Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101552**

ID профиля: **320451**

Вариант 20

{Чистовик} 1|3

N1

Заметим, что $S = 5a_1 + 10d$, $a_6a_{11} = (a_1+5d)(a_1+10d) = a_1^2 + 15a_1d + 50d^2$,
$a_8a_9 = (a_1+7d)(a_1+8d) = a_1^2 + 15a_1d + 56d^2$

$\begin{cases} a_6a_{11} > S+15 \\ a_8a_9 < S+39 \end{cases} \Rightarrow a_8a_9 - a_6a_{11} = 6d^2 < 39-15 = 24 \Leftrightarrow d^2 < 4 \overset{\text{т.к. } d\in\mathbb{Z}}{\Rightarrow} d^2 \leq 1$

Получим $d^2 \leq 1 \overset{d\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} d \in \{-1, 0, 1\}$, но т.к. прогрессия строго возрастающая, $\underline{d=1}$.

Значит, $S = 5a_1 + 10$, $a_6a_{11} = a_1^2 + 15a_1 + 50$, $a_8a_9 = a_1^2 + 15a_1 + 56$.

Подставляя в систему, получаем

$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq -5 \\ a_1 \in (-5-3\sqrt{2}, -5+3\sqrt{2}) \end{cases}$

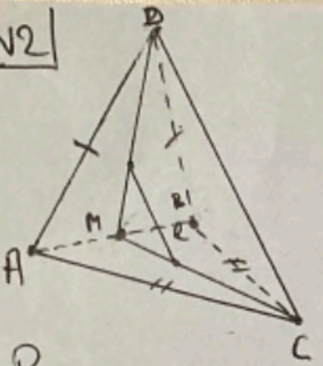
$-10 < -5-3\sqrt{2} < -9$ и $-1 < -5+3\sqrt{2} < 0$

$\Downarrow$

Ответ: $-9, -8, -7, -6, -4, -3, -2, -1$

21101552 (U320451 M1299519)

№2



{Чистовик}

Решение:

Отметим M – середину AB. В силу равноудалённости M, C и D от концов отрезка AB, $(MDC) \perp AB \Rightarrow (MDC) \perp (ABC)$ и $(MDC) \perp (ADC)$.

Ось цилиндра l (также в силу равноудалённости от A и B) тоже лежит в этой пл-ти и параллельна CD.

Пускай $DC = t$, из условия находим $MD = 3\sqrt{7}$, $CM = 4\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow MP$ – высота $\triangle MDC$ – равна $\sqrt{63 - \frac{1}{4}\left(\frac{15}{t}+t\right)^2}$. Пускай $\rho(M; l) = h$, тогда $\rho(A; l) = \sqrt{h^2+1}$. l должна быть равноудалена от CD, A и $B \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{h^2+1} = \sqrt{63 - \frac{1}{4}\left(\frac{15}{t}+t\right)^2} - h$$

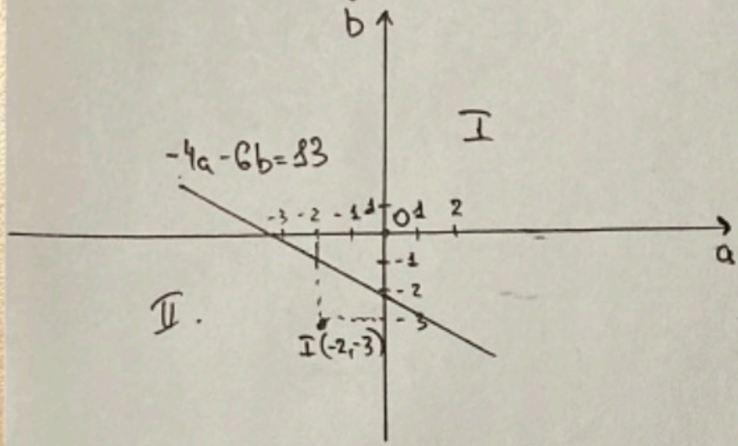
$$\underbrace{\sqrt{h^2+1} + h}_{f(h)} = \sqrt{63 - \frac{1}{4}\left(\frac{15}{t}+t\right)^2}.$$

Радиус цилиндра $r = \sqrt{h^2+1}$ наименьший при наим. h, а т.к. $f(h)\uparrow\uparrow$, h наим. при наим. знач. выражения справа, т.е., при наиб. значении $\frac{15}{t} + t$; $t \in (3\sqrt{7} - 4\sqrt{3}, 3\sqrt{7} + 4\sqrt{3})$.

