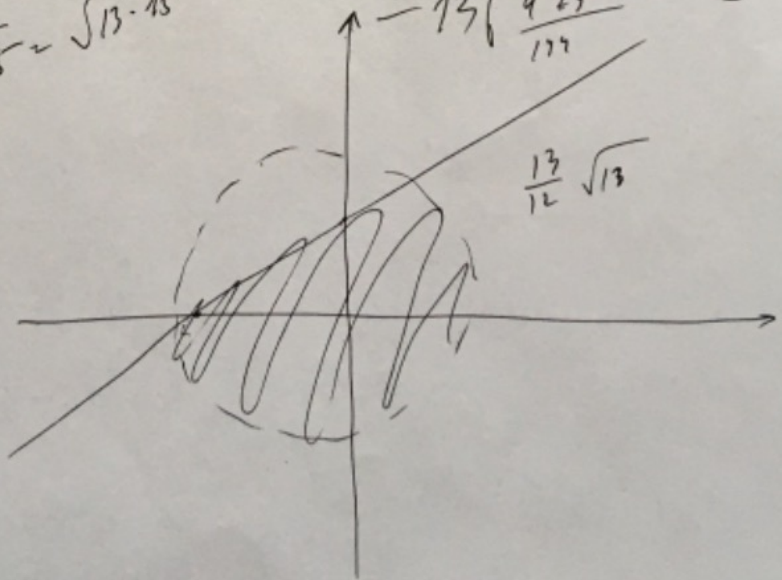
② $-4a-6b\ge 13 \Rightarrow b\le -\frac{4}{6}a-\frac{13}{6}$

$=13\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{16}}=$

$a^2+b^2\le 13$

$\sqrt{195}=\sqrt{13\cdot 15}$

$=13\sqrt{\frac{4+9}{144}}=$



$\frac{13}{12}\sqrt{13}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101671**

ID профиля: **323274**

Вариант 20

1 страница

Чистовик

1) Заметим, что a, b, c имеют вид

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2}$

$b = 2^{\beta_1} \cdot 5^{\beta_2}$

$c = 2^{\gamma_1} \cdot 5^{\gamma_2}$, где ~~...~~ $1 \le \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \le 17$, $1 \le \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \le 16$

т.к. НОД $(a; b; c) = 10$, а НОК $(a; b; c) = 2^{17} \cdot 5^{16}$

Заметим тогда, что НОД $(a; b; c) = 2^{\min\{\alpha_1; \beta_1; \gamma_1\}} \cdot 5^{\min\{\alpha_2; \beta_2; \gamma_2\}} = 10$

$$\Rightarrow \begin{cases} \min\{\alpha_1; \beta_1; \gamma_1\} = 1 \\ \min\{\alpha_2; \beta_2; \gamma_2\} = 1 \end{cases}$$

НОК $(a; b; c) = 2^{\max\{\alpha_1; \beta_1; \gamma_1\}} \cdot 5^{\max\{\alpha_2; \beta_2; \gamma_2\}} = 2^{17} \cdot 5^{16}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\{\alpha_1; \beta_1; \gamma_1\} = 17 \\ \max\{\alpha_2; \beta_2; \gamma_2\} = 16 \end{cases}$$

Заметим, что способов выбрать мин. и макс. из 3 чисел $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ — 6, тогда для каждой из этих пар ~~них значение третьего существует~~ значение 3-го числа ~~...~~ ≥ 1 и $\le 17 \Rightarrow$ существует 17 значений третьего числа. ~~...~~

Аналогично рассуждая для чисел $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, получаем, что для каждой из 6 упорядоченных пар существует ~~...~~ 16 значений третьего числа

~~При этом мы знаем, что~~ тогда всего существует $(6 \cdot 17) \cdot (6 \cdot 16)$ ~~...~~ ~~троек упорядо~~ упорядоченных троек $(a; b; c)$, удовлетворяющих условию

$6 \cdot 17 \cdot 6 \cdot 16 = 9792$

Ответ: 9792 тройки

2 страница

Чистовик

② ~~$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 2\log_{2x-8}(x-4) = a$~~

~~$\Rightarrow 2\log_{2x}$~~ Пусть ~~$a = 2x-8, b = x-4$~~ $a = x-4$, тогда $2x-8 = 2a$, $b = 5x-26$

