Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101611**

ID профиля: **868337**

Вариант 20

вариант - 20. Чистовик. 1

№1.

$S = a_1 + a_2 \dots + a_5 = 5a_1 + 10d$

прогрессия возрастающая. $\Rightarrow d > 0$

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_1 + 2d$

числа целые $\Rightarrow d$ - целое

A

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\begin{cases} a_6 \cdot a_{11} > S + 15 \\ a_8 \cdot a_9 < S + 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1+5d)(a_1+10d) > 5a_1 + 10d + 15 \\ (a_1+7d)(a_1+8d) < 5a_1+10d+39 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15 \\ a_1^2 + \cancel{8a_1d + 7a_1d}\ 15a_1d + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 6d^2 < 24 \Rightarrow \cancel{|d| < 4}\ d^2 < 4 \Rightarrow |d| < 2$

d может быть ~~...~~ = ~~...~~

~~...~~ равен только $\underline{1}$. $\underline{d = 1}$

$$\begin{cases} (a_1+5)(a_1+10) > 5a_1 + 25 \\ (a_1+7)(a_1+8) < 5a_1 + 49 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 5a_1 + 50 > 5a_1 + 25 \\ a_1^2 + \cancel{...}\ 15a_1 + 56 < 5a_1 + 49 \end{cases}$$

21101611 (U868337 M1297419)

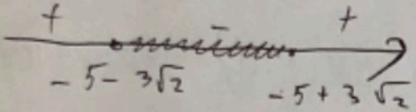
чистовик (2)

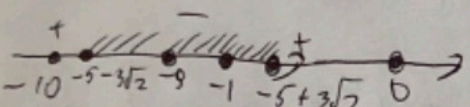
$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a_1+5)^2 > 0 \text{ — при любых } a_1 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases}$$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

$\sqrt{D} = \sqrt{100 - 28} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

$a_1 = \dfrac{-10 \pm 6\sqrt{2}}{2} = -5 \pm 3\sqrt{2}$



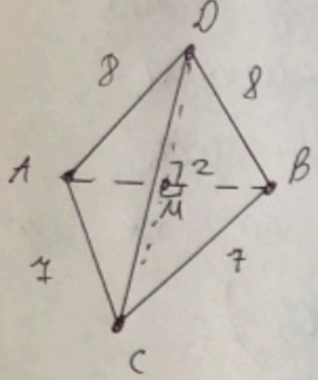


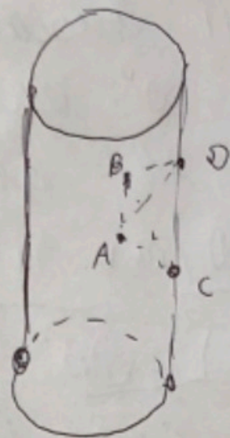
$\Downarrow$

$a_1 = -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1$, т.к. все члены ар-й пр-ии целые при $d = 1$

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1$.

В – 20 Задача №2. Чистовик ③





Решение.

1. М – середина АВ. $CM \perp AB$ (АВС – р/б)

$DM \perp AB$ (ADB – р/б). $\Rightarrow$ $CD \perp AB$ (т. о 3-х перпендикулярах).

2. Радиус цилиндра уменьшается с увеличением $\angle CMD$, где М – середина АВ.

3. т.к. $AB \le$ диаметру цилиндра, то минимальный диаметр не меньше 2, значит минимальный радиус цилиндра $= \frac{\text{диаметр}}{2} = 1$.

4. Тогда AB - диаметр.

А $CD \perp AB$, найдем на CD такую точку N, что $(NAB) \parallel$ основанию цилиндра.

Тогда $\angle ANB = 90°$ опирается на диам.

$AN = BN \Rightarrow AN = BN = \sqrt{2}$, по т.е Пиф.

Тогда ($(ANB) \perp CD$, т.к. $\parallel$ основанию)

Тогда $DN = \sqrt{8^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{DB^2 - BN^2} = \sqrt{62}$

а $CN = \sqrt{CB^2 - BN^2} = \sqrt{49 - 2} = \sqrt{47}$

тогда CD может быть равна $DN + CN =$

$= \sqrt{62} + \sqrt{47}$

Ответ: $\sqrt{62} + \sqrt{47}$

$a_2 = a_1 + d$ $\qquad$ $S = a_1 \cdot 5 + 10d$ $\qquad$ $\underline{S = 5a_1 + 10d}$ $\qquad$ черновик.

