Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

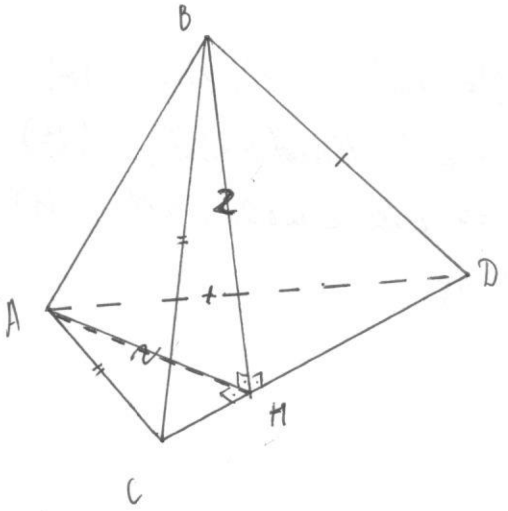
Шифр: **21101632**

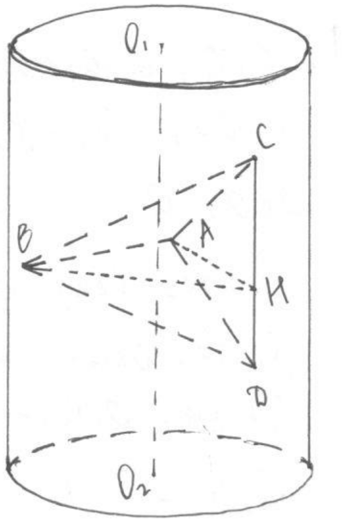
ID профиля: **97697**

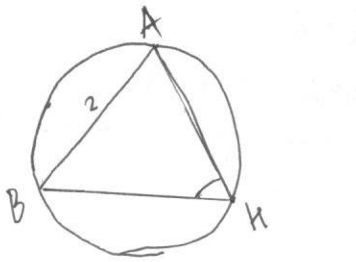
Вариант 20

Вариант 20 (Чистовик 1)

№2







Дано: $ABCD$ – тетраэдр, $AB = 2$; $AC = BC = 7$; $AD = BD = 8$, $R = R_{min}$, O_1O_2 – ось цилиндра, $CD \parallel O_1O_2$.
Найти: CD

Решение:

1. Рассмотрим $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$.
$\triangle ACD = \triangle BCD$ по трём сторонам ($AC = BC$, по условию, $AD = BD$, по условию, CD – общая).
В равных треугольниках все элементы равны. BH_1 – высота в $\triangle BCD$, проведенная к CD. AH_2 – высота в $\triangle ACD$, проведенная к CD. $BH_1 = AH_2$; $AH_2 \cap BH_1 = H$. ($AH = BH$)

2. По т. синусов $\triangle ABH$ (вписан в окружность, лежащую в плоскости, параллельной основаниям цилиндра, т.к. $AH \perp CD$ и $BH \perp CD$ и $AH \cap BH = H$, $CD \parallel O_1O_2$, значит, радиус описанной около $\triangle ABH$ окружности равен радиусу цилиндра)
$\frac{AB}{\sin\angle AHB} = 2R \iff R = \frac{AB}{2\sin\angle AHB}$. По условию, $R = R_{min}$, а т.к. AB фиксированное и $0 \leq \sin\angle AHB \leq 1$, то $\sin\angle AHB = 1$, $\angle AHB = 90°$. $R = 1$ (радиус цилиндра).

3. Значит, $\triangle AHB$ – прямоугольный ($\angle AHB = 90°$) и равнобедренный ($AH = BH$).
По т. Пифагора в $\triangle ABH$: $AH^2 + BH^2 = AB^2 \iff 2AH^2 = AB^2 \iff AH = \frac{AB}{\sqrt{2}}$ ~~BH~~

$AH = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

4. Рассмотрим $\triangle ACH$: (прямоугольный, т.к. AH – высота в $\triangle ACD$ и $\angle AHC = 90°$).
По т. Пифагора: $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{49 - 2} = \sqrt{47}$.

