Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101462**

ID профиля: **262748**

Вариант 20

Чистовик Лист 1

№1

Пусть d – шаг прогрессии, тогда:

$S = \frac{a_1+a_5}{2} \cdot 5 = 5a_1+10d$

$a_6 = a_1+5d \quad a_{11} = a_1+10d$

$a_8 = a_1+7d \quad a_9 = a_1+8d$

$\Rightarrow \quad a_6a_{11} > S+15$

$a_8a_9 < S+39 \quad \Leftrightarrow$

$(a_1+5d)(a_1+10d) > 5a_1+10d+15$

$(a_1+7d)(a_1+8d) < 5a_1+10d+15+24 < (a_1+5d)(a_1+10d)+24$

$a_1^2+15a_1d+56d^2 < a_1^2+15a_1d+50d^2+24$

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4$

Т.к все члены прогресси – целые числа, то и d – целое. Т.к прогрессия возраст. $\Rightarrow d > 0 \Rightarrow$

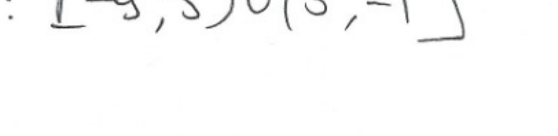
$d = 1$. Тогда

$$\begin{cases}(a_1+5)(a_1+10) > 5a_1+25\\(a_1+7)(a_1+8) < 5a_1+49\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+10a_1+25>0\\a_1^2+10a_1+7<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a_1+5)^2>0\\a_1^2+10a_1+7<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a_1 \neq -5\\(a_1+5-3\sqrt{2})\cdot\\\cdot(a_1+5+3\sqrt{2})<0\end{cases}$$

(Решив $a_1^2+10a_1+7=0$: $D=72 \Rightarrow a_1 = -5\pm3\sqrt{2}$):

Тогда методом интервалов:



$\Rightarrow$ ~~$a_1 \in (-5$~~

$a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5) \cup (-5; -5+3\sqrt{2}$

Т.к a_1 может принимать только целые значения можно записать: $a_1 \in [-9; 5) \cup (5; -1]$.