$a_3 = a_1 + 2d$

$a_4 = a_1 + 3d$ $\qquad$ $\frac{S}{5} = a_1 + 2d$

$a_5 = a_1 + 4d$

$a_6 = a_1 + 5d$ $\qquad$ $\frac{S}{5} = a_3$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_8 = a_1 + 7d$

$a_9 = a_1 + 8d$

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+10d) > 5a_1 + 10d + 15 \\ (a_1+7d)(a_1+8d) < 5a_1 + 10d + 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1d + 5a_1d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15 \\ a_1^2 + 8a_1d + 7a_1d + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39 \end{cases}$$

$5+15 \cancel{>} \cancel{8+3}.$

$5+15 < 5+39$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15 \\ \quad\wedge \qquad\qquad\qquad \wedge \\ a_1^2 + 15a_1d + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39 \end{cases}$$

$\cancel{a_8 a_9}$

$6d^2 < 24$

$|d| < 4$

$d = \underline{0; 1; 2; 3}$

$-5 + 3\sqrt{2} \approx -0,7...$

$-5 - 3\sqrt{2} \approx -9,...$

$+ \quad - \quad +$

$-9... \quad -0,7..$

$a_1 = -9; -8; -7;$

$-2; -1 \quad -6; -5; -4; -3$

$a_6 a_{11} > S+15$ $a_8 a_9 < S+39$ черновик

$\cancel{S = a_1 + 4d}$ $a_2 = a_1 + d$

$a_5 = a_1 + 4d$

$S = 5a_1 + 10d$ $a_4 = a_1 + 3d$

$a_3 = a_1 + 2d$

$$\begin{cases} (a_1+8d)(a_1+7d) < 5a_1+10d+39 \\ (a_1+5d)(a_1+10d) > 5a_1+10d+15 \end{cases}$$

$a_2 = a_1 + d$

$a_1 = a_1$

$a_6 = a_1 + 5d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$$\begin{cases} a_1^2 + 7a_1d + 8a_1d + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39 \\ a_1^2 + 10a_1d + 5a_1d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15 \end{cases}$$

$a_8 = a_1 + 7d$

$a_9 = a_1 + 8d$

$a_1 + 5d$

a_1^2

$3\sqrt{2}$ 5

25

$S = 5(a_1 + 2d)$

$a_6 = \frac{S}{5} + 3d$

$\frac{S^2}{25} + \cancel{\frac{8Sd}{5} + 3Sd}$

$a_{11} = \frac{S}{5} + 8d$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1d + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39 \\ a_1^2 + 15ad_1 + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15 \end{cases}$$

$a >$

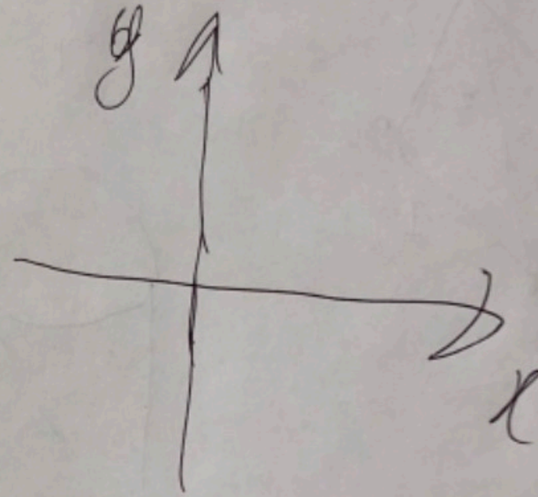
$a_1^2 + 15ad_1 + 50d^2 = a$

$a + 6d^2$

21101611 (U868337 M1297419)

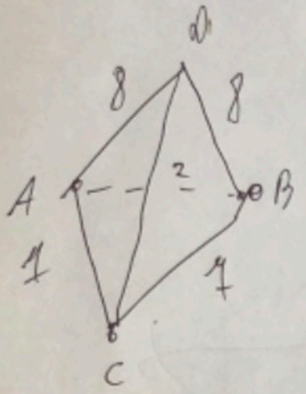
черновик.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b;13)\end{cases}$$



б2.