Анализ и нахожд. максимума приводит к ответу.

№31 {Чистовик} 3/3

В данной задаче будем рассматривать a и b как переменные, а x и y в качестве параметров.



Рассмотрим фигуру S, задаваемую нер-вом $a^2+b^2 \le \min\{-4a-6b, 13\}$

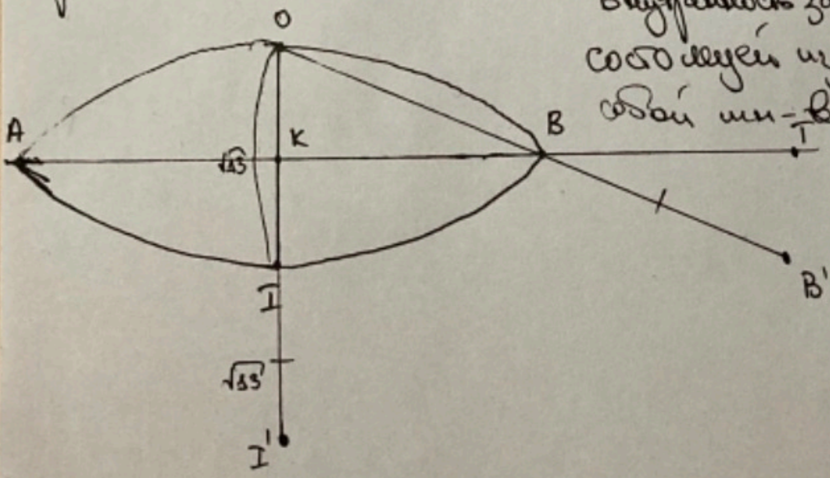
$l: -4a-6b \le 13 \iff b \ge -\frac{2}{3}a - \frac{13}{6}$

Значит, в обл. I на графике S ~~выглядит как~~ задаётся

$a^2+b^2 \le -4a-6b \iff (a+2)^2+(b+3)^2 \le 13$.

В области II — $a^2+b^2 \le 13$. Более того, если $O(0,0)$, $I(-2,-3)$, можно заметить, что $\rho(O;l)=\rho(I;l)=\frac{\sqrt{13}}{2}$ и $OI \perp l$. Можем сделать выносной чертёж S:

Внутренность замкнутой кривой ~~AOB~~ A-O-B-I-A, состоящей из двух дуг окр-тей, и представляет собой мн-во S.



Множество M состоит из точек, удалённых от S не более, чем на $\sqrt{13}$.
В силу симметрии S отн. двух осей: AB и OI — можем рассмотреть только четверть плоскости внутри угла IKB (мн-во M также обладает симметрией отн. этих осей).
Внутри угла IOB M явл-ся сектором круга с центром O и радиусом $OI+\sqrt{13}=2\sqrt{13}$.
Внутри угла TBB' M явл-ся сектором круга с центром B и радиусом $\sqrt{13}$.

Т.к. $OK=\frac{\sqrt{13}}{2}$, $OB=\sqrt{13}$, $\angle IOB=\frac{\pi}{3}$, $\angle KBO=\angle B'BT=\pi/6 \Rightarrow S_{I'OB'}=\frac{1}{6}\pi(2\sqrt{13})^2$,

$S_{I'KBB'}=S_{I'OB'}-S(\Delta KOB)=\frac{1}{6}\pi(2\sqrt{13})^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{4}\sqrt{3}$; $S_{B'BT}=\frac{1}{12}\pi(\sqrt{13})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{1/4}=\frac{1}{6}\pi\cdot 4\cdot 13+\frac{1}{12}\pi\cdot 13-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{13}{4}=\frac{13\pi\cdot 3}{4}-\frac{13}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S(M)=4\cdot S_{1/4}=\boxed{39\pi-\frac{13\sqrt{3}}{2}}$

