Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101532**

ID профиля: **852467**

Вариант 20

Чистовик.

№1.

$S_5 = \frac{2a_1 + d \cdot 4}{2} \cdot 5 = 5a_1 + 10d$

$a_6 a_{11} > S + 15$

$(a_1 + 5d)(a_1 + 10d) > 5a_1 + 10d + 15$

$a_1^2 + 10a_1 d + 5a_1 d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15$

$a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15$

$a_8 a_9 < S + 39$

$(a_1 + 7d)(a_1 + 8d) < 5a_1 + 10d + 39$

$a_1^2 + 8a_1 d + 7a_1 d + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39$

$a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39$

$+\begin{cases} 5a_1 + 10d + 39 > a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2 \\ a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15 \end{cases}$

$\cancel{5a_1} + \cancel{10d} + 39 + \cancel{a_1^2} + \cancel{15a_1 d} + 50d^2 > \cancel{a_1^2} + \cancel{15a_1 d} + 56d^2 + \cancel{5a_1} + \cancel{10d} + 15$

$39 + 50d^2 > 56d^2 + 15$

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4$

$d \in (-2; 2)$

Т.к прогрессия возрастающая, то $d > 0 \Rightarrow$ $d \in (0; 2) \Rightarrow d = 1$. Подставим.

$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 + 50 > 5a_1 + 25 \\ a_1^2 + 15a_1 + 56 < 5a_1 + 49 \end{cases}$

1

$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases}$

Чистовик.

$(a_1+5)^2>0$

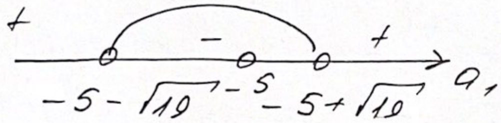
$a_1 \neq -5$

$a_1^2+10a_1+7<0$

$D = 100-24 = 76$

$a_1 = \frac{-10 \pm \sqrt{76}}{2}$

$a_1 = -5 \pm \sqrt{19}$



$-5-\sqrt{19} < -9$ $\qquad$ $-5-\sqrt{19} > -10$

$-5+\sqrt{19} > -1$ $\qquad$ $-5+\sqrt{19} < 0$

$a_1 = -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

Т.к прогрессия состоит из целых чисел, то a_1 и d нецелыми быть не могут.

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$.

2

Чистовик.

№2.

Пусть M - середина AB. Т.к $DM \perp AB$, $CM \perp AB$, то AB лежит в пл-ти, перпендикулярной оси цилиндра. Пусть эта пл-ть пересекает прямую CD в точке X.

Рассмотрим 2 случая:

1) X лежит между C и D

Пусть $CX = x$, $AX = BX = y$, $CD = z$. Тогда по теореме Пифагора:

$49 = x^2 + y^2$

$64 = y^2 + (z-x)^2 \Rightarrow 15 = z^2 - 2zx$. (*)

Т.к плоскость AXB перпендикулярна оси цилиндра, радиус цилиндра равен R опис. окр-ти $\triangle ABX$.

$$R = \frac{y^2}{\sqrt{4y^2-4}} = \frac{49-x^2}{2\sqrt{48-x^2}}$$

Найдем максимум функции $\frac{a}{\sqrt{a-1}}$.

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a-1}}\right)' = \frac{\sqrt{a-1} - \frac{a}{2\sqrt{a-1}}}{a-1} = 0 \qquad 2(a-1) = a \Rightarrow a = 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 49 - x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{47}$ (т.к $x > 0$)

Подставим в уравнение (*):

(**) $z^2 - 2\sqrt{47}\, z - 15 = 0 \quad z = \sqrt{47} \pm \sqrt{47+15}$, т.е. $\sqrt{47} + \sqrt{62}$.

3

Чистовик.

2) когда C лежит между X и D.

$$\left.\begin{aligned} 49 &= x^2 + y^2 \\ 64 &= y^2 + (x+z)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 15 = z^2 + 2zx.$$

Всё то же самое, только уравнение (**) выглядит как $z^2 + 2\sqrt{47}\,z - 15 = 0 \Rightarrow z = -\sqrt{47} \pm \sqrt{62}$, т.е $\sqrt{62} - \sqrt{47}$

3) когда D лежит между X и C. Этот случай невозможен, т.к $AD > AC$.

