

# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101651**

ID профиля: **207907**

Вариант 20



v1(0962F)

$-5-3\sqrt{2} \approx -9,5$ , т.к.  $\sqrt{2} \approx 1,4 \approx 1,5$ .

$-5-3\sqrt{2} > -9$   
 $5+3\sqrt{2} > 9$   
 $25+18+30\sqrt{2} > 81$   
 $30\sqrt{2} > 38$   
 $900 \cdot 2 > 1444$   
 $1800 > 1444$

~~$-5-3\sqrt{2} > -8$~~   
 ~~$5+3\sqrt{2} > 8$~~   
 ~~$25+18+30\sqrt{2} > 64$~~   
 ~~$30\sqrt{2} > 41$~~

~~$-5-3\sqrt{2} > -10$~~   
 ~~$5+3\sqrt{2} > 10$~~   
 ~~$25+18+30\sqrt{2} > 100$~~   
 ~~$30\sqrt{2} > 57$~~

$1800 < (50+7)^2 = 2500 + 49 + 700$

$-5-3\sqrt{2} > -10$

$-5-3\sqrt{2} < -9$   
 $<$

$a_{\min} = -9$

$-5+3\sqrt{2} \approx -0,5$ , т.к.  $\sqrt{2} \approx 1,4 \approx 1,5$ .

$-5+3\sqrt{2} > -1$   
 $5-3\sqrt{2} > 1$   
 $25+18-30\sqrt{2} > 1$   
 $-30\sqrt{2} > -42$   
 $30\sqrt{2} < 42$   
 $1800 > 1764$

$-5+3\sqrt{2} > 10$   
 $5-3\sqrt{2} > 0$   
 $5 > 3\sqrt{2}$   
 $25 > 18$

$-5+3\sqrt{2} < 0$

$-5+3\sqrt{2} > -1$

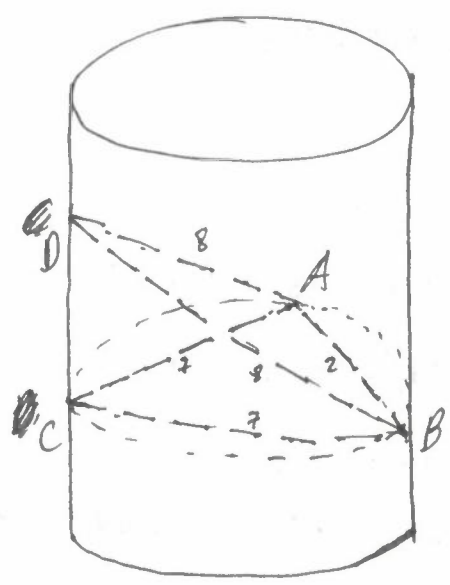
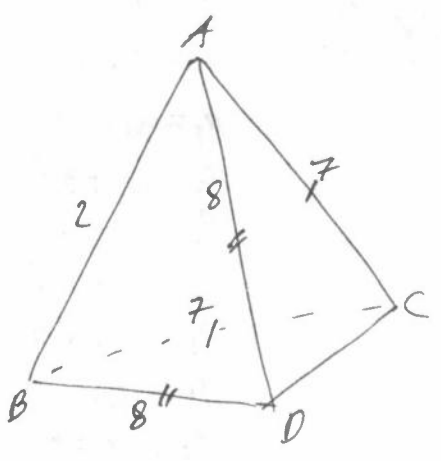
↓

$a_{\max} = -1$

$a \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

ЧЕРНОВИК  
2

12.



$AB=2$   
 $AC=CB=7$   
 $AD=DB=8.$

ЧЕРТОВИК.  
 3

$\triangle ABD = \triangle 1$   
 $\triangle ABC = \triangle 2.$

$$R_1 = \frac{AB \cdot AD \cdot BD}{4S_1} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 8}{4 \cdot 3\sqrt{7}} = \frac{32}{3\sqrt{7}}$$

$$p_1 = \frac{AB+AD+BD}{2} = \frac{2+8+8}{2} = 1+4+4 = 9.$$

$$S_1 = \sqrt{p_1(p_1-AB)(p_1-BD)(p_1-AD)} = \sqrt{9 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1} = 3\sqrt{7}$$

$$R_2 = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S_2} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 7}{4 \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{98}{16\sqrt{3}}$$

$$p_2 = \frac{2+7+7}{2} = 1+7 = 8$$

$$S_2 = \sqrt{p_2(p_2-AB)(p_2-AC)(p_2-BC)} = \sqrt{8 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1} = \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$$