5. Рассмотрим $\triangle AHD$ (прямоугольный, т.к. AH – высота в $\triangle ACD$ и $\angle AHD = 90°$).
По т. Пифагора: $HD = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{64 - 2} = \sqrt{62}$.

6. $CD = CH + HD = \sqrt{47} + \sqrt{62}$

Ответ: $\sqrt{47} + \sqrt{62}$.

Чистовик 2

№1

$S = a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$

$a_6a_{11} > S+15$

$a_8a_9 < S+39$

$a_1 - ?$

$a_6a_{11} = (a_1+5d)(a_1+10d) = a_1^2+15a_1d+50d^2$; (*)

$a_8a_9 = (a_1+7d)(a_1+8d) = a_1^2+15a_1d+56d^2$; (#)

$a_8a_9 - a_6a_{11} = 6d^2 \iff a_8a_9 = a_6a_{11}+6d^2$ ... (1)

$S+39 > a_8a_9 > a_6a_{11} > S+15$

$S+39 > a_8a_9$ — (1)

$S+39 > a_6a_{11}+6d^2$ ... (2)

$a_6a_{11} > S+15 \quad |+24$

$24+a_6a_{11} > S+39$ ... (3)

~~$S+39 > a_8a_9 > a_6a_{11} > S+15$~~

Из (2) и (3) $24+a_6a_{11} > a_6a_{11}+6d^2$ $\quad (24+a_6a_{11} > S+39 > a_6a_{11}+6d^2)$

$24 > 6d^2$

$d^2 < 4$, т.к. прогрессия возрастающая то

$0 < d < 2$, а т.к. прогрессия состоит только из целых чисел, то $d=1$, (иначе $a_2 = a_1+d$ не будет целым)

$S = \frac{2a_1+4d}{2}\cdot 5 = (a_1+2d)5 = (a_1+2)5 = 5a_1+10$ ... (4)

$a_6a_{11} > S+15$, из (4) и (*) получим: $a_1^2+15a_1+50 > 5a_1+10+15 \iff$

$\iff a_1^2+10a_1+25 > 0 \iff (a_1+5)^2 > 0 \iff a \in (-\infty;-5)\cup(-5;+\infty)$ ... (5)

$a_8a_9 < S+39$, из (4) и (#) получим: $a_1^2+15a_1+56 > 5a_1+10+39 \iff$

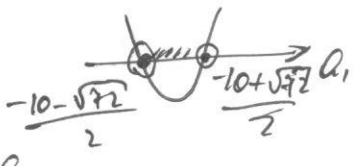
$\iff a_1^2+10a_1+7 < 0$

$D = 100-28 = 72$; $\quad a_1 = \frac{-10\pm\sqrt{72}}{2}$;

$8 < \sqrt{72} < 9 \qquad -9 < -\sqrt{72} < -8$

$-2 < -10+\sqrt{72} < -1 \qquad -19 < -10-\sqrt{72} < -18$

$-1 < \frac{-10+\sqrt{72}}{2} < -0{,}5 \qquad -9{,}5 < \frac{-10-\sqrt{72}}{2} < \cancel{-18}\ -9$



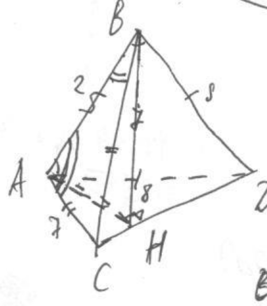
Т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$, то

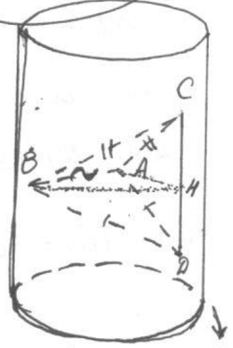
$a_1 \in [-9;-1]$, учитывая (5) получим,

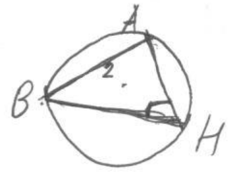
~~$a_1 \in$~~ $a_1 = \{9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1\}$

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$.