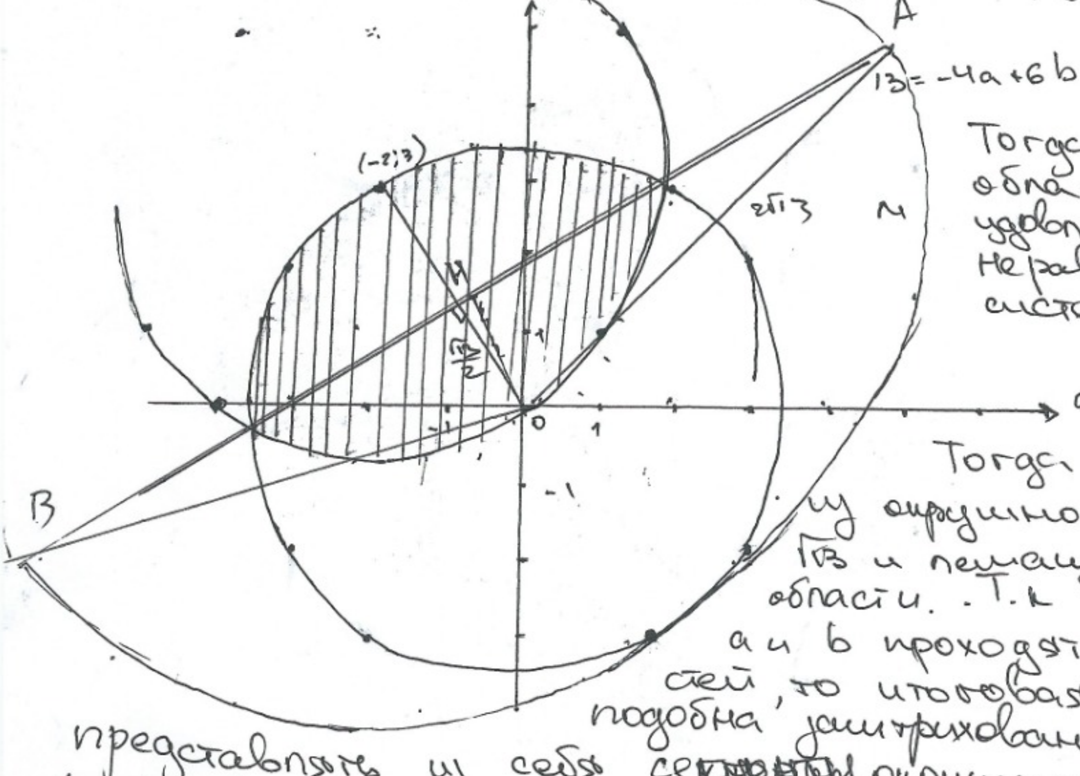
Ответ: $[-9; 5) \cup (5; -1]$

Чистовик лист 2

№3
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leq 13\\ a^2+b^2\leq \min(-4a-6b;13)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leq 13\\ \begin{cases}a^2+b^2\leq 13\\ 13\leq -4a+6b\end{cases}\\ \begin{cases}a^2+b^2\leq -4a-6b\\ 13\geq -4a+6b\end{cases}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leq 13\\ \begin{cases}a^2+b^2\leq 13\\ 13\leq -4a+6b\end{cases}\\ \begin{cases}(a+2)^2+(b-3)^2\leq 13\\ 13\geq -4a+6b\end{cases}\end{cases}$$

Первое нер-во описывает точки лежащие на и в окружности с центром $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{13}$. Вторая подсистема описывает точки лежащие на и в окружности с центром $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{13}$ и лежащих выше или на прямую $13=-4a+6b$. Вторая подсистема описывает точки лежащие на и в окружности с центром $(-2;3)$ и лежащие ниже прямой $13=-4a+6b$. Заметим, что если: $a^2+b^2=13=(a+2)^2+(b-3)^2 \Leftrightarrow 13+4a\pm 6b$, это значит, что прямая $13=-4a+6b$ описывает все точки равноудаленные от центров окружностей.



Построим графики $13=-4a+6b$ для двух подсистем: Тогда заштрихованная область - все точки a и b удовлетворяющие тому неравенству начальной системы.

Тогда фигура M состоит из окружностей радиусами $\sqrt{13}$ и лежащими в заштрих. области. Т.к крайние точки a и b проходят по частям окружностей, то итоговая фигура M будет подобна заштрихованой. Она будет представлять из себя сегменты окружностей с центрами $(0;0)$ и $(-2;3)$ и радиусами $2\sqrt{13}$ отсекаемые прямой $13=-4a+6b$. Тогда. ~~Всего~~ В силу симметрии и рав-ва радиусов. достаточно найти один сегмент $A=\sqrt{15\cdot 13}$ и из т-ма Пифагора $\Delta AOH \Rightarrow \cos\angle AOH=-\frac{7}{8}$. По т-ме cos из ΔAOB
$\Rightarrow S_{\text{сектора}}=\frac{\pi\cdot 4\cdot 13}{360}\cdot\arccos(-\frac{7}{8}) \Rightarrow S_{\text{сегмента}}=\frac{4\cdot 13\cdot\arccos(-\frac{7}{8})}{360}-S_{\Delta AOB}=$
$=\frac{4\cdot 13\cdot\arccos(-\frac{7}{8})}{360}-\frac{13\sqrt{15}}{2} \Rightarrow S_M=\frac{4\cdot 13\cdot\arccos(-\frac{7}{8})}{180}-13\sqrt{15}$.

Чистовик Лист №3

№3 продолжение

То есть $S_M = \frac{13 \cdot \arccos(-\frac{7}{8})}{45} - 13\sqrt{15}$

Ответ: $\frac{13 \cdot \arccos(-\frac{7}{8})}{45} - 13\sqrt{15}$.

$(a_1+5d)(a_1+10d) > 5a_1+10d+15$ черновик

$(a_1+7d)(a_1+8d) < 5a_1+10d+15+24 < (a_1+5d)(a_1+10d)+24$

$a_1^2+15a_1d+56d^2 < a_1^2+15a_1d+50d^2+24$

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4$

$d = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases}(a_1+5)(a_1+10) > 5a_1+25\\(a_1+7)(a_1+8) < 5a_1+49\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+15a_1+50-5a_1-25>0\\a_1^2+15a_1+56-5a_1-49 \not< 0\end{cases}$$

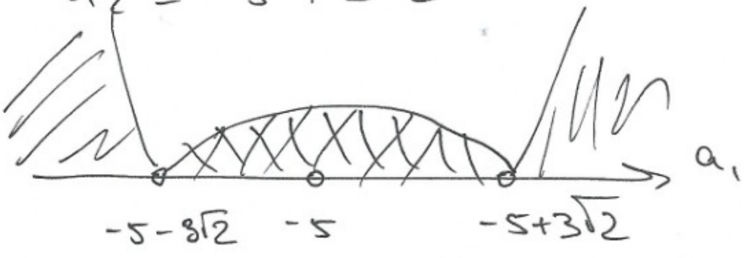
$$\begin{cases}a_1^2+10a_1+25>0\\a_1^2+10a_1+7 \not< 0\end{cases} \quad (a+5)^2>0 \quad a \neq -5$$