$R_1$	$\wedge$	$R_2$
$\frac{32}{3\sqrt{7}}$		$\frac{98}{16\sqrt{3}}$
$\frac{32 \cdot 16}{\sqrt{7}}$		$\frac{98 \cdot 3}{\sqrt{3}}$

$32 \cdot 16 \cdot \sqrt{7}$	$98 \cdot 3 \cdot \sqrt{7}$
$512 \sqrt{7}$	$294 \sqrt{7}$
$256 \sqrt{3}$	$147 \sqrt{7}$
$196608 >$	$151263$

$R_1 > R_2 \Rightarrow$  у чумушка  $R = R_2.$

1  
 32  
 x16  
 192  
 32  
 512  
 2  
 98  
 x3  
 294  
 1147.

$a^2 + 1 = 49$   
 $a = \sqrt{48}$   
 $b^2 + 1 = 64$   
 $b = \sqrt{63}$   
 $CD^2 + a^2 = b^2$   
 $CD^2 + 48 = 63$   
 $CD = \sqrt{15}$

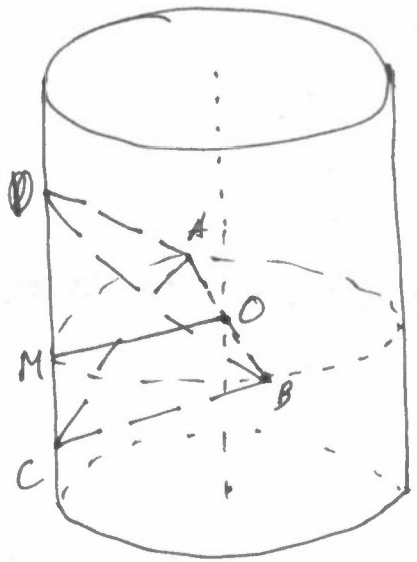
12.

ЧЕРКОВИК  
4

$$AB = 2.$$

$$AC = CB = 7.$$

$$AD = DB = 8.$$



$DC \perp AB$ , но  $DC \parallel$  оси  $\rightarrow AB \perp$  оси  $\rightarrow AB$  - хорда окружности, радиусе которой равен радиусу цилиндра.

Радиус цилиндра неизвестен, когда  $AB$  - его диаметр. Действительно, ведь если  $AB$  не диаметр, то  $AB < d$ .  $\rightarrow$  Найдем произведение.  $OB = \frac{AB}{2} = 1 = OM$ .

$$CO^2 + OB^2 = CB^2.$$

$$DO^2 + \overset{OB^2}{\cancel{OB^2}} = \cancel{AO} DB^2.$$

$$CO^2 = 49 - 1 = 48.$$

$$DO^2 = 64 - 1 = 63.$$

$$CM^2 + OM^2 = CO^2.$$

$$DM^2 + MO^2 = DO^2.$$

$$CM^2 = 48 - 1 = 47.$$

$$DM^2 = DO^2 - OM^2 = 62.$$

$$CD = CM + DM = \sqrt{47} + \sqrt{62}.$$

$$\begin{cases} S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \neq 5a, +10d \\ a_6 \cdot a_{11} > S + 15 \\ a_8 \cdot a_9 < S + 39. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_6 \cdot a_{11} &= a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 \\ a_8 \cdot a_9 &= a_1^2 + 15a_1d + 56d^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 + 15a_1d + 50d^2 &= m \\ \cancel{5a_1 + 15a_1d} + 5a_1 + 10d + 15 &= n. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} m > n \\ m + 6d^2 < n + 24. \end{cases}$$

$m > n \Rightarrow m + 6d^2 < n + 24$  верно при  $6d^2 < 24 \Leftrightarrow d^2 < 4$ .  $d \in (-2; 2)$ .