Ответ: ↗

N1

$5 \cdot a_1 + 10d = S$

$$\begin{cases}(a_1+5d)(a_1+10d) > S+15 \\ (a_1+7d)(a_1+8d) < S+39\end{cases} \rightarrow 6d^2 < 24$$

$d^2 < 4$

$\Downarrow$

$d^2 \le 1$

$\Downarrow$

$\underline{d = 1}$

$S = 5a_1 + 10$

$$\begin{cases}(a_1+5)(a_1+10) > 5a_1+25 \\ (a_1+7)(a_1+8) < 5a_1+49\end{cases} \quad \begin{cases}a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \iff a_1 \neq -5 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0\end{cases}$$

$D/4 = 25 - 7 = 18 = (3\sqrt{2})^2$

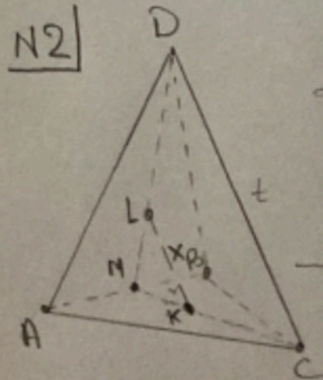
$t_{1,2} = -5 \pm 3\sqrt{2}$

$-10 < -5 - 3\sqrt{2} < -9, \quad -1 < -5 + 3\sqrt{2} < 0$

$\Downarrow$

Ответ: $-9, -8, -7, -6, -4, -3, -2, -1$

N2



$AD = DB = 8, \ AC = CB = 7, \ AB = 2, \ CD = t$

$CM = \sqrt{AC^2 - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{49 - 1} = 4\sqrt{3}$

$DM = \sqrt{AD^2 - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{64 - 1} = 3\sqrt{7}$

$\rho(LK; DC) = \rho(LK; A) \overset{\text{завідомо}}{=} \rho(LK; B)$

$MK = 4\sqrt{3} \cdot \frac{x}{t}, \ ML = 3\sqrt{7} \cdot \frac{x}{t} \Rightarrow AL = \sqrt{1 + 63 \cdot \frac{x^2}{t^2}}, \ AK = \sqrt{1 + 48 \cdot \frac{x^2}{t^2}}$

Пускай высота $\triangle ALK$ – AH, тогда

$$LH^2 - (x - LH)^2 = AL^2 - AK^2 = 15 \cdot \frac{x^2}{t^2}$$

$$2LH \cdot x = \left(\frac{15}{t^2} + 1\right)x^2 \Rightarrow LH = \frac{\left(\frac{15}{t^2} + 1\right)x}{2} \Rightarrow$$

$$AH = \sqrt{1 + 63\frac{x^2}{t^2} - \left(\frac{15}{t^2} + 1\right)^2 \frac{x^2}{4}}$$

21101552 (U320451 M1299519)

MP - высота $\triangle DMC$

$$DP^2-(t-DP)^2=DM^2-CH^2=15$$

$$2DP\cdot t=15+t^2$$

$$DP=\frac{1}{2}\left(\frac{15}{t}+t\right)$$

$$MP=\sqrt{63-\frac{1}{4}\left(\frac{15}{t}+t\right)^2} \Rightarrow \rho(LK;CD)=\left(1-\frac{x}{t}\right)\sqrt{63-\frac{1}{4}\left(\frac{15}{t}+t\right)^2}$$

$$AH^2=\left(1-\frac{x}{t}\right)^2\cdot\left(63-\frac{1}{4}\left(\frac{15}{t}+t\right)^2\right)$$

$$1+63\cdot\frac{x^2}{t^2}-\left(\frac{225}{t^4}+\frac{30}{t^2}+1\right)\frac{x^2}{4}=63-\frac{1}{4}\left(\frac{15}{t}+t\right)^2-\frac{2x}{t}\cdot 63+$$