$a_1^2+10a_1+7>0 \Rightarrow$

$$a_1 = \frac{-10 \pm \sqrt{100-28}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{72}}{2}$$

$$a_1 = \frac{-10-6\sqrt{2}}{2} = -5-3\sqrt{2}$$

$a_2 = -5+3\sqrt{2}$



$a_1 \in (-\infty;-10] \cup [0;+\infty)$ X

-1

$-5+3\sqrt{2} \vee -1$

$3\sqrt{2} \vee 4$

$18 \vee 16$

$\wedge$

$5-3\sqrt{2} \wedge 1$

$-3\sqrt{2} \wedge -4$

$3\sqrt{2} \vee 4$

$>$

$\underbrace{1+2+3+4+5}_{15}+6+7+8$

$66 > 30$ ✓

$72 <$

$$\boxed{a_1 \in [-9;5) \cup (5;-1]}$$

$\underbrace{-2+-3+-9+1+2}_{0}+3+4+5+6.+7+8$

$24 > 15$ ✓

$30 < 39$ ✓

Черновик

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=S$

$S=\frac{(a_1+a_5)}{2}5=\frac{a_1+a_1+4d}{2}5=\boxed{5a_1+10d=S}$

$a_1+a_1+d+a_1+2d+a_1+3d+a_1+4d=S$

$5a_1$

$a_6\cdot a_{11}>S+15 \qquad (a_1+7d)(a_1+8d)<5a_1+10d+39$

$(a_1+5d)(a_1+10d)>5a_1+10d+15 \qquad d>0$

$a_1^2+15a_1d+50d^2-5a_1-10d-15>0$

$a_1^2+a_1(15d-5)+(50d^2-10d-15)>0$

$a_1=\frac{5-15d\pm\sqrt{225d^2-150d+25-200d^2+40d+60}}{2}$

$\sqrt{D}=\sqrt{25d^2-110d+85} \qquad 25d^2-110d+85=0$

$\sqrt{D}=\sqrt{25(d-1)(d-3{,}4)} \qquad \cancel{d}=d$

$5d^2-22d+17=0$

$d-1=d-3{,}4 \qquad d=\frac{22\pm\sqrt{484-340}}{10}=\frac{22\pm12}{10}$

$d_1=1 \quad d_2=3{,}4$

$a_1^2+15da_1+56d^2-5a_1-10d-39<0$

$a_1^2+a_1(15d-5)+(56d^2-10d-39)<0$

$a_1=\frac{5-15d\pm\sqrt{225d^2-150d+25-224d^2+40d+156}}{2}$

$\sqrt{D}=\sqrt{d^2-110d+181} \qquad d^2-110d+181=0$

$56d^2-10d-\cancel{3}5<24-a^2-a_1(15d-5) \qquad d=\frac{110\pm\sqrt{1[illegible]-}}{2}$

2
15
15
75
15
225

22
22
44
44

3
106
106
636
1066
11236

10000
106
100

3
121
4
724

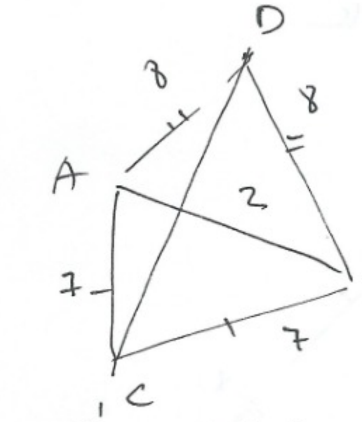
11

3
39
4
156
25
181

12100
724
11376

21101462 (U262748 M1301609)

Черновик



$6b-13$

$13 a^2 + b^2 = a^2+4a+\cancel{b}+6b+9\cdot+b^2$

21101462 (U262748 M1301609)