Черновик 1







$\triangle BCD = \triangle ACD$

$\frac{AB}{\sin\angle AHB} = 2R$

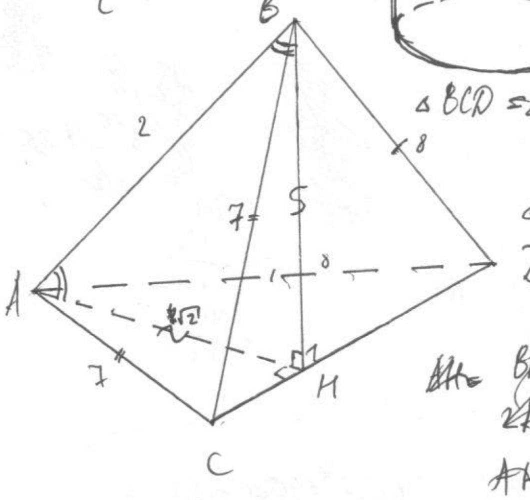
$R = \frac{AB}{2\sin\angle AHB}$, чтобы $R = R_{min}$,

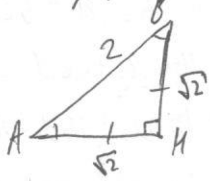
нужно, чтобы $\sin\angle AHB = 1$

$\angle AHB = 90°$

$R = \frac{2}{2} = 1.$

AB = диаметр.





$AB^2 = 2AH^2$

$AH = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\cancel{BH^2 + AH^2 = AB^2}$

$\cancel{2AH^2 = AB^2}$

$\cancel{AH = \frac{1}{\sqrt{2}} AB = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}}$

$\cancel{CH = \sqrt{7^2 - 8^2}}$

$\cancel{HD = 8^2 -}$

$CH = \sqrt{7^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{49-2} = \sqrt{47}$

$HD = \sqrt{8^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{64-2} = \sqrt{62}$

$62 \mid 2$, 31

$CD = CH + HD = \sqrt{47} + \sqrt{62}$

---

① $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

$a_6 a_{11} > S + 15$

$a_8 a_9 < S + 39$

$a_1 - ?$

$a_6 a_{11} = (a_1 + 5d)(a_1 + 10d) = a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2$

$a_8 a_9 = (a_1 + 7d)(a_1 + 8d) = a_1 + 15a_1 d + 56d^2$

$S = \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = (a_1 + 4d)5$

$a_8 a_9 - a_6 a_{11} = 6d_1^2 \Leftrightarrow d_1^2 = \frac{a_8 a_9 - a_6 a_{11}}{6}$

$\cancel{d_1 = \sqrt{\frac{a_8 a_9 - a_6 a_{11}}{6}}}$

$a_8 a_9 - a_6 a_{11}$

$\wedge \quad \vee$

$S+39 \quad S+15$

$S + 39 > a_8 a_9 > a_6 a_{11} > S + 15$

$S + 39 > a_6 a_{11} + d_1^2 > a_6 a_{11} > S + 15$

$S+39 \quad \vee \qquad S+15 \quad \wedge$

$S = (a_1 + 4d)5$

$S = 5a_1 + 20d$

$S - 5a_1 = 20d$

$d = \frac{S - 5a_1}{20}$, $d^2 = \frac{S^2 - 10a_1 S + 25a_1^2}{400}$

$\frac{S^2 - 10a_1 S + 25a_1^2}{200} = \frac{a_8 a_9 - a_6 a_{11}}{3} \Leftrightarrow 3S^2 - 30a_1 S + 75a_1^2 = 200a_8 a_9 - 200a_6 a_{11}$