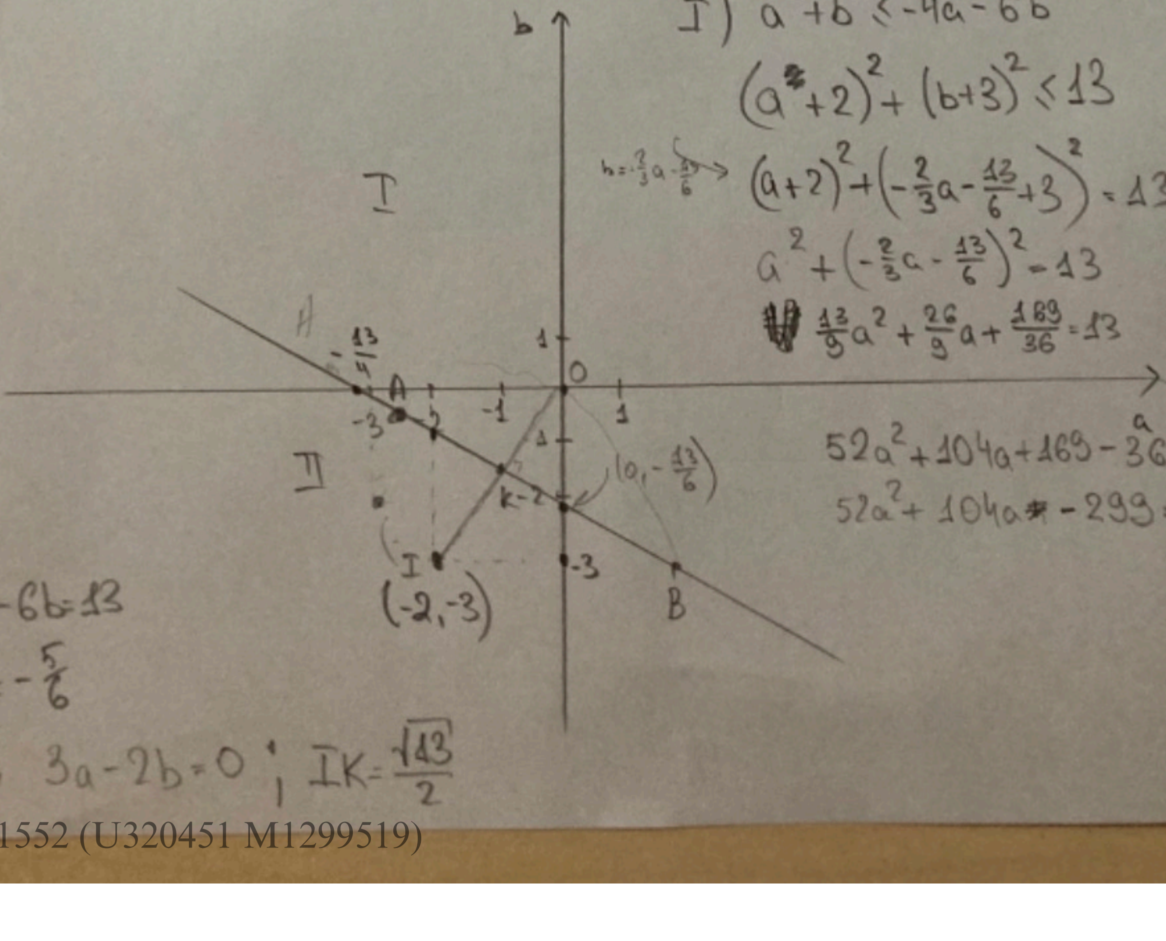
N3

$$(a-x)^2+(b-y)^2\leqslant 13$$

$$a^2+b^2\leqslant\min\{-4a-6b,\ 13\}$$

$$-4a-6b\leqslant 13$$

$$b\geqslant-\frac{2}{3}a-\frac{13}{6}$$



I) $a^2+b^2\leqslant-4a-6b$

$$(a+2)^2+(b+3)^2\leqslant 13$$

$$b=-\frac{2}{3}a-\frac{13}{6} \rightarrow (a+2)^2+\left(-\frac{2}{3}a-\frac{13}{6}+3\right)^2=13$$