$\alpha = \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 2\log_{2a} a$, $\beta = \frac{1}{2}\log_a b$, $\gamma = 2\log_b 2a$

$\frac{\alpha}{2} = \log_{2a} a \Leftrightarrow \log_a 2a = \frac{2}{\alpha}$

$\beta = \frac{1}{2}\log_a b \Leftrightarrow \log_a b = 2\beta$

$\Rightarrow \log_b 2a = \frac{\log_a 2a}{\log_a b} = \frac{\frac{2}{\alpha}}{2\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} \Rightarrow \boxed{\gamma = 2\log_b 2a = \frac{2}{\alpha\beta}}$

I) $\alpha = \beta$, $\gamma = \alpha+1 = \beta+1 \Rightarrow \gamma = \frac{2}{\alpha^2} = \alpha+1 \Leftrightarrow \alpha^3+\alpha^2-2=0$

$\Leftrightarrow (\alpha-1)(\alpha^2+2\alpha+2) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \Rightarrow \log_{2x-8} x-4 = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow (2x-8)^{\frac{1}{2}} = x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-8 = x^2-8x+16 \\ x-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-10x+8=0 \\ x \geq 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5\pm\sqrt{17} \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5+\sqrt{17}$ (-)

II) $\alpha = \gamma$, $\beta = \alpha+1 = \gamma+1 \Rightarrow$ ~~$\frac{2}{\alpha^2} = \alpha+1 \Leftrightarrow$~~ $\alpha^3+\alpha^2-2=0$

$\Rightarrow x = 5+\sqrt{17}$ (аналогично с I)

III) $\beta = \gamma$, $\alpha = \gamma+1 = \beta+1 \Rightarrow \frac{2}{\beta^2} = \beta+1 \Rightarrow \beta^3+\beta^2-2=0$

$\Rightarrow \beta = 1$ (по аналогии с I) $\Rightarrow \log_{x-4} 5x-26 = 2$

$\Leftrightarrow (x-4)^2 = 5x-26 \Leftrightarrow x^2-8x+16 = 5x-26$

$\Leftrightarrow x^2-13x+42 = 0 \Leftrightarrow x = \left[\begin{array}{l} 7 \\ 6 \end{array}\right.$ (*)

При этом стоит отдельно рассмотреть случаи $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$

если $\alpha=0$, то $(2x-8)^0 = x-4 \Rightarrow x=5 \Rightarrow \gamma = 2\log_{5x-26} 2x-8$

не определён

если $\beta=0$, то $(x-4)^0 = 5x-26 \Rightarrow x = \frac{27}{5}$, однако если $\beta=\alpha$ или

$\beta=\gamma$ — то $x\in\varnothing$, если $\beta=\alpha+1=\gamma+1 \Rightarrow$ ~~$\alpha=-1$~~, $\alpha=\gamma=-1$

$x\in\varnothing$

если $\gamma=0$, то $(2x-8) = (5x-26)^0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2} \Rightarrow 5x-26 < 0$

$\Rightarrow$ ~~$\gamma = 2\log$~~ $\beta = \frac{1}{2}\log_{x-4} 5x-26$ не определён