$4a+4+9=6b$

$13=a^2+b^2$

$4a \quad 13=$

$a^2=13-b^2$

3 26 6 156

13 13 39 13

1 16 13 48

208 −169 39

52 | 13 52 4

156 | 13 13 12

16 208

$13=\frac{(6b-13)^2}{16}+b^2$

$13=\frac{36b^2-156b+169+16b^2}{16}$

$52b^2-156b-39=0$

$4b^2-12b+3=0$

№3

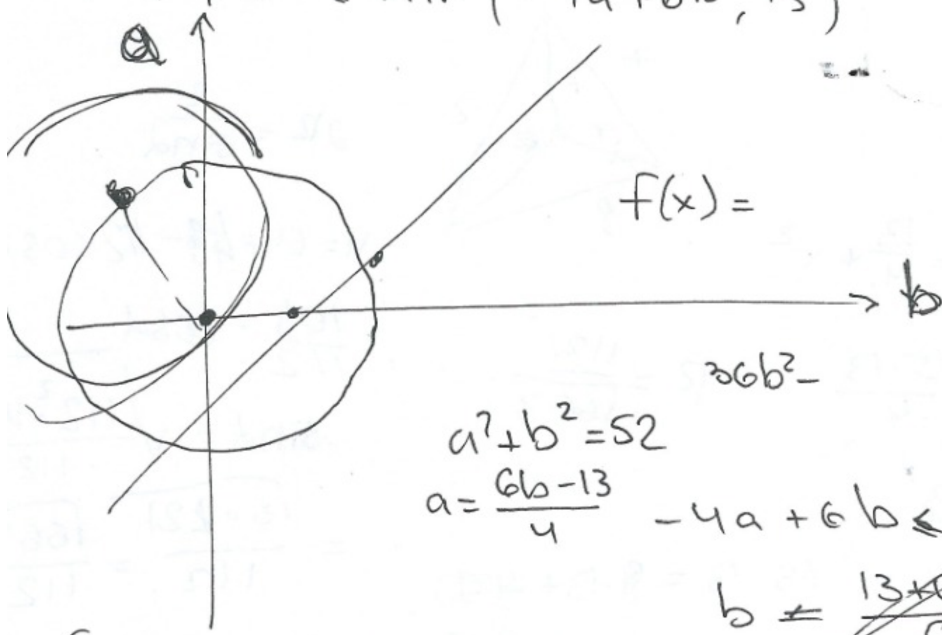
$b=\frac{12\pm\sqrt{144+48}}{8}=\frac{12+\sqrt{192}}{8}$

$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13 \\ a^2+b^2\le \min(-4a+6b,13)\end{cases}$ ← окр ω6 O(a;b)