$$a^2+\left(-\frac{2}{3}a-\frac{13}{6}\right)^2=13$$

$$\frac{13}{9}a^2+\frac{26}{9}a+\frac{169}{36}=13$$

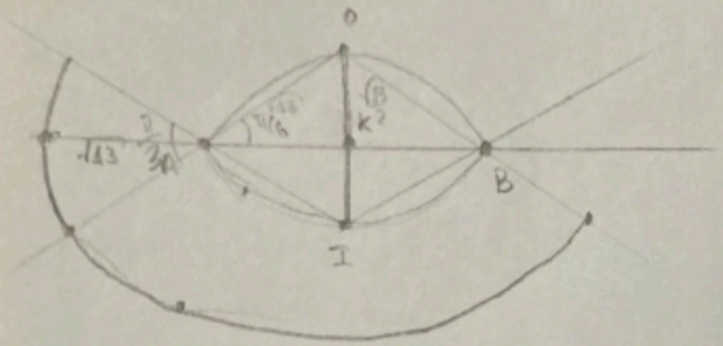
$$52a^2+104a+169-360a-108=0$$

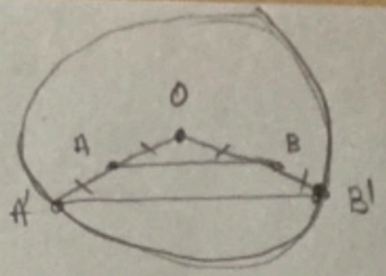
$$52a^2+104a-299=0$$

$$8-6b=13$$

$$b=-\frac{5}{6}$$

$OI:\ 3a-2b=0;\ IK=\frac{\sqrt{13}}{2}$





$$S_{\circ OA'B'} - S(\triangle AOB) =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \Big/ 2\pi \cdot \pi(2\sqrt{13})^2 - \frac{1}{2}\cdot 13 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{52\pi}{3} - \frac{13\sqrt{3}}{4}$$

$$2 \cdot \frac{\pi/3}{2\pi} \cdot 13\pi + 2\left(\frac{52\pi}{3} - \frac{13\sqrt{3}}{4}\right) =$$

$$= \frac{13\pi}{3} + \frac{104\pi}{3} - \frac{13\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{117\pi}{3} - \frac{13\sqrt{3}}{2} = 39\pi - \frac{13\sqrt{3}}{2}$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101552**

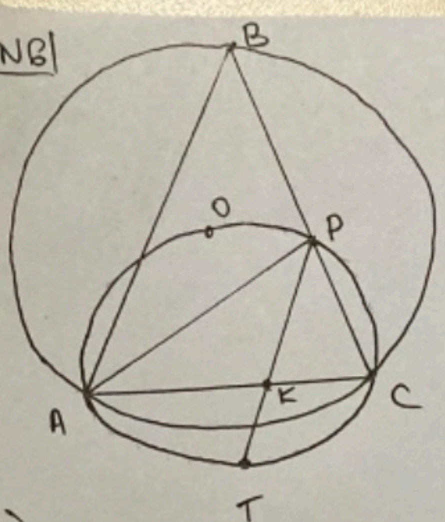
ID профиля: **320451**

Вариант 20

№8|

{Чистовик}

2/2



а) Для начала докажем, что $T \in Окр(\triangle AOC)$. Действительно, по св-ву угла между кас. и хордой (для ω) $\angle ACT = \angle ABC = \angle CAT$. Тогда $\angle ATC = \pi - 2\angle B$, а $\angle AOC = 2\angle B$ по теореме о впис. угле (ω). Значит, в частности, $APCT$ вписан, откуда $\angle KPC = \angle TAC = \angle ABC \Rightarrow PK \parallel AB \Rightarrow \triangle CPK \sim \triangle CBA$. Т.к. $\triangle APK$ и $\triangle CPK$ имеют равные высоты, их основания относятся как их площади: $\frac{AK}{KC} = \frac{5}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow CK = \frac{4}{9} AC$. Значит, $S(\triangle ABC) = \left(\frac{AC}{CK}\right)^2 \cdot S(\triangle CKP) = \frac{81}{16} \cdot 8 = \boxed{\frac{81}{2}}$

Ответ(а):

б) $\angle APK = \angle CPK = \angle B \Rightarrow PK$ - бис-са $\triangle APC$ и $AP : PC =$
$= AK : KC = 5 : 4$. С другой стороны, $\angle PAC = \pi - 2\angle B - \angle C$, а значит, по т. синусов в $\triangle APC$

$$\frac{PC}{AP} = \frac{4}{5} = \frac{\sin(2\angle B + \angle C)}{\sin\angle C} \xrightarrow{\text{решим, находим}} \operatorname{tg}\angle C = 4 \Rightarrow \sin\angle C = \frac{4}{\sqrt{17}}, \sin\angle A = \sin(B+C) = \frac{9}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{17}}.$$