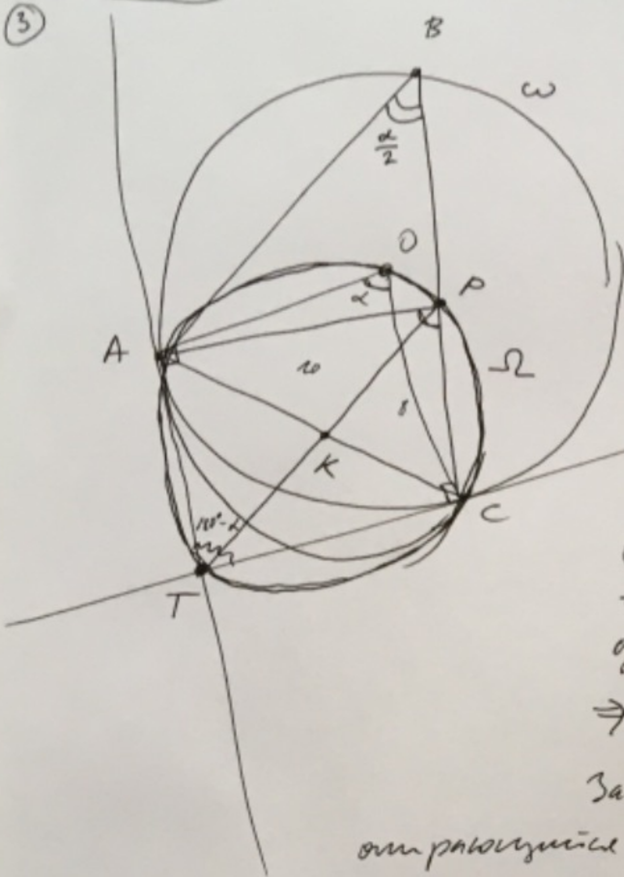
Итого $x=7$, $x=6$, $x=5+\sqrt{17}$

Ответ: $x=6$, $x=7$, $x=5+\sqrt{17}$.

21101671 (U323274 M1301180)

3 страница ~~Черновик~~ Чистовик

③



$S_{ADC} = ?$

$S_{APK} = 10$, $S_{PKC} = 8$

Заметим, что $\angle AOC = \angle APC = \alpha$ как углы вписанные в одну окружность, описанную около $\triangle AOC$ (назовём её Ω)

тогда заметим, что $AOCT$ — вписанный четырёхугольник ($\angle TAO = \angle OCT = 90°$)

$\Rightarrow \angle ATC = 180° - \alpha$ ~~$\Leftrightarrow$ T лежит на Ω~~

однако $\angle APC = \alpha \Rightarrow \angle ATC = 180° - \angle APC$

$\Rightarrow P \in \Omega$

Заметим, что $\angle ABC = \frac{\alpha}{2}$ как вписанный, опирающийся на дугу AC окружности ω, а $\angle AOC = \alpha$

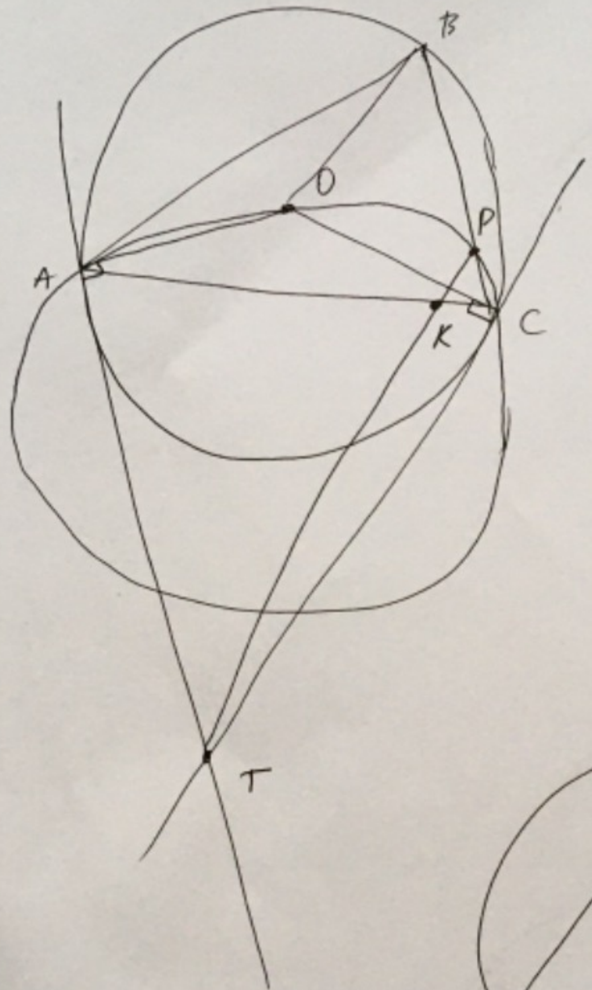
Пусть $AC = 9x$, тогда по т. синусов для $\triangle ABC$ и окружности ω радиуса R:

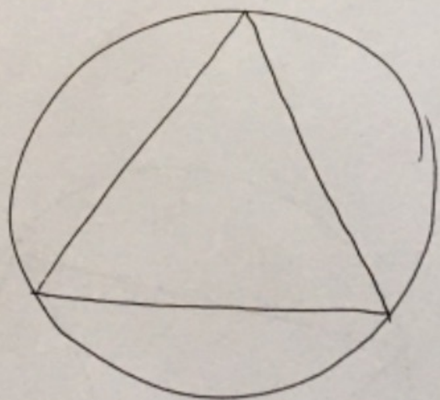
$\frac{9x}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 2R$, для $\triangle AOC$ и окружности Ω с радиусом r:

$\frac{9x}{\sin\alpha} = 2r$, при этом $OC = R \Rightarrow \frac{R}{\sin(90° - \frac{\alpha}{2})} = 2r$

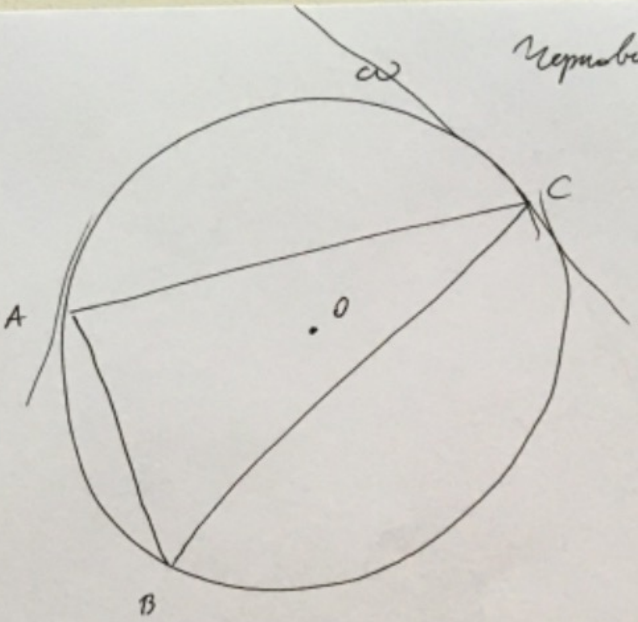
(по т. синусов) ~~$\frac{R}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 2r \Rightarrow R = 2r\cos\frac{\alpha}{2} = 9x$~~