Ответ: $\sqrt{47} + \sqrt{62}$ или $\sqrt{62} - \sqrt{47}$.

4

Чистовик.

№3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2=13\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b,\ 13)\end{cases}$$

1) $-4a-6b\le 13$

2) $a^2+b^2\le -4a-6b \Longleftrightarrow (a+2)^2+(b+3)^2\le 13$

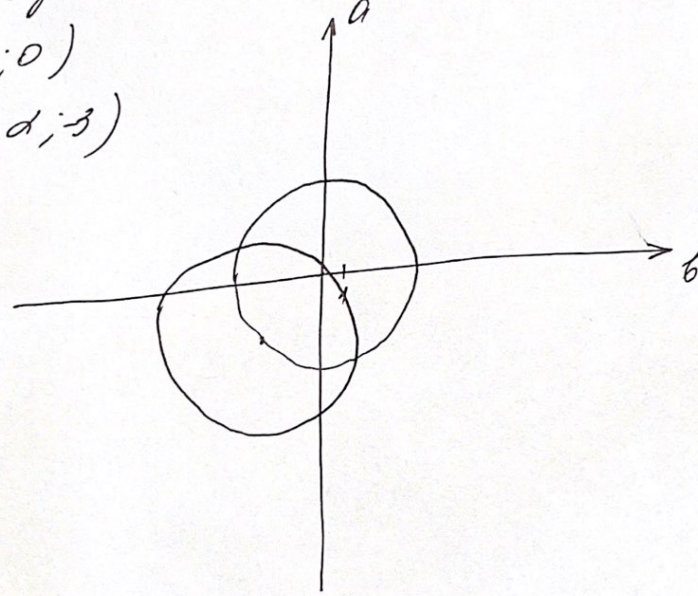
$-4a-6b\ge 13$

$a^2+b^2\le 13$

Изобразим в aOb

$O_1(0;0)$

$O_2(-2;-3)$



5

№1. Черновик.

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 =$

$= a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d + a_1 + 4d =$

$= 5a_1 + 10d$

$a_6 a_{11} > S + 15$ $\quad d > 0$

$(a_1 + 5d)(a_1 + 10d) > 5a_1 + 10d + 15$

76 | 2, −6, 38, 16

$\cancel{(a_1 + 5d)(a_1 + 10d) > 15}$

$a_1 + 15a_1 + 56 < 5a_1 + 39$

$(a_1 + 7d)(a_1 + 8d) < S + 39$

$a_1 + 10a_1 + 7 < 0$

$(a_1 + 7d)(a_1 + 8d) < 5a_1 + 10d + 39$ $\quad D = 100 - 24 = 76$

$a_1^2 + 10a_1 d + 5a_1 d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15$ $\quad a_1 = \frac{-10 \pm \sqrt{76}}{2}$

$\cancel{a_1^2 + 10a_1 d - 10d + 5a_1 d - 5a_1 + 50d^2 > 15}$ $\quad a_1 =$

$a_1^2 + 8a_1 d + 7a_1 d + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39$ $\quad -5 \pm \sqrt{19}$

$a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15$

38 | 2, −2, 19, 18

$a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39$

$a_1 \in (-5 - \sqrt{19}; -5 + \sqrt{19})$

$+\begin{cases} \cancel{a_1^2} + \cancel{15a_1 d} + 50d^2 > \cancel{5a_1} + \cancel{10d} + 15 \\ \cancel{5a_1} + \cancel{10d} + 39 > \cancel{a_1^2} + \cancel{15a_1 d} + 56d^2 \end{cases}$