Черновик 2

1 $S = a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$

$a_6 a_{11} > S+15$

$a_8 a_9 < S+39$

$a_1 - ?$

$a_n = a_1 + d(n-1)$

$S = \frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$

$S = \frac{2a_1+4d}{2}\cdot 5$

$S = (a_1+2d)5$

$a_6 = a_1+5d$

$a_{11} = a_1+10d$

$a_8 = a_1+7d$

$a_9 = a_1+8d$

$a_6\cdot a_{11} = (a_1+5d)(a_1+10d)$

$184 = 4\cdot 46 = 23\cdot 2\cdot 4 =$
$= 2\sqrt{46}$

$3^2\cdot 5^2 = 9\cdot 25 = 225$

$22\cdot 22 = 484$

184

$a_6\cdot a_{11} > S+15$

$(a_1+5d)(a_1+10d) > (a_1+2d)5+15$

$a_1^2 + 10a_1d + 5a_1d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15;$

$a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15;$

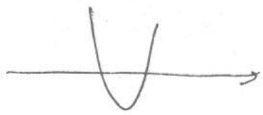
$a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 - 5a_1 - 10d - 15 > 0;$

$a_1^2 + a_1(15d-5) + 50d^2 - 10d - 15 > 0$

$D = (15d-5)^2 - 200d^2 + 40d + 60 = 225d^2 - 150d + 25 - 200d^2 + 40d + 60 =$

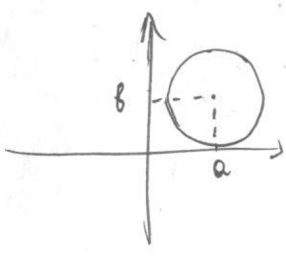
$= 25d^2 - 110d + 75 > 0$; $5d^2 - 22d + 15 > 0$

$D = 484 - 300 = 184$; $d = \frac{22\pm\sqrt{184}}{10}$ $d \in (0;$



$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b;13)\end{cases}$ – задает окружность с центром $(a;b)$; $r=\sqrt{13}$

окр. с ~~радиусом~~ центром $(a;b)$.



$-4a-6b=13$

(черновик 3)

$S+39 > a_6 a_{11} + d_1^2$

$a_6 a_{11} > S+15$

$a_6 a_{11} + 24 > S+39$

$\to a_6 a_{11} + 24 > a_6 a_{11} + d_1^2$

$24 > d^2$

$\cancel{d^2\ d\ \sqrt{12}}$

$\cancel{0<d<\sqrt{12}}$

$0 < d < \sqrt{24}$

$24 \cdot 6 = 144$

$\cancel{D=}$ $\quad a_2 = a_1 + d$

$a_6 a_{11} = a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2 = a_1^2 + 15a_1 + 50$

$S = \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = (a_1 + 2d)5 = 5a_1 + 10$

$40 - 15 = 25$

$a_1^2 + 15a + 50 > 5a_1 + 10 + 15$

$a_1^2 + 10a + 25 > 0$

$(a_1 + 5)^2 > 0$

$a_1 \in (-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$

$a_1 \neq -5$

$a_5 a_9 = a_1^2 + 13a_1 d + 36d^2 = a_1^2 + 15a_1 + 56$

36
-49
$\cancel{?}$

$46 + 4 = 184$

$a_5 a_9 < S + 39$

$a_1^2 + 15a_1 + 56 < 5a_1 + 10 + 39$

$\cancel{a_1^2 + 10a_1 + 46 < 39}$

$\cancel{D = 10a}$

$a_1^2 + 15a_1 + 56 < 5a_1 + 10 + 39$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