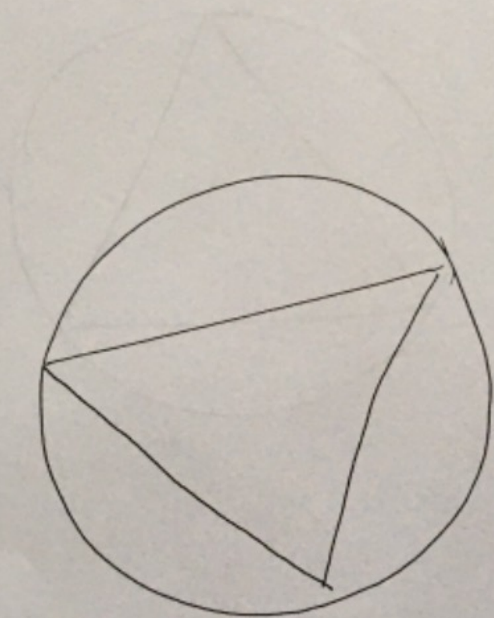
Черновик



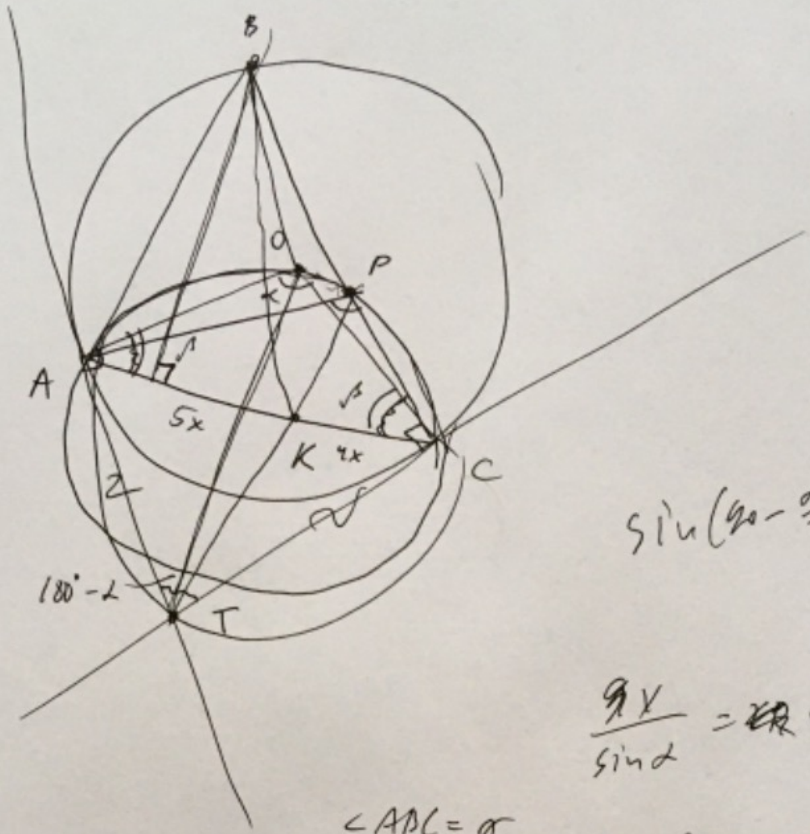


Черновик





Черновик



$\sin(90-\frac{\alpha}{2}) = \cos\frac{\alpha}{2}$

$\frac{9x}{\sin\alpha} = \cancel{2R}\ 22$

$\angle ABC = \gamma$

$R = \frac{9x}{2\sin\alpha}$

$\frac{9xR}{\quad}$

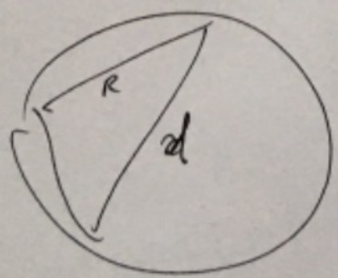
$\frac{AC}{\sin\gamma} = 2R$

$AC = 2R\sin\gamma$

$\frac{9x}{\sin\alpha} = 22$

$R = 22$

$\cancel{AP \cdot PC \cdot 2R^2}$



$S = \frac{abc}{42}$

$722 = AP \cdot PC \cdot 9x$

$x = \frac{8}{AP \cdot PC2}$

Черновик

$$\frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)=2\log_{2x-8}(x-4)+1$$

$$\frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)=\frac{2}{\log_{x-4}(2x-8)}+1$$

~~log~~

$$\log_{x-4}(5x-26)=\frac{4}{\log_{x-4}(2x-8)}+2$$

$$\frac{\log_{x-4}(5x-26)\log_{x-4}(2x-8)-4}{\log_{x-4}(2x-8)}=2$$

Ⓘ $\alpha=\beta$

$$2\log_{2a}a=\frac{1}{2}\log_a b \Leftrightarrow \frac{2}{\log_a 2a}=\frac{1}{2}\log_a b \Leftrightarrow \frac{2}{\log_a 2+1}=\frac{1}{2}\log_a b$$

$$2\log_b 2a=2\log_{2a}a+1$$

$$\Rightarrow \log_a b=\frac{4}{\log_a 2+1}$$

$$\log_b 2a=\log_b a+\log_b 2$$

$$\log_b a=\frac{\log_a 2+1}{4}$$

$$2(\log_b a+\log_b 2)=2\log_{2a}a+1$$

$$\cancel{2\log_b a}+2\log_b 2=$$

$$\frac{\log_a 2+1}{2}+2\log_b 2=2\log_{2a}a+1$$

$$\frac{\log_a 2a}{2}+2\log_b 2=2\log_{2a}a+1$$

$$\frac{\log_a 2a}{2}-\frac{2}{\log_a 2a}=1-2\log_b 2$$

$$\frac{\log_a^2 2a-2}{2\log_a 2a}=1-2\log_b 2$$

21101671 (U323274 M1301180)

Черновик

$\log_{\sqrt{2x-1}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$\frac{2}{\alpha^2} = \alpha+1$