$50d^2 + 39 > 15 + 56d^2$

$a_1 = -9; -8; -7; -6; -4; -3;$

$24 > 6d^2$

$a_1 \neq -5$

$d = 1$

$6d^2 < 24$

$\cancel{a_1^2 + 10d + 5d + 50}$

$d^2 < 4$

$a_1^2 + 10a_1 + \cancel{5a_1} + 50 >$

$> \cancel{5a_1} + 25$

$d \in (-2; 2)$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

$(a_1 + 5)^2 > 0$

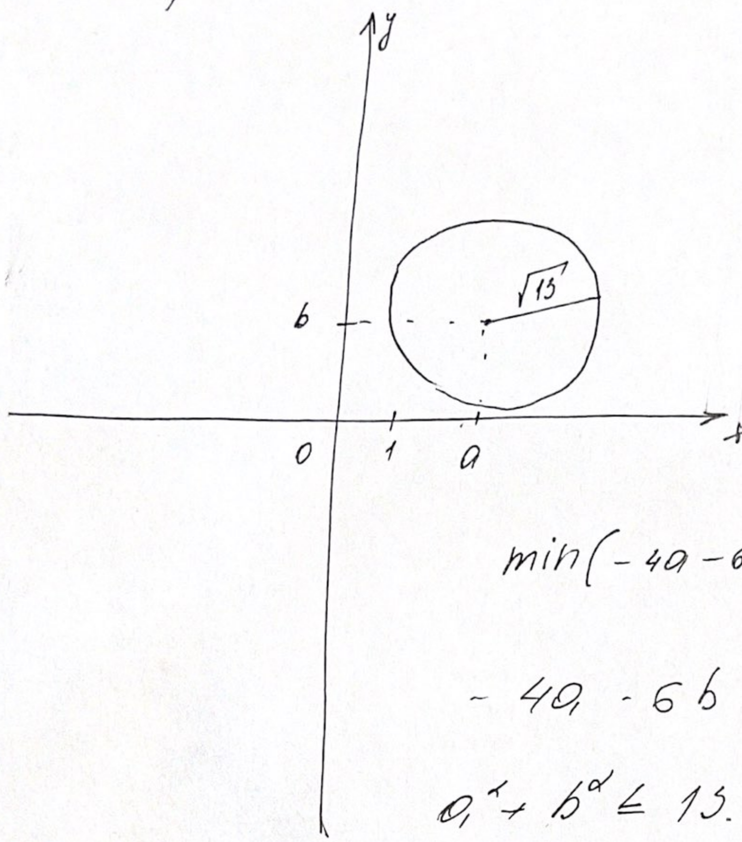
Черновик.

1) между C и D.

$CX = x$, $AX = BX = y$, $CD = z$.

Черновик.

№3.



$\min(-4a-6b;\ 13)$.

$-4a-6b < 13$.

$a^2+b^2 \le 13$.

$a^2+b^2 \le -4a-6b$

$a^2+4a+4-4+b^2+6b+$

$+9 \le 0$

$(a+2)^2+(b+3)^2 \le 0$.

СИ

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101532**

ID профиля: **852467**

Вариант 20

Чистовик.

№4.

В разложении на простые множители чисел входят только двойки и пятёрки (иначе НОК был бы кратен другому числу, т.е он бы тоже содержал множители отличные от 2 и 5, аналогично НОД)

Пусть $a = 2^{a_1} \cdot 5^{a_2}$, $b = 2^{b_1} \cdot 5^{b_2}$, $c = 2^{c_1} \cdot 5^{c_2}$

Тогда для выполнения условий на НОД и НОК надо чтобы:

(1) $\min\{a_1, b_1, c_1\} = 1$; $\max\{a_1, b_1, c_1\} = 17$

(2) $\max\{a_2, b_2, c_2\} = 16$, $\min\{a_2, b_2, c_2\} = 1$

Вычислим число троек $\{a_1, b_1, c_1\}$, чтобы выполнялось условие (1):

одно из чисел a_1, b_1, c_1 должно быть равно 1, другое → 17.

Значит, возможны варианты: а) $\{1; 1, 17\}$ + все перестановки

б) $\{1; 17; 17\}$ + все перест.

в) $\{1; x, 17\}$, где x – любое натуральное число от 2 до 16 + все перест.

Вариантов а) 1 · 3 шт (с учетом перестановок $\{a_1, b_1, c_1\}$)

б) 1 · 3 шт и перестановки

в) 15 вар. · 6 шт

Итого: $3 + 3 + 15 \cdot 6 = 96$ шт (вариантов для a_1, b_1, c_1)

1

Чистовик.