черновик.



либо на AD

либо

решение:

AB ⊥ CD , но

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

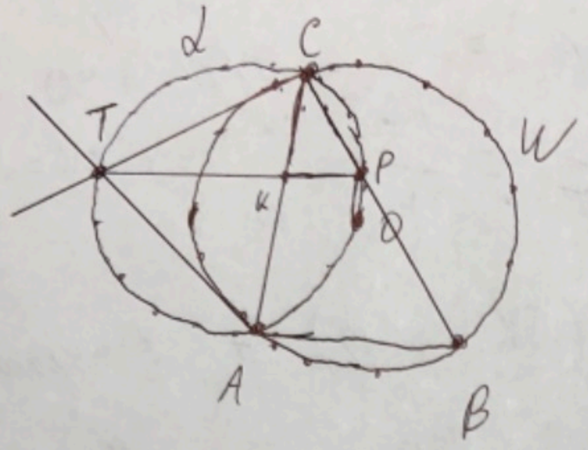
Шифр: **21101611**

ID профиля: **868337**

Вариант 20

вариант – 20.   Чистовик   1

задача №6.



$S_{\triangle APK} = 10$

$S_{CPK} = 8$

две окр-ти: α и w

а) 1. •O и •C и •A принадлежат одной окр-ти, -α
$\angle OCT = 90°$ (кас-ая) ; $\angle OAT = 90°$ (кас-я AT)
=> •T лежит на α, причем PT – диаметр.
2. CPOA – вписан в α, причем $\angle CPA = \angle COA$,
т.к. оба угла лежат на CA, в одной окр-ти α.
3. $\angle COA$ – центральный угол лежащий на AC в окр-ти W, в ~~окр-та~~ лежит на ок-ти w =>
$\angle COA = 2\angle ABC$, тогда $\angle CPA = 2\angle ABC$.
4. $\angle CPA$ = ~~$\angle ABC$~~ $\angle PBA + \angle PAB$, т.к. ~~$\angle APB = 180$~~ $- \angle PAB$
$\angle APB = 180 - \angle PAB - \angle PBA$, а $\angle CPA = 180° - \angle APB$.
тогда $\angle PBA = \angle ABC$ $\angle PBA + \angle PAB = 2\angle ABC$ =>
=> $\angle PAB = 2\ ABC$ => $\triangle APB$ – р/б

Чистовик ②

тогда $P \in$ сер. перпендикуляру к AB,
т.о $\triangle ABC$ вписанный в w с центром O,
тогда $PO \perp AB \Rightarrow \angle TPO = 90 \Rightarrow TP \parallel AB$

5. $\frac{S_{CPK}}{S_{APK}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = \frac{h \cdot \frac{1}{2} \cdot CK}{h \cdot \frac{1}{2} \cdot KA} \Rightarrow CK = 4x$, $KA = 5x$

$\triangle CPK \sim \triangle CBA$ ($PK \parallel AB$) $\Rightarrow$ k подобия $= \frac{4x}{9x} = \frac{4}{9}$

$\frac{S_{CPK}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{16}{81}$, $S_{CPK} = 8$ $\frac{8}{S_{ABC}} = \frac{16}{81} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{81 \cdot \cancel{8}}{\cancel{16}\,2} = \underline{40,5}$

Ответ: 40,5

б)

№5. вариант-20 Чистовик. (3)

$$\lg_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 2\lg_{(2x-8)}(x-4) = 2\frac{\lg(x-4)}{\lg(2x-8)} = a$$

$$\lg_{(x-4)^2}(5x-26) = \frac{1}{2}\lg_{(x-4)}(5x-26) = \frac{\lg(5x-26)}{2\lg(x-4)} = b$$

$$\lg_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = 2\lg_{(5x-26)}(2x-8) = \frac{2\lg(2x-8)}{\lg(5x-26)} = c$$

$a \cdot b \cdot c = 2$, у нас должно быть что два равные, а одно больше другого на 1