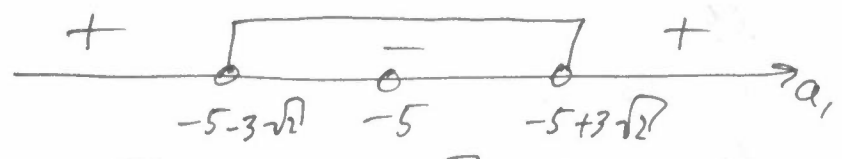
П.к. прогрессия возрастает, то  $d > 0$ , а т.к. все числа целые,

то  $d \in \mathbb{Z} \Rightarrow d = 1$ . (Из промежутка  $(0; 2)$  только 1 целое число).

$$a_1^2 + 15a_1 + 50 > 5a_1 + 10 + 15 \Leftrightarrow a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \Leftrightarrow (a_1 + 5)^2 > 0 \quad a_1 \neq -5.$$

$$a_1^2 + 15a_1 + 56 < 5a_1 + 10 + 39 \Leftrightarrow a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0.$$

$$a_1 = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 28}}{2} = -5 \pm 3\sqrt{2}. \text{ Проверим, что } -5 \in (-5 - 3\sqrt{2}; -5 + 3\sqrt{2})$$



$-5 - 3\sqrt{2} \approx -9,5$ , т.к.  $\sqrt{2} \approx 1,4 \approx 1,5$ .

- $-5 - 3\sqrt{2} \wedge -9$
- $5 + 3\sqrt{2} \vee 9$
- $43 + 30\sqrt{2} \vee 81$
- $30\sqrt{2} \vee 38$
- $1800 > 1444$

- $-5 - 3\sqrt{2} \wedge -10$
- $5 + 3\sqrt{2} \vee 10$
- $43 + 30\sqrt{2} \vee 10$
- $30\sqrt{2} \vee 57$
- $1800 < 2500 + 49 + 700$

$$-5 - 3\sqrt{2} < -9.$$

$$-5 - 3\sqrt{2} > -10.$$

$\Downarrow$   
 $a_{\min} = -9.$



11 (продолжение).

ЧИСТОВИК 2

$-5 + 3\sqrt{2} \approx 0,5$ , т.к.  $\sqrt{2} \approx 1,4 \approx 1,5$ .

$-5 + 3\sqrt{2} > -1$

$5 - 3\sqrt{2} < 1$ .

$43 - 30\sqrt{2} < 1$ .

$30\sqrt{2} > 42$

$1800 > 1764$ .

$-5 + 3\sqrt{2} > -1$

$-5 + 3\sqrt{2} > 0$

$5 - 3\sqrt{2} < 0$ .

$25 > 18$ .

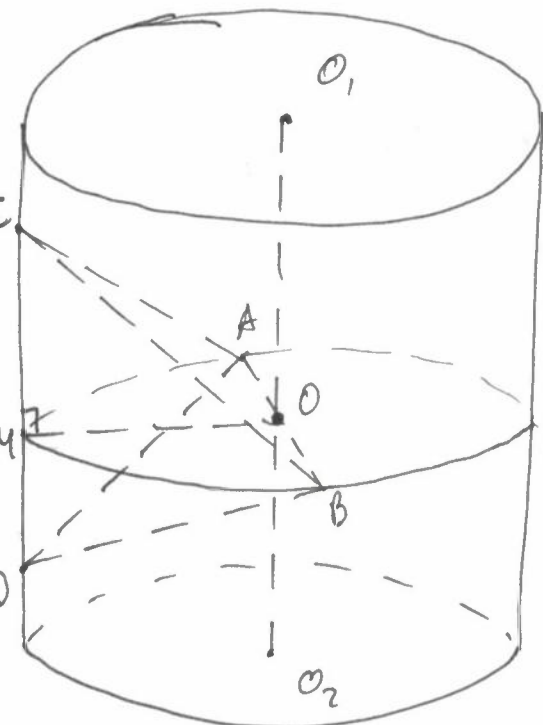
$-5 + 3\sqrt{2} < 0$ .

$a_{\max} = -1$ .

$a \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$ .

Ответ:  $a \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

12



Дано:

$O_1, O_2$  - ось цилиндра.

$CD \parallel O_1O_2$ .

$AB = 2$ .

$AC = CB = 7$ .

$AD = DB = 8$ .

$R_{\min}$  - минимальн.

Найти:

CD.