a^2+b^2

$a^2+b^2\le 13$

$a^2+b^2\le -4a+6b$



$f(x)=$

$a^2+4a+4-4$
$+b^2-6b+9-9\le 0$

$36b^2-$

$(a+2)^2+(b-3)^2\le 13$

$a^2+b^2=52$

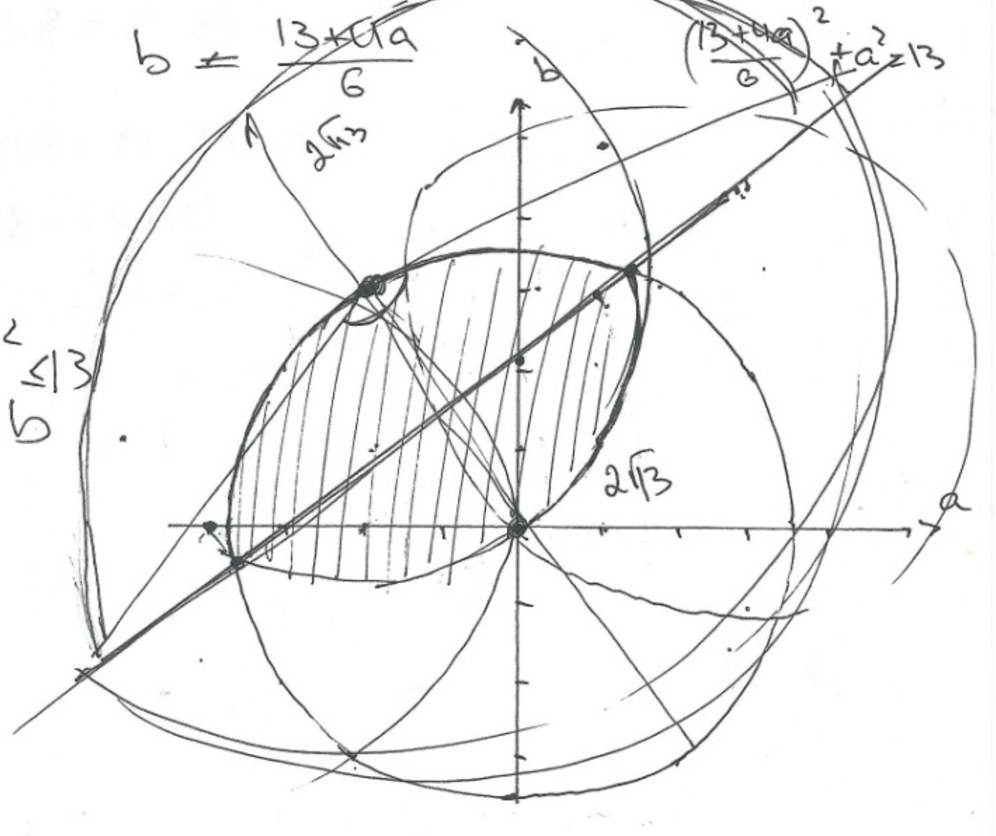
$a=\frac{6b-13}{4}$

$-4a+6b\le 13$

$b \le \frac{13+4a}{6}$

$\left(\frac{13+4a}{6}\right)^2+a^2=13$

$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13 \\ a^2+b^2\le 13 \\ 13\le -4a+6b \\ a^2+b^2 \begin{cases}(a+2)^2+(b-3)^2\le 13 \\ 13\ge -4a+6b\end{cases}\end{cases}$

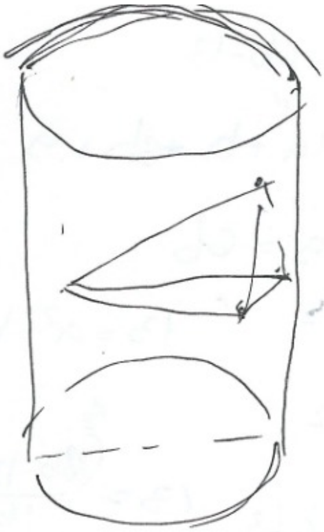


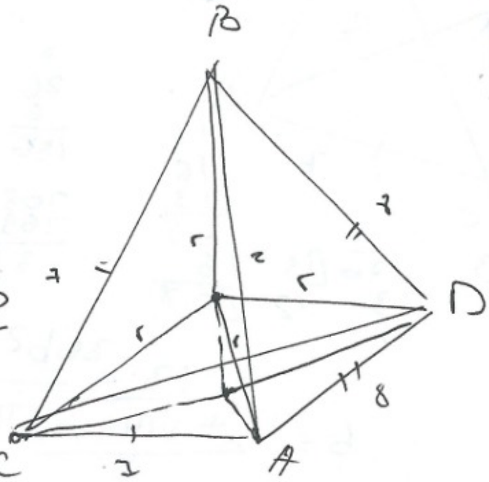
$13=4a+6b$

$b=\frac{13+4a}{6}$

$\int(a^2+b^2$

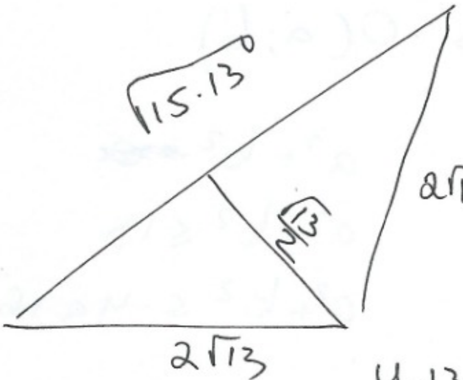
Черновик

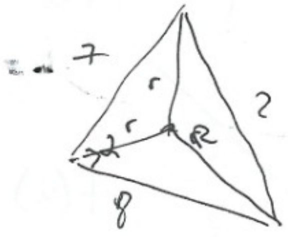




$\frac{\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{\sqrt{15}\cdot\sqrt{13}}{2}$

$\frac{13\sqrt{15}}{4}$





$2R=\frac{2}{\sin\alpha}$

$4=64+49-112\cos\alpha$

$\frac{109}{112}=\cos\alpha$

$\sin\alpha=\sqrt{\frac{112^2-109^2}{112^2}}$

$=\frac{\sqrt{3\cdot221}}{112}=\frac{\sqrt{663}}{112}$

$4\cdot13=\frac{13}{4}+x^2$

$x^2=\frac{15\cdot13}{4}$ $R=\frac{112}{\sqrt{663}}$

$\frac{\sqrt{15\cdot13}}{2}$

$15\cdot13=8\cdot13+\cancel{4\cdot13}$

$-8\cdot13\cos\alpha$

$15\cdot13=8\cdot13(1-\cos\alpha$

$15-8=-8\cos\alpha$

$\cos\alpha=-\frac{7}{8}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101462**