$D = 100 - 28 = 72; \quad a_1 = \frac{-10 \pm \sqrt{72}}{2} =$

$\cancel{-20}$

$8 < \sqrt{72} < 9$

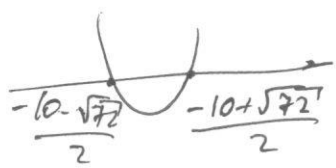
$-2 < -10 + \sqrt{72} < -1$

$-1 < \frac{-10 + \sqrt{72}}{2} < \frac{1}{2}$

$-9\ \ 2 - \sqrt{72} < -8$

$-19 < -10 - \sqrt{72} < -18$

$-\frac{19}{2} < \frac{-10 - \sqrt{72}}{2} < -9$



$-9, -8, \dots, -6, -4, -3, \dots, -1$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101632**

ID профиля: **97697**

Вариант 20

Чистовик 1

№4

$НОД(a;b;c) = 10 = 2\cdot5$

$НОК(a;b;c) = 2^{17}\cdot5^{16}$

~~В~~ Каждое из чисел a, b и c должно содержать множители 2^1 и 5^1. Одно или ~~более~~ несколько из чисел должно содержать множитель 2^{17}, а также одно число ~~число должн~~ или несколько должны содержать 2^{16}. При этом ~~у одно~~ хотя бы у 1 из чисел при разложении на простые множители 2 должна быть только в 1 степени, иначе НОД не будет равен $2\cdot5$. Аналогично с 5. Получаем, что число способов выбрать, в какой степени будет содержаться 2 в числе, будет равно: $3\cdot2\cdot16$. Первая 3 в произведении отвечает за выбор одного из 3-ех чисел (a, b, c), в котором содержится 2^{16}. Вторая 2 в произведении отвечает за выбор одного из 2-ех чисел ~~(a, b или c)~~, в котором содержится 2^1. 16 отвечает за выбор степени 2 в последнем оставшемся числе (степень двойки 0 не берем, иначе НОД будет другим).

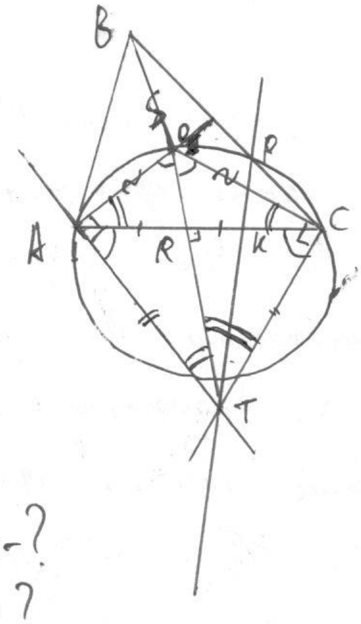
$3\cdot2\cdot16 = 96$

Теперь аналогично рассуждаем для выбора степени 5 в каждом из чисел. Количество способов такого выбора: $3\cdot2\cdot15$. Первая тройка в произведении отвечает за выбор одного из 3-ех чисел (a, b, c), в котором содержится 5^{16}. Вторая двойка отвечает за выбор одного из двух оставшихся чисел, в котором содержится 5^1. 15 отвечает за выбор степени числа 5 в последнем числе. $3\cdot2\cdot15 = 90$.

Всего $90\cdot96 = 8640$ пар.

Чистовик 2

№6



S_{ABC} - ?
AC - ?

1. Рассмотрим четырехугольник AOCT.
$\angle OAT + \angle OCT = 180^\circ \Rightarrow AOCT$ - ~~равн~~ вписанный.
($AT \perp OA$, т.к. AT - касательная, OA - радиус описанной окружности ω, аналогично $CT \perp OC$)

2. Д.п. OT.; $TO \cap AC = R$

3. $\triangle AOT = \triangle COT$, т.к. OT - общая, $AO = OC$, как радиусы ω и $\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$, значит, $AT = CT$ и $\angle ATO = \angle CTO$.