Решение:

- $DC \perp AB$ , но  $DC \parallel O_1O_2 \Rightarrow AB \perp O_1O_2 \Rightarrow AB$  - хорда окружности, радиус которой равен радиусу цилиндра.
- Радиус цилиндра минимальн, когда  $AB$  - его диаметр. Действительно, ведь если  $AB$  не диаметр, то  $d > AB$ . Получаем противоречие.

№2 (продолжение).

ЧИСТОВИК 3

$$3) OB = \frac{AB}{2} = R = 1.$$

~~$CO^2 + OB^2 = CB^2$~~

$$CO^2 + OB^2 = CB^2.$$

$$CO^2 = 49 - 1 = 48.$$

$$CM^2 + OM^2 = CO^2.$$

$$CM^2 = 48 - 1 = 47.$$

$$DO^2 + OB^2 = DB^2$$

$$DO^2 = 64 - 1 = 63$$

$$DM^2 + MO^2 = DO^2$$

$$DM^2 = 63 - 1 = 62.$$

$$4) CO = CM + DM = \sqrt{47} + \sqrt{62}.$$

Ответ:  $CO = \sqrt{47} + \sqrt{62}.$



# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101651**

ID профиля: **207907**

Вариант 20

21

$$\text{НОД}(a, b, c) = 10 = 2 \cdot 5.$$

$$\text{НОК}(a, b, c) = 2^{17} \cdot 5^{16}.$$

Т.к.  $\text{НОД} = 2 \cdot 5$ , то в  $a, b, c$  есть множители 2 и 5. Если двойка встречается в  $a$  1 или 17 раз (т.е. степень равна 1 или 17), то разбить можно единственным образом ( $2^1; 2^1; 2^{17}$ ).

Т.к. иначе на  $b$  будет степень не 1  $\rightarrow$  на  $c$  не 17  $\rightarrow$  НОК будет другим, но на место  $a$  можно поставить  $b$  или  $c$ .

Всего будет 3 варианта, а т.к. можно рассматривать это для степени 1 или 17, то всего  $2 \cdot 3 = 6$  вариантов. Теперь

рассмотрим случай, когда степени  $\in [2; 16]$ . Здесь есть 15 вариантов выбрать степени и всего  $15 \cdot 6 = 90$  вариантов, т.к.  $3! = 6$  расстановок чисел.  $\rightarrow$  всего  $90 + 3 \cdot 3 = 96$  вар.

Аналогично предыдущему для степеней 5.  $13 \cdot 6 + 3 + 3 = 84$ .

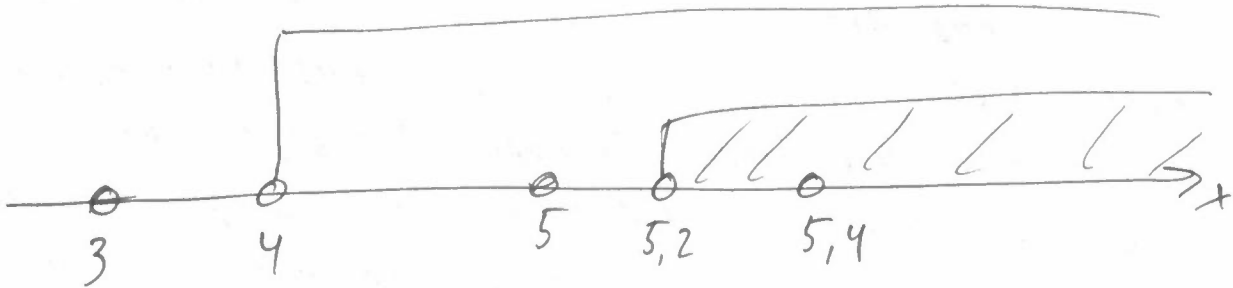
$$\text{Всего } 84 \cdot 96 = 8064.$$

Ответ: 8064

$\log_{\sqrt{2}(x-4)}(x-4) \quad \log_{(x-4)^2}(5x-26) \quad \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

ОДЗ:

$2x-8 > 0. \quad x > 4.$   
 $2x-8 \neq 1. \quad x \neq 4,5.$   
 $x-4 > 0. \quad x > 4.$   
 $(x-4)^2 \neq 1. \quad x \neq 3 \quad x \neq 5.$   
 $5x-26 > 0. \quad x > \frac{26}{5} = 5,2.$   
 $5x-26 \neq 1. \quad 5x \neq 27 \quad x \neq \frac{27}{5} = 5,4.$



①  $2 \log_{2x-8}(x-4) \cdot \frac{1}{2} \log_{x-4}(5x-26) \cdot 2 \log_{5x-26}(2x-8) = 2.$

Обозначим равные логарифмы за  $x_1$  и  $x_2$ , а 3-й за  $y$ .