По т. синусов в $\triangle ABC$

$$\left.\begin{aligned} BC &= AC \cdot \frac{\sin\angle A}{\sin\angle B} \\ AB &= AC \cdot \frac{\sin\angle C}{\sin\angle B} \end{aligned}\right| \Rightarrow S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\angle B = \frac{1}{2} AC^2 \cdot \frac{\sin\angle A \cdot \sin\angle C}{\sin\angle B} \overset{(а)}{=} \frac{81}{2}$$

$$AC^2 \cdot \frac{36}{17} = 81$$

$$\Downarrow$$

$$AC = \frac{3}{2}\sqrt{17}$$

Ответ(б): $\frac{3}{2}\sqrt{17}$.

21101552 (U320451 M1299520)

{Чистовик}

1|2

№4

$$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c) = 2^1 \cdot 5^1 \\ \text{НОК}(a,b,c) = 2^{17} \cdot 5^{16} \end{cases}$$

Заметим, что в силу основной теоремы арифметики система равносильна следующей:

$$\begin{cases} a = 2^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2} \\ b = 2^{\beta_1} \cdot 5^{\beta_2} \\ c = 2^{\gamma_1} \cdot 5^{\gamma_2} \\ 17 = \max\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\} \\ 1 = \min\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\} \\ 16 = \max\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\} \\ 1 = \min\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\} \end{cases}$$

Наборы $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ не зависят друг от друга, при этом в силу той же ОТА любая уникальная комбинация двух наборов даёт уникальный набор (a,b,c). Т.е.

$$\#(a,b,c) = \#(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1) \cdot \#(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2).$$

I. Один элемент из $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ равен 17, а один – 1.

а) Третий не равен 17 или 1 => ~~15~~ 15 возм. неупорядоченных наборов чисел и 6 перестановок для каждого => всего: 90 вариантов

б) Третье число равно 17 или 1 => всего: 6 вариантов → 96

II. Аналогично для $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, один эл. которого равен 16, а другой – 1.

а) $14 \cdot 6 = 84$ варианта

б) 6 вариантов → 90

Получаем

$$\#(a,b,c) = 96 \cdot 90 = 8640$$

Ответ: 8640

21101552 (U320451 M1299520)

$$4 = \log_{(x-4)}(2\cdot(x-4)) \cdot \log_{(x-4)}(5x-26)$$

$$2\log_{(5x-26)}(2x-8) = 2\log_{2x-8}(x-4) + 1$$

$$8\log_{(5x-26)}(2x-8) = 2\log_{(x-4)}(2\cdot(x-4))\log_{(2x-8)}(5x-26) +$$
$$+ \log_{(x-4)}(2\cdot(x-4))\cdot\log_{(x-4)}(5x-26)$$

8) $tg\angle B = 1/2 \Rightarrow \cos\angle B = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin\angle B = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$PC = \frac{4}{9}BC \Rightarrow \frac{9}{2}PC = 2BC = PT \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \boxed{PT = BC\sqrt{5}}$

$PT = 2R_o \cdot \sin\angle(B+C)$

$\angle PTC = \pi - 2\angle B - \angle C \Rightarrow \angle ATP = \angle C \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle APT$

$\frac{PT}{BC} = \frac{AT}{AC} \Rightarrow AC = \frac{AT}{\sqrt{5}}$

$\sin 2B = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$

$\cos 2B = \frac{3}{5}$

$AT = \frac{1}{2}AC / \sin(\frac{\pi}{2} - \angle B) = \frac{\frac{1}{2}AC}{\frac{2}{\sqrt{5}}}$

$\cancel{\frac{PA}{PA} = \frac{AT}{AC} = \frac{1}{2}PA}$

$\frac{AP}{\sin\angle C} = \frac{PC}{\sin(2B+\angle C)}$

$\frac{AP}{PC} = \frac{5}{4} = \frac{\sin\angle C}{\sin(2B+C)} = \frac{\frac{4}{\sqrt{17}}}{\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}}$