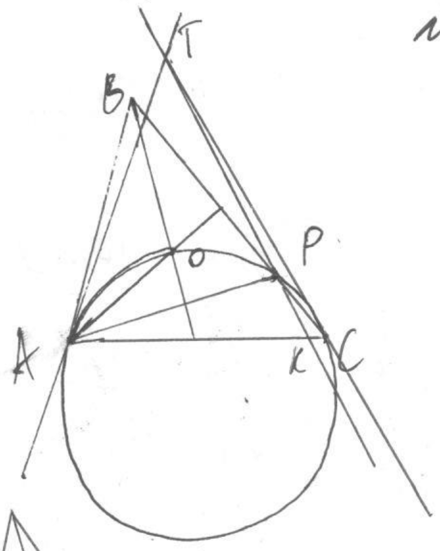
4. $\triangle ART = \triangle CRT$, т.к. TR - общая, $\angle ATR = \angle CTR$ и $AT = CT$, значит, $\angle RAT = \angle RCT$ и $AR = RC$.

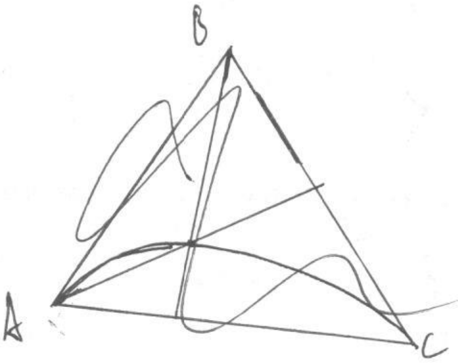
5. $\triangle AOC$ - равнобедренный, т.к. $AO = OC$ как радиусы. OR - биссектриса, медиана, высота.

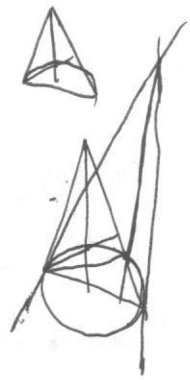
6. Т.к. AOCT - вписан, что $\angle AOT = \angle ACT = \angle COT = \angle CAT$ и $\angle ATO = \angle OAC = \angle OTC = \angle ACO$