$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y = x_1 + 1 \\ y = x_2 + 1 \end{cases}$

Из ①  $\Rightarrow \begin{cases} x_1^2 y = 2. \\ x_1 = y - 1 \Leftrightarrow y = x_1 + 1. \end{cases}$

$x_1^2(x_1+1) = 2.$   
 $x_1^3 + x_1 - 2 = 0.$   
 $x_1 = 1.$

$x_1^3 + 0x_1^2 + x_1 - 2 \mid x_1 - 1$

$\begin{array}{r} x_1^3 - x_1^2 \\ \hline x_1^2 + x_1 \\ -x_1^2 - x_1 \\ \hline 2x_1 - 2 \\ \hline 2x_1 - 2 \\ \hline 0. \end{array}$

$x_1^2 + x_1 + 2 = 0.$

$D < 0 \Rightarrow x_1 \notin \mathbb{R}$

корень уравнения  $x_1 = 1.$

По  $x_1$  - логарифм. подстановка:

$$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 1$$

$$-2x-8 = x^2 - 8x + 16.$$

$$x^2 - 10x + 24 = 0.$$

$$x = 6.$$

$$x = 4 \text{ отбрасывается.}$$

$$\log_{\frac{(5x-26)}{(x-4)^2}} = 1$$

$$x^2 - 8x + 16 = 5x - 26.$$

$$x^2 - 13x + 42 = 0.$$

$$x = 6.$$

$$x = 7.$$

$$\log_{\frac{(7x-8)}{5x-26}} = 1.$$

~~$$5x-26 = 4x^2 - 32x + 64.$$~~

~~$$4x^2 - 37x + 90 = 0.$$~~

~~$$x = 6.$$~~

~~$$x = 7.$$~~

$$5x-26 = 4x^2 - 32x + 64$$

$$4x^2 - 37x + 90 = 0$$

$$x \notin \mathbb{R}.$$

Проверка  $x=6$   $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{\frac{(5x-26)}{(x-4)^2}} = 1, 9.$

$$\log_{\sqrt{5x-26}}(7x-8) = ?$$

Ответ:  $x=6$

~2.

$$\log_{\sqrt{2(x-4)}}(x-4) \quad \log_{(x-4)^2}(5x-26) \quad \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$$

$$\sqrt{x-4} = a.$$

$$\sqrt{5x-26} = b.$$

ЧЕРНОВИК

$$\log_{\sqrt{2a}}(a) \quad \log_{a^4}(b) \quad \log_b(2a^2) = \log_b(2) + 2\log_b(a)$$

$$\frac{1}{\log_b(a^4)}$$

$$\frac{1}{4\log_b(a)}$$

~~$$(6 + 6 \cdot 15) \cdot 64$$~~

~~11/11~~

$$\begin{array}{r} 26 \\ +16 \\ \hline 42 \end{array}$$

~1

$$НОД = 10 = 2 \cdot 5.$$

$$НОК = 2^{17} \cdot 5^{16}.$$

$\log_2!$

П.к.  $НОД = 2 \cdot 5$ , то в  $a, b, c$  есть множители 2 и 5.

Если двояк встречается в ~~а~~ 1 или 17 раз, то тогда разбить степени можно единственными способами  $2^1; 2^1; 2^{17}$ , т.к. иначе на  $b$  будет степень  $16 \Rightarrow$  на  $c$   $17 \Rightarrow$   $НОК$  будет другим, но на место  $a$  можно поставить  $b$  или  $c \Rightarrow$  всего 3 варианта, а т.к. можно переставлять это для степеней 1 либо 17, то всего  $2 \cdot 3 = 6$  вариантов. Теперь рассмотрим случай, когда степени  $\in [2; 16]$  здесь есть 15 вариантов выбрать степень и всего ~~15~~ 15 вариантов выбора степеней.  $\Rightarrow$  всего  $90 + 3 + 3 = 96$  вар.