ID профиля: **262748**

Вариант 20

Чистовик Лист №1

№1

Не уменьшая общности, пусть $a \geqslant b \geqslant c$.
Заметим, что т.к НОК$(a, b, c) = 2^{17} \cdot 5^{16}$ => a, b и c состоят только из множителей 2 и 5 =>
Пусть $a = 2^{k} \cdot 5^{r}$; $b = 2^{m} \cdot 5^{n}$; $c = 2^{L} \cdot 5^{s}$, т.к НОД = 10 => $L \geqslant 1, S \geqslant 1$ => $k \geqslant m \geqslant L \geqslant 1$, $r \geqslant n \geqslant s$ =>
т.к $a = b \cdot 2^{k-m} \cdot 5^{r-n}$ и $a = c \cdot 2^{k-L} \cdot 5^{r-s}$ => $a =$ НОК(a, b, c), в противном случае, т.к a можно получить из b и c => НОК $\neq 2^{17} \cdot 5^{16}$, что не верно => $a = 2^{17} \cdot 5^{16}$. При этом, т.к $m \geqslant L$, если $L \geqslant 2$, то и $m \geqslant 2$ => НОД $\geqslant 20$, т.к появляются доп. множители 2 или 5, поэтому, что бы НОД $= 10$ => $c = 10$. Тогда для $b = 2^{m} \cdot 5^{n}$ => $17 \geqslant m \geqslant 1$, $16 \geqslant n \geqslant 1$
=> b может принимать $18 \cdot 17 = 306$ различных значений. Тогда имеем числа: 10; $2 \cdot 10^{16}$; b (b принимает 306 различных значений) можно составить тройки:

$$\left.\begin{matrix} (10; 2\cdot10^{16}; b) \\ (2\cdot10^{16}; 10; b) \\ (10; b; 2\cdot10^{16}) \\ (2\cdot10^{16}; b; 10) \\ (b; 10; 2\cdot10^{16}) \\ (b; 2\cdot10^{16}; 10) \end{matrix}\right\}$$

каждая тройка из-за b имеет 306 различных „вариаций“. Тогда всего различных троек: $6 \cdot 306 = 1836$.

Ответ: 1836

Чистовик Лист №2

№2

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$; $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$; $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) \Rightarrow$

$$\begin{cases} x-4>0 \\ x-4\neq 1 \\ 2x-8>0 \\ 2x-8\neq 1 \\ 5x-26>0 \\ 5x-26\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x>5{,}2.$$

Пусть $a = x-4 \Rightarrow$
$2x-8 = 2a$
$5x-26 = 5a-6 .\Rightarrow$ $\Big| \Rightarrow$ Числа примут вид:

$a>1{,}2$

①ое число ②ое число ③е число

$2\log_{2a}a$; $\frac{1}{2}\log_a 5a-6$; $2\log_{5a-6}2a$

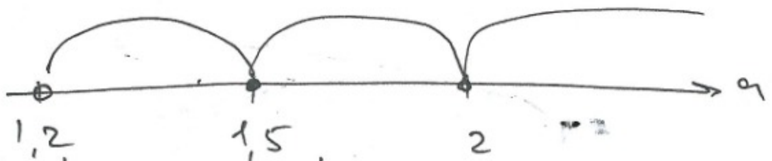
Рассмотрим случаи когда логарифмы принимают значения ≥ 1 и <1:

① $a\geq 2a$ (для $a>0$: $2a>a$ $\forall a$) $\Rightarrow 2\log_{2a}(a) \leq 2$ $\forall a$ $(a>1{,}2)$

② $5a-6\geq a$
$a\geq 1{,}5$ $\Big| \Rightarrow$ для $a\geq 1{,}5$: $\frac{1}{2}\log_a(5a-6)\geq\frac{1}{2}$
для $a<1{,}5$: $\frac{1}{2}\log_a(5a-6)<\frac{1}{2}$

③ $5a-6\leq 2a$
$a\leq 2$ $\Big| \Rightarrow$ для $a\leq 2$: $2\log_{(5a-6)}2a \geq 2$
для $a>2$: $2\log(5a-6)2a<2$

Тогда имеем:



$2\log_{2a}a<2$	$2\log_{2a}a<2$	$2\log_{2a}a<2$
$\frac{1}{2}\log_a(5a-6)<\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\log_a(5a-6)>\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\log_a(5a-6)>\frac{1}{2}$
$2\log(5a-6)2a\geq 2$	$2\log(5a-6)2a>2$	$2\log(5a-6)2a\leq 2$

Заметим, что при $a\in[1{,}2;1{,}5]$: 1ое и 3е числа не имеют общих значений (т.к $2\log(5a-6)2a=2$, при $a=2$) $\Rightarrow$ 1ое число = 2ому числу $<\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ даже прибавив $+1$ $\frac{1}{2}+1<2$ $\Rightarrow \frac{1}{2}\log_a(5a-6)+1<2\log(5a-6)2a$ $\forall a\in[1{,}2;1{,}5] \Rightarrow$ на этом промежутке решений нет.