$\gamma = 2\log_c 2a \quad \alpha = 0$

$\beta = \frac{2}{\alpha\beta} \qquad \gamma = \frac{2}{\alpha^2}$

$\Rightarrow \beta^2 = \frac{2}{\alpha} \Rightarrow$

$\frac{\alpha}{2} = \log_{2a} a \qquad \alpha = \frac{2}{\alpha\beta} \Rightarrow \cancel{\beta = \frac{1}{\alpha^2}}$

$\alpha = \frac{2}{\beta^2}$

$\frac{2}{\alpha} = \log_a 2a \qquad \alpha^2 = \frac{2}{\beta}$

$\beta = \frac{1}{2}\log_a b \Rightarrow \log_a b = 2\beta \qquad \beta = \frac{2}{\alpha^2}$

$\Rightarrow \log_b 2a = \frac{\log_a 2a}{\log_a b} = \frac{\frac{2}{\alpha}}{2\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} \qquad \frac{2}{\alpha^2} = \alpha+1$

$\Rightarrow \gamma = \frac{2}{\alpha\beta}$

$\alpha^3+\alpha^2-2 = (\alpha-1)(\alpha^2+2\alpha+2) = \alpha^3+\cancel{2\alpha^2}-2\alpha-\cancel{\alpha^2}-2\alpha+2 =$

$= \alpha^3 -$

$D = 4-8 \qquad 169-168=1$

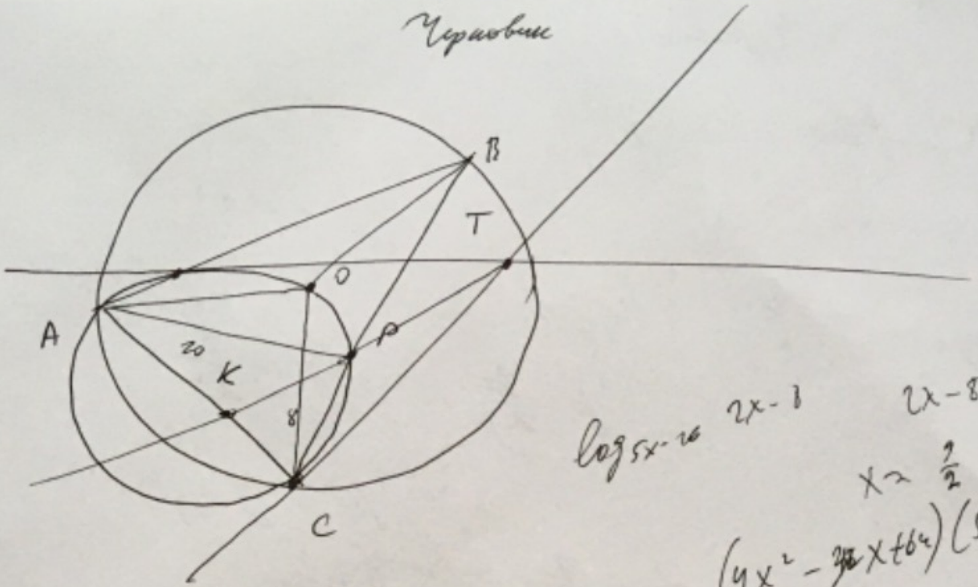
$x = \frac{13\pm1}{2} = \left[\begin{array}{l}7\\6\end{array}\right.$

$D = 100-32 = 68$

$x = \frac{10\pm\sqrt{68}}{2} = \frac{20\pm2\sqrt{17}}{2} = 5\pm\sqrt{17}$

21101671 (U323274 M1301180)

Черновик



$\log_{5x-26} 2x-8$ $\quad 2x-8=\cancel{9}$

$x=\frac{9}{2}$

$(4x^2-\cancel{32}x+64)(5x-26)=1$

$2\log_{2a} a=0$

$\log_{2a} a=0$

$\log_{2x-8} x-4=0$

$(2x-8)^0=x-4$

$x-4=1$

$x=5$

$y=0$

$\cancel{2}\log_{5x-26} 2x-8=0$

$2x-8=1$

$x=\frac{9}{2}$

$\log_{5x-26} 2x-8=-\frac{1}{2}$

$x=\sqrt{\frac{1}{2}}+4$

$\log_{x-4} 5x-26$

$1=5x-26$

$x=\frac{27}{5}$

$(5x-26)^{-\frac{1}{2}}=2x-8$

$\frac{1}{5x-26}=4(2x-8)^2$

$\log_{2x-8} x-4=-\frac{1}{2}$

$(2x-8)^{-\frac{1}{2}}=(x-4)$

$\frac{1}{2x-8}=(x-4)^2$ $\quad 1=2(x-4)^3$

Черновик

$a=\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$, $b=\log_{(x-4)^2}(5x-26)$, $c=\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$\cancel{\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)}$