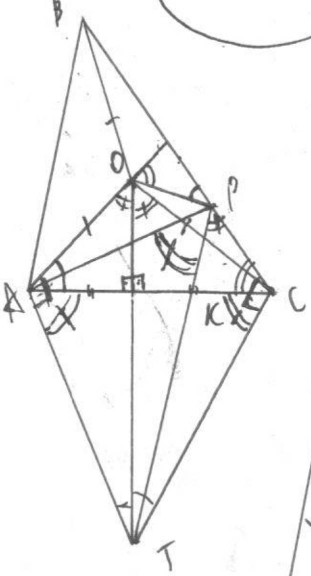
Черновик 1

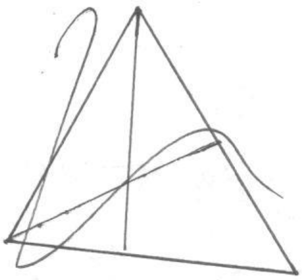
№6

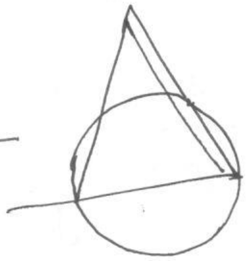


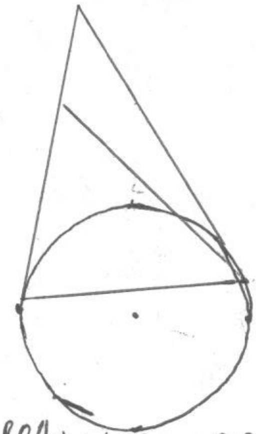


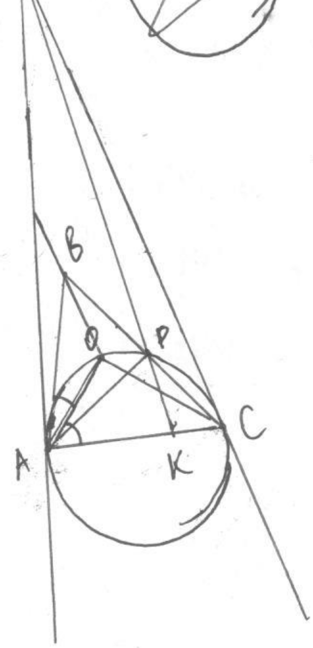


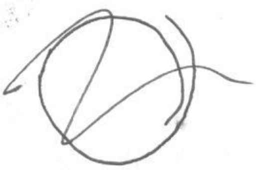












$S_{ABC} =$

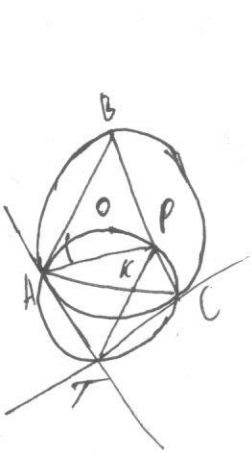
$= \cancel{\frac{1}{2} AO^2 (\sin\angle BOA +}$

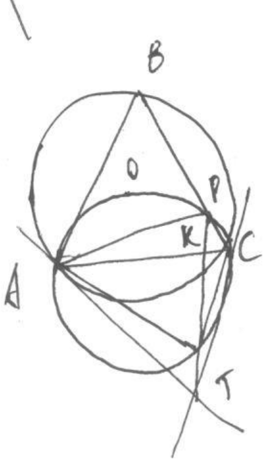
$S_{ABC} = \frac{1}{2} AO^2 (\sin\angle BOA + \angle AOC + \angle BOC)$

$S_{APK} = 10$

$S_{CPK} = 8$

$AT = CT$





Черновик 2

№4

$НОД(a; b; c) = 10 = 2 \cdot 5$

$НОК(a; b; c) = 2^{17} \cdot 5^{16}$

$a = 2 \cdot 5 \cdot n_a$

$b = 2 \cdot 5 \cdot n_b$

$c = 2 \cdot 5 \cdot n_c$

$2^{16} \cdot 5^{15}$

$\cancel{2^{16}}\ \cancel{2^{13}}\ \cancel{2^{10}}$

Выбрать, какое из чисел будет содержать 2^{16}

$2^{\alpha};\ \alpha = \{0; ...; 16\}$

$\cancel{3 \cdot 2 \cdot 18}\ 3 \cdot 3 \cdot 16 = 16 \cdot 9$

Выбрать 5^{15}

$3 \cdot 3 \cdot 15 = 15 \cdot 9$

$16 \cdot 9 \cdot 15 \cdot 9 = 19440$

$96 \cdot 90 = 8640$

$16 \cdot 6 = 96$; $15 \cdot 16 = 240$; $240 \cdot 81 = 19440$

Ответ: 19440.

$5 \cdot 2^3;\ 2^{16} \cdot 5^{15};\ 5^3 \cdot 2$

№6. $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$5x - 26 > 0$ $\quad x > 5,2$

$x - 4 > 0$ $\quad x > 4$

$2x - 8 > 0$ $\quad x > 4$

$2\log_{2x-8}(x-4) = \frac{1}{2}\log(5x-26)$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26) = \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\log_{(5x-26)}(x-4)}$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = 2\log_{5x-26}(2(x-4)) = 2\log_{5x-26} 2 + 2\log_{(5x-26)}(x-4)$