Рассмотрим промежуток $[2;+\infty)$ ~~$[1{,}8;2)$~~, т.к 1ое и 3е числа не превышают 2 а 2ое больше $\frac{1}{2}$, то т.к логариф положителен, то (1ое = 3е числа равны) и 2ое ~~+1~~ = 3е $\Rightarrow \frac{1}{2}\log_a(5a-6) \overset{\text{(минимальное)}}{\neq} 1{,}5 \Rightarrow 2\log_{2a}a\neq 0{,}5 \Rightarrow$ $a=0$ (невозможно) $\Rightarrow$ на этом промежутке решений нет. Продолжения смотри на Лист №3

Чистовик Лист №3 №2 продолжение

Рассмотрим $a \in (1,5;2]$. Т.к 3е число возрастает со значения 2, а 1ое (убывае), а 2ое возрастает не с числа $\frac{1}{2}$ =>

1ое число = 2ому и 1ое число $-1 =$ 3е число

(т.к $2-1=1$) => минимальное значение второго числа:

$1 \Rightarrow \frac{1}{2}\log_a(5a-6) = 1 \Rightarrow a^2 - 5a + 6 = 0 \Rightarrow$

$a_1 = 2$ $a_2 = 3$, т.к $a \in (1,5;2] \Rightarrow a = 2$.

Проверим его:

При $a=2$ числа равны: $2\log_4 2$; $\frac{1}{2}\log_2 4$; $2\log_4 4$ =>

1ое число = 2ому и 3е на 1 больше.

=> $a=2$ - единственное правильное решение =>

$x = 6$.

Ответ: 6

Черновик

$a \vdots 10 \quad b \vdots 10 \quad c \vdots 10$

$abc \vdots 10^3 \vdots 2^3 \cdot 5^3$

$НОК \vdots a \vdots b \vdots c$

$НОК = 10^{16} \cdot 2$

$10 ; 2 \cdot 10^{18} , \square \times 306$

$2 \cdot 10^{16} ; 10 ; \square \times 306$

$10 ; \square ; 2 \cdot 10^{16} \quad \times 306$

$2 \cdot 10^{16} ; \square ; 10 \times 306$

$\square \quad ; \quad \times 306$

$\times 306$

~~c=2·5~~ $c = 2^n \cdot 5^m = 2^1 \cdot 5^1 = 10$

b r $b = 2^k \cdot 5^L = 2^k \cdot 5^L$

$a = 2^r \cdot 5^P = 2^{17} \cdot 5^{16}$

$17 \geq k \geq 1 \quad 5$

17шт $\quad 17$

$$\begin{array}{r} \overset{5}{18} \\ \cdot\ 17 \\ \hline 126 \\ 18 \\ \hline 306 \end{array}$$

$10 ; 2 \cdot 10^{16} ;$

$10 ; 2\, 10^{16} ; 306 ;$

$$\begin{array}{r} \overset{3}{306} \\ 6 \\ \hline 1836 \end{array}$$

~~1836~~ $\boxed{1836}$

---

log

$$\frac{1}{2}\log_{x-4}(2x-8) = 2\log_{x-4}(5x-26)$$

$x-4 > 0 \qquad x > 4$

$x-4 \neq 1 \qquad x = 5$

$2x-8 > 0 \qquad x \neq 4{,}5$

$2x-8 \neq 1 \qquad x > 5{,}2$

$5x-26 > 0 \qquad x \neq \frac{27}{5}$

$5x-26 \neq 1$

$\boxed{x > 5{,}2}$

$$\begin{array}{r} 26 \,\underline{|5} \\ -25 \quad 5{,}2 \\ \hline 10 \end{array} \qquad 27\underline{|5} \quad \frac{25}{2}\ 3,$$

$$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{\underset{a}{(x-4)^2}} \underset{b}{(5x-26)}$$

$$\frac{\overset{c}{2}}{2\log_{x-4}(2x-8)} = \frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)$$

$$(x-4)^{2 \cdot \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)} = 5x-26$$

$\log_a b = c$

$a^c = b$

$\log_4 12$

$\log_6 4\ 34$

$\log_{34} 4$

$$2\log_{5x-26}(2x-8) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\log_{5x-26}(x-4)}$$

$$4\log_{5x-26}(2(x-4)) \log_{5x-26}(x-4) = 1$$

2log

$\log_4 4 = 1$

$\log_2 4 = 2$

$\log_2 2 = 1$

$\boxed{x = 6}$

Черновик

$\log_a b = k\log_b c$ $\quad$ $\log_{\underset{a}{\underline{2x-8}}} \underset{b}{\underline{(x-4)}} = \underset{k}{\underline{\frac{1}{4}}} \log_{\underset{b}{\underline{x-4}}} (\underset{c}{\underline{5x-26}})$