$\cancel{\log_{2x-8^{\frac{1}{2}}}(x-4)=2\log_{2x-8}(x-4)}$

$\cancel{\log_{x-4}}$

$a=\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=2\log_{2x-8}(x-4)$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26)=\frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)=\frac{1}{2a}$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=2\log_{5x-26}(2x-8)=b$

① $a=\frac{1}{2a}\Rightarrow a^2=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\pm 1$

$b=a+1=\frac{1}{2a}+1\Rightarrow b=\cancel{1\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}}\left[\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right.$

$\cancel{\frac{1}{\log_{x-4}\sqrt{2x-8}}}=\cancel{\frac{1}{2}\log_{(x-4)^2}(5x-26)}$ $\cancel{=2x-8}$

$\alpha=2\log_a b$

$\beta=\frac{1}{2}\log_b c$

$\gamma=2\log_c a$

$a=2\log_{2x-8}(x-4)=\cancel{2\log_{2x-8}\frac{1}{2}(2x-8)=2\left(1+\log_{2x-8}\frac{1}{2}\right)}$

$b=\frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)=\cancel{\frac{1}{2\log_{5x-26}x-4}=}$

$c=2\log_{5x-26}(2x-8)$

$\log_{2x-8}(x-4)=\log_{5x-26}(2x-8)$

$\cancel{\frac{1}{\log_x}}$ $\log_{2x-8}\cancel{(x-4)}=\frac{1}{\log_{2x-8}(5x-26)}$

$\log_{2x-8}(x-4)\log_{2x-8}(5x-26)=1$

21101671 (U323274 M1301180)

Черновик

① $\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=10 \\ \text{НОК}(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$

$a = \cancel{k_1}\, 2^{\alpha_1}\cdot 5^{\alpha_2}$

$b = \cancel{k_2}\, 2^{\beta_1}\cdot 5^{\beta_2}$

$c = \cancel{k_3}\cdot 2^{\gamma_1}\cdot 5^{\gamma_2}$

$\text{НОК}(a;b;c) = 2^{\max\{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1\}}\cdot 5^{\max\{\alpha_2,\beta_2,\gamma_2\}}$

$\text{НОД}(a;b;c) = 2^{\min\{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1\}}\cdot 5^{\min\{\alpha_2,\beta_2,\gamma_2\}}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha_1 = 1\ \text{и} \\ \beta_1 = 1 \\ \gamma_1 = 1 \end{array}\right.$

Пусть $\alpha_1 = 1$, тогда β_1 либо γ_1 — 17

3и

6 способов выбрать макс. и мин α и

$36\cdot 16\cdot 17$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 17 \\ \hline 252 \\ +\ 360 \\ \hline 612 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 612 \\ \times\ 16 \\ \hline 3672 \\ +\ 6120 \\ \hline 9792 \end{array}$$

21101671 (U323274 M1301180)

$2\log_b 2a = 2\log_{2a} a + \frac{1}{2}\log_a b + 2$

$4\log_b 2a = 4\log_{2a} a + \log_a b + 4$

$2\log_{2a} a = \frac{1}{2}\log_a b$

$4\log_{2a} a = \log_a b$

$4\log_b 2a = 8\log_{2a} a + 4$

$4\log_b 2a = 4(\log_{2a} a^2 + 1)$

$2\log_{2a} a = \frac{2}{\log_a 2a} = \frac{2}{\log_a 2 + 1}$

$4\log_b 2a = 4(\log_{2a} 2a^3$

$\log_b 2a = \log_{2a} 2a^3$

$\frac{1}{\log_{2a} b} = \log_{2a} 2a^3$

$(2a)^{\gamma} = 2a^3$

$(2a)^{\frac{1}{\log_{2a} b}} = 2a^3$

$2 = 1$