$\frac{4}{5} = \frac{\sin 2B \cos C + \cos 2B \sin C}{\sin C}$

$\frac{4}{5} = \cos 2B + \cancel{tg\angle C \cdot \sin 2B}$

$\cancel{\frac{1}{5} = tg\angle C \cdot \frac{4}{5}}$

$\frac{4}{5} = \frac{4}{5} ctg\angle C + \frac{3}{5}$

$\cancel{tg\angle C = 1/4 \Rightarrow}$

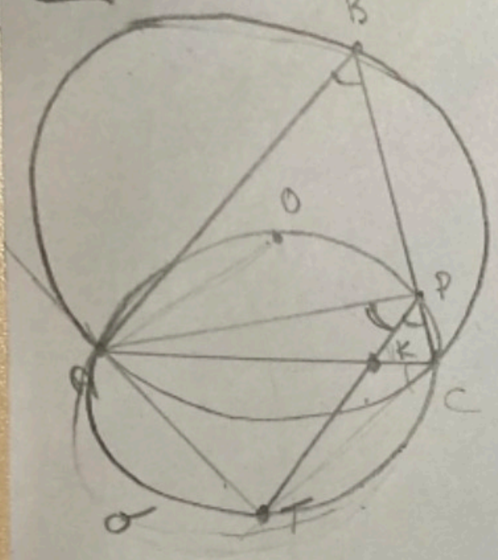
$tg\angle C = 4$

$\Rightarrow \sin\angle C = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(B+C) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{9}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{17}}$

21101552 (U320451 M1299520)

N6



$\angle ATC = \pi - 2\angle B \Rightarrow T \in Окр(\triangle AOC)$

$AK \cdot KC =$

$\angle APK = \angle B = \angle CPK$

$2R_\sigma = \frac{OC}{\sin(\frac{\pi}{2} - \angle B)} = \frac{R_\omega}{\cos\angle B}$

$AT = CT = 2R_\sigma \cdot \sin\angle B = R_\omega \operatorname{tg}\angle B$

$\frac{AK}{KC} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = \frac{AP}{PC}$

$AP \cdot CT + CP \cdot AT = AC \cdot PT$

$\left(\frac{5}{4}PC + PC\right) R_\omega \operatorname{tg}\angle B = 2R_\omega \sin\angle B \cdot PT$

$\frac{9}{2}PC = PT\cos\angle B$

~~ΔTKC ~ ΔTCP~~

$\triangle TKC \sim \triangle TCP \Rightarrow \frac{PC}{PT} = \frac{CK}{CT}$, ... $\frac{2}{9}\cos\angle B = \frac{4}{9} \cdot \frac{AC}{CT}$

$PK \parallel BA \Rightarrow \triangle CPK \sim \triangle CBA \Rightarrow S(\triangle ABC) = \left(\frac{AC}{CK}\right)^2 \cdot S(\triangle CPK) =$

$= \frac{81}{16} \cdot 8 = \boxed{\frac{81}{2}}$

$$\frac{KC}{PC} = \frac{\sin\angle B}{\sin(C+B)} \Rightarrow PC = KC \cdot \frac{\sin(C+B)}{\sin B} = KC \cdot \frac{9}{\sqrt{17}}$$

$$PK = KC \cdot \frac{\sin C}{\sin B}$$

$$S(\Delta PKC) = \frac{1}{2} KP \cdot PC \cdot \sin B = \frac{1}{2} KC^2 \cdot \frac{\sin C \cdot \sin(C+B)}{\sin B} =$$

$$= \frac{1}{2} KC^2 \cdot \frac{\frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \frac{9}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{17}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{2} KC^2 \cdot \frac{36}{17}$$

$$8 = \frac{1}{2} KC^2 \cdot \frac{36}{17}$$

$$\frac{4}{9} \cdot 17 = KC^2 \Rightarrow KC = \frac{2}{3}\sqrt{17} \Rightarrow AC = \frac{9}{4} KC = \frac{3}{2}\sqrt{17}$$

$$\frac{1}{2} AC^2 \cdot \frac{36}{17} = \frac{81}{2} \Leftrightarrow AC^2 = \frac{9}{4} \cdot 17 \Rightarrow AC = \frac{3}{2}\sqrt{17}$$

21101552 (U320451 M1299520)