Аналогично предыдущему для степеней 5  $13 \cdot 6 + 3 + 3 = 84$ .

$$\text{вар. Всего } 84 \cdot 96 = 8064.$$

Ответ: 8064

21

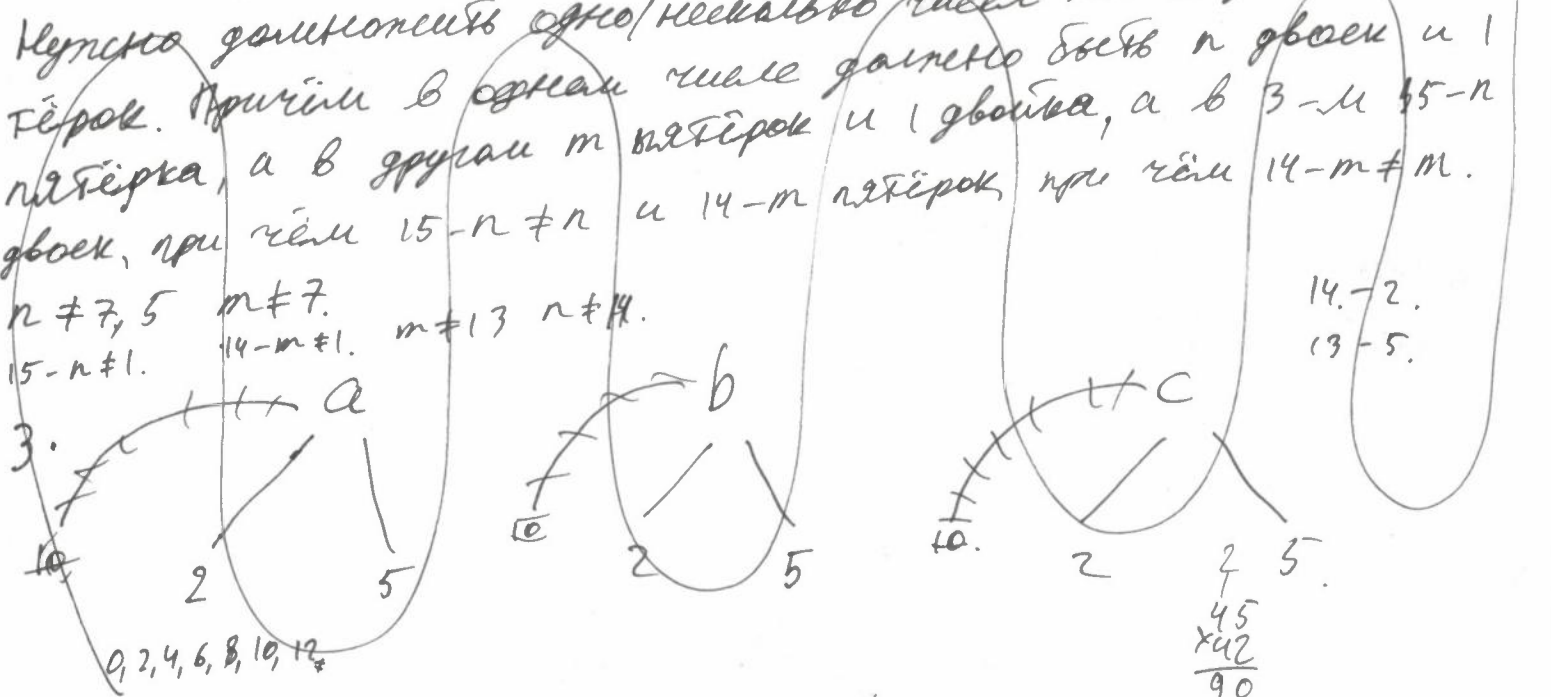
10 10 40. 8 6. 10 5. 15.  
2 5 25 8 5. 2 2 2 23. 2 5 5 3 5.