$\frac{1}{\log_b a} = k\log_b c$

Пусть $x-4=a$

$2x-8=2a$

$5x-26=5a-6$

$\frac{\ln b}{\ln a} - \frac{k\ln c}{\ln b} = 0$

$\frac{\ln^2 b - k\ln c\ln a}{\ln a\ln b} = 0$

$\ln^2 b = k\ln c\ln a$ $\quad$ $\underbrace{2\log_{2a} a}_{<2}$

$\ln b\ln b = k\ln c\ln a$

$\ln(x-4)\ln(x-4) = \frac{1}{4}\ln(5x-26)\ln(2x-8)$

$x-4=2x-8$ $\quad$ $2x-8=5x-26$

$x=4$ $\quad$ $3x=18$

$x=6$

$5a-6>$

$3a>$

$a>2$

$\underbrace{2\log_{2a} a}_{<1}$; $\underbrace{\frac{1}{2}\log_a 5a-6}_{\geqslant\frac{1}{2}}$; $2\log_{5a-6} 2a$

$4a=5a-6$

$a=6$

$x=$

$a>1,2$

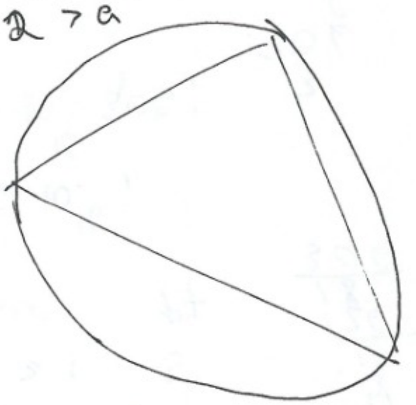
$5a-6$

$2a>5a-6$

$6>3a$

$2>a$

$2\log_{12} 6$; $\frac{1}{2}\log_6 24$



$4\log_{12} 6 = \log_6 24$

$4\ \frac{1}{\log_6 12} = \log_6 24$

$1<\ \ <2$

$0,55\ \ <1$

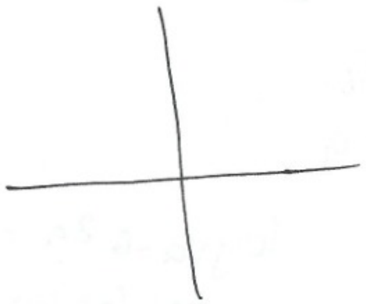
$2<\ \ <4$

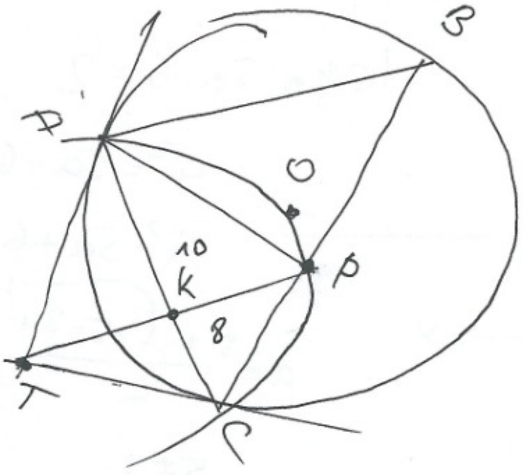
$5a-6>a$

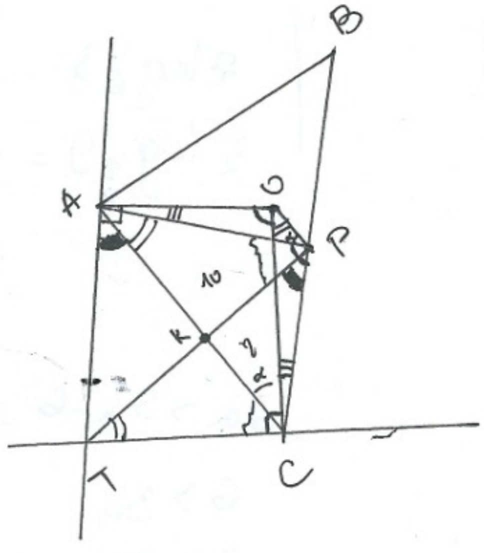
$a>\frac{6}{4}=\frac{3}{2}>1,5$

[redacted]

Черновик







ξ + ▨ =)