аналогично для условия (2):

а) $\{1, 1, 16\}$ + перестановки

б) $\{1, 16, 16\}$ + перестановки

в) $\{1, x, 16\}$, где x – натур. число от 2 до 15 + перестановки

14 вар.

Итого: $1\cdot 3 + 1\cdot 3 + 14\cdot 6 = 6 + 84 = 90$ вариантов для $\{a_2, b_2, c_2\}$

перестановки

Тогда количество искомых троек $\{a, b, c\}$:

$$96 \cdot 90 = 8640$$

Ответ: 8640.

Чистовик.

№5.

$x > \frac{26}{5}$

$x \neq \frac{27}{5}$

$x \in \left(\frac{26}{5}; \frac{27}{5}\right) \cup \left(\frac{27}{5}; \infty\right)$

$x - 4 = y$

$\log_{\sqrt{2y}}(y) = a$

$\log_{y^2}(5y-6) = b$

$\log_{\sqrt{5y-6}}(2y) = c$

$abc = \frac{\ln(y)}{\ln(\sqrt{2y})} \cdot \frac{\ln(5y-6)}{\ln(y^2)} \cdot \frac{\ln(2y)}{\ln(\sqrt{5y-6})} = 2$

Если $a = b$, $c = b+1$, то $b^2 + b^3 = 2 \Rightarrow (b-1)(b^2+2b+2) = 0$

нет корней

$\Rightarrow b = 1$. (если равны другие, то соотв. $a = 1 = c$, $b = 2$ или $b = c = 1$, $a = 2$).

Разберем случаи:

1) $a = b = 1$ $\quad \sqrt{2y} = y \Rightarrow y = 2$, тогда $b = 1$, $c = 2$

2) $a = c = 1 \Rightarrow y = 2$, но тогда $c = 2$ $\neq 1$ $\Rightarrow$ противоречие.

3) $b = c = 1$, $a = 2$: $(\sqrt{2y})^2 = y \Rightarrow 2y = y$, $y = 0$, не входит в ОДЗ.

Подходит первый случай, из него $x = 6$ - входит в ОДЗ.

Ответ: 6.

3

Черновик.

№5.

$\sqrt{2x-8} > 0$

$x \neq 4$

$\sqrt{2x-8} \neq 1$

$x \neq \frac{9}{2}$

$x > 4$

$(x-4)^2 > 0$

$x \neq 4$

$(x-4)^2 \neq 1$

$(x-5)(x-5) \neq 0$

$x \neq 5$ $\quad$ $x \neq 3$

$x > \frac{26}{5}$

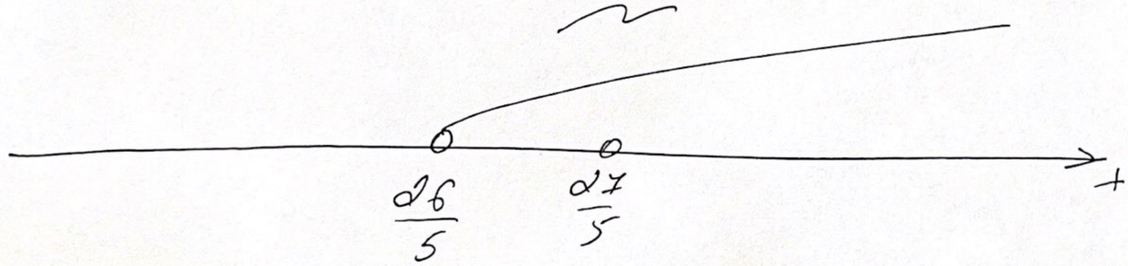
$\sqrt{5x-26} > 0$

$x \neq \frac{26}{5}$

$\sqrt{5x-26} \neq 1$

$x \neq \frac{27}{5}$

$x > 4$



$x \in \left(\frac{26}{5}; \frac{27}{5}\right) \cup \left(\frac{27}{5}; \infty\right)$

1) $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$$\frac{1}{\log_{(x-4)}\sqrt{2x-8}} = \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)$$

$$2 = \log_{(x-4)}\sqrt{2x-8} \; \log_{(x-4)}(5x-26)$$

$$4 = \log_{(x-4)}(2x-8) \; \log_{(x-4)}(5x-26)$$