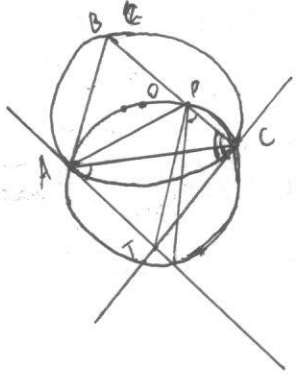
$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \frac{1}{\log_{(x-4)}\sqrt{2x-8}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\log_{(x-4)} 2x-8} = \frac{1}{\frac{1}{2}\log_{(x-4)} 2 + \frac{1}{2}\log_{x-4} x-4}$

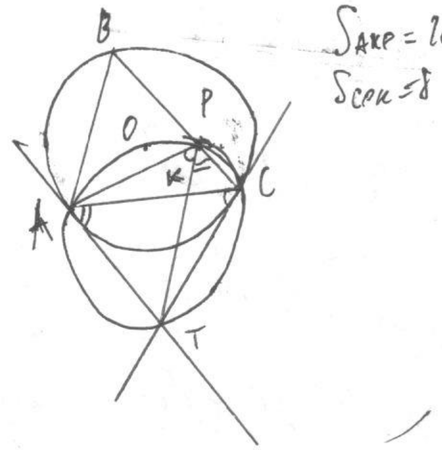
$= \frac{1}{\frac{1}{2}\log_{(x-4)} 2 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{\log_{(x-4)} 2 + 1}$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26) = 2\log_{(x-4)}(5x-26) = \frac{2}{\log_{(5x-26)}(x-4)}$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = 2\log_{5x-26}(2 \cdot (x-4)) = 2\log_{5x-26} 2 + 2\log_{5x-26}(x-4)$

Черновик 3





$S_{AKP} = 20$

$S_{CPK} = 8$

$S_{APC} = 18$

$80x^2 = RK \cdot KT$

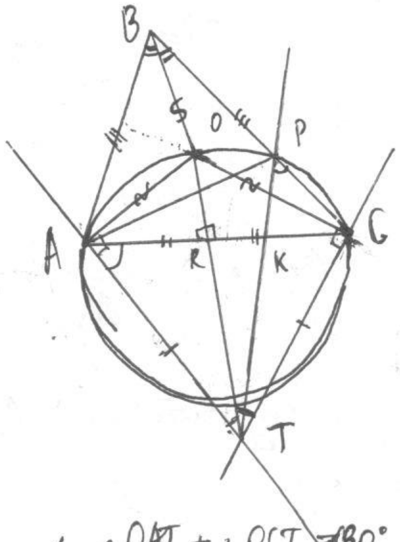
$AK \cdot KC = RK \cdot KT$

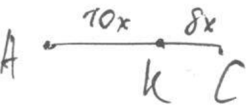
$OR \cdot RT = AR \cdot RC$

$OR \cdot RT = 81x^2$

$OR =$

$OR \cdot AC = 18$



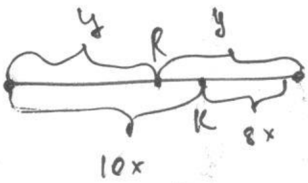


$\triangle$ $\angle OAC + \angle OCT = 180°$

$AOCT$ – вписан

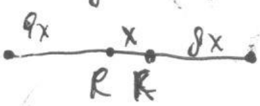
$\triangle AOT = \triangle COT \Rightarrow \angle ATO = \angle CTO$

$\triangle ART = \triangle CRT \Rightarrow AR = CR$



$18x = 2y$

$y = 9x$



Черновик 4

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 2\log_{2(x-4)}(x-4) = 2\frac{1}{\log_{(x-4)}2(x-4)} =$

$= 2\cdot\frac{1}{\log_{(x-4)}(x-4)+\log_{(x-4)}2} = 2\cdot\frac{1}{1+\log_{x-4}2};$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26) = \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) =$

$= 2\log_{(5x-26)}(2x-8) = 2\log_{(5x-26)}(x-4) + 2\log_{5x-26}2.$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$x-4 = 2x-8$

$x = 12$

$24-8=16;$

$60-24=36$