$z \cdot z \cdot (z+1) = 2$

$z^3 + z^2 - 2 = 0$

$z^3 + z^2 = 2$

строго $\uparrow$ const

$\Downarrow$

корень только 1

$z = 1$,

тогда либо $a=1$; либо $b=1$; либо $c=1$

ОДЗ $\begin{cases} x-4>0 \\ 2x-8>0 \\ 5x-26>0 \\ 2x-8\neq 1 \\ 5x-26\neq 1 \\ (x-4)^2\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>4 \\ x\neq 4{,}5 \\ x>5{,}2 \\ x\neq 5 \\ x\neq 5{,}4 \end{cases}$

$\Downarrow$

$x \in (5{,}2; 5{,}4) \cup (5{,}4; +\infty)$

I. $a=1$ $2\lg_{(2x-8)}(x-4) = 1$

$2x-8 = x^2-8x+16$

$x^2-10x+24=0$

$x=6$

$x=4$ (не вх. ОДЗ)

при $x=6$ $b = \frac{1}{2}\lg_2 4 = 1$

$c = 2\lg_4 4 = 2$

III. $b = 1$ $\frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26) = 1$ Чистовик (4)

$$x^2 - 8x + 16 = 5x - 26$$
$$x^2 - 13x + 42 = 0$$
$$x = 7$$
$$x = 6 \text{ (уже было)}$$

Но при $x = 7$ $a = 2\log_6 3$ $c = 2\log_9 6$

ничего из трех не равно $a \neq b \neq c$

$\varnothing$

IV. $c = 1$

$$2\log_{(5x-26)}(2x-8) = 1$$
$$4x^2 - 32x + 64 = 5x - 26$$
$$4x^2 - 37x + 90 = 0$$
$$D = 37^2 - 16 \cdot 90 < 0$$

$\varnothing$

Ответ: $x = 6$

задача №4. Чистовик

5

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 10 \\ НОК(a;b;c) = 2^{17} \cdot 5^{16} \end{cases}$$

Все три числа делятся только на 2 или на 5, или на такие же числа только в степенях. т.к. НОД - набор меньших степеней, НОК - набор больших степеней среди 3 пар у нас должны быть 6 чисел: 2^1; 5^1; 2^{17}; 5^{16}

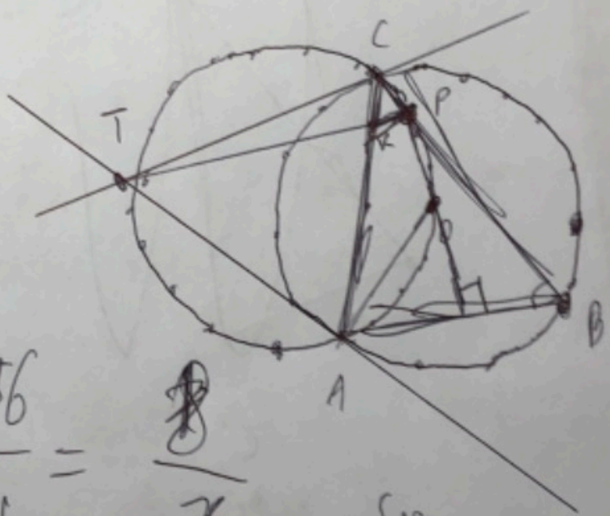
I. $\log_{\sqrt{2(x-4)}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$x-4=t$

$\log_{\sqrt{2t}} t = \log_{t^2}(5t-6)$

$t^2 = \sqrt{2t}^2$

$\frac{\sqrt{2t}}{4}$



$\frac{86}{81} = \frac{8}{x}$

$S_{APK} =$

$\angle CPA = 2\angle B$

$\angle PAB + \angle PBA =$

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 10 \\ НОК(a;b;c) = 2^{17} \cdot 5^{16} \end{cases}$$

б ч.

черновик.

нок - наименьшее общее кратное

они все кратны 10.

НОД - наибольший общий делитель

все числа $> 2^{17} \cdot 2^{16}$

$НОК(a;b;c) = 10^{16} \cdot 2$

Если делится на 10 => на 2; 5

причем $\frac{число}{2} = 10$

какое то из них

или 10

или 20

30

40

50

60

70

80

90

100