ЧЕРНОВИК 2

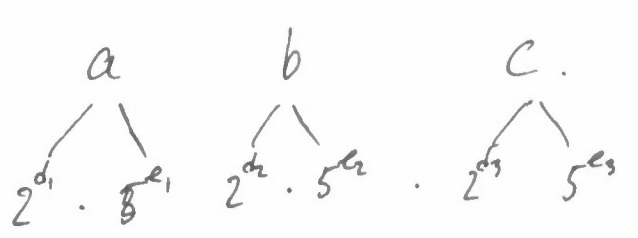
$НОД = 10 = 2 \cdot 5$

$НОК = 2^{17} \cdot 5^{16}$

П.к. НОК - произвед. всех простых дел. 1-го на неповт. дел. 2-го, 5-го. числа a, b, c можно представить в виде произв. степеней 2 и 5. При этом все 3 числа делятся на 10. Значит в каждом числе есть минимум одна 2 и минимум одна 5. Итак. Допустим  $a=b=c=10=2 \cdot 5$ . Для достижения  $НОК = 2^{17} \cdot 5^{16}$  нужно дополнить одно/несколько чисел на 16 двоек и 15 пятерок. При этом в одном числе должно быть n двоек и 1 пятерка, а в другом m пятерок и 1 двойка, а в 3-м и 5-м двоек, при этом  $15-n \neq n$  и  $14-m \neq m$ .



$n \neq 7, 5$     $m \neq 7$   
 $15-n \neq 1$     $14-m \neq 1$     $m \neq 13$     $n \neq 14$



$\sqrt[3]{180} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5}$   
 $\sqrt[3]{180} = 2 \sqrt[3]{45}$   
 $\sqrt[3]{180} = 2 \sqrt[3]{3 \cdot 3 \cdot 5}$   
 $\sqrt[3]{180} = 2 \sqrt[3]{15}$   
 $\sqrt[3]{180} = 2 \sqrt[3]{3 \cdot 5}$   
 $\sqrt[3]{180} = 2 \sqrt[3]{15}$

$d_1 + d_2 + d_3 = 17$ , при этом  $d_1 \geq 1, d_2 \geq 1, d_3 \geq 1$ .  
 $e_1 + e_2 + e_3 = 16$ , при этом  $e_1 \geq 1, e_2 \geq 1, e_3 \geq 1$ .

Допустим  $d_1 = 1$ , тогда  $d_2 + d_3 = 16$ .  $\Rightarrow$  при  $d_2 \geq 1$  и  $d_3 \geq 1$  есть 15 способов выбрать  $d_2$  и  $d_3$ . Повторить предыдущий шаг можно и для  $d_2$ , и для  $d_3$ .  $\Rightarrow$  всего существует способов выбрать  $d_1, d_2, d_3$

$3 \cdot 15 = 45$ .  
Аналогично предыдущему есть  $3 \cdot 15 = 45$  способов выбрать  $e_1, e_2, e_3$ .  
Всего способов выбрать  $d_1, d_2, d_3, e_1, e_2, e_3$   $45 \cdot 42 = 1890$ .



~~HOA~~ n1.

YEPHOBUK 3

$$HOA(a, b, c) = 10 = 2 \cdot 5$$

$$HOK(a, b, c) = 2^{17} \cdot 5^{16}$$

n2

$$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) \quad \log_{(x-4)^2}(5x-26) \quad \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$$

$$\sqrt{2x-8} = a = \sqrt{2(x-4)} = \sqrt{2b}$$

$$x-4 = b$$

$$\sqrt{5x-26} = c$$

$$\log_a(b) \quad \log_{b^2}(c^2) \quad \log_c(a)$$

$$\log_{b^2}(c^2) = \log_b(c)$$

$$\begin{cases} \log_a(b) = \log_c(a) \\ \log_b(c) = \log_a(b) + 1 = \log_c(a) + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_a(b) = \log_b(c) \\ \log_c(a) = \log_a(b) + 1 = \log_b(c) + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_b(c) = \log_c(a) \\ \log_a(b) = \log_b(c) + 1 = \log_c(a) + 1 \end{cases}$$

$$\log_{\sqrt{2b}}(b) = \frac{1}{\log_{\sqrt{2b}}(c)}$$

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2b}}(b) = \log_c(\sqrt{2b}) \leftarrow \\ \log_b(c) = \log_{\sqrt{2b}}(b) + 1 = \log_c(a) + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2b}}(b) = \log_b(c) \\ \log_c(\sqrt{2b}) = \log_a(b) + 1 = \log_b(c) + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_b(c) = \log_c(\sqrt{2b}) \\ \log_{\sqrt{2b}}(b) = \log_b(c) + 1 = \log_c(\sqrt{2b}) + 1 \end{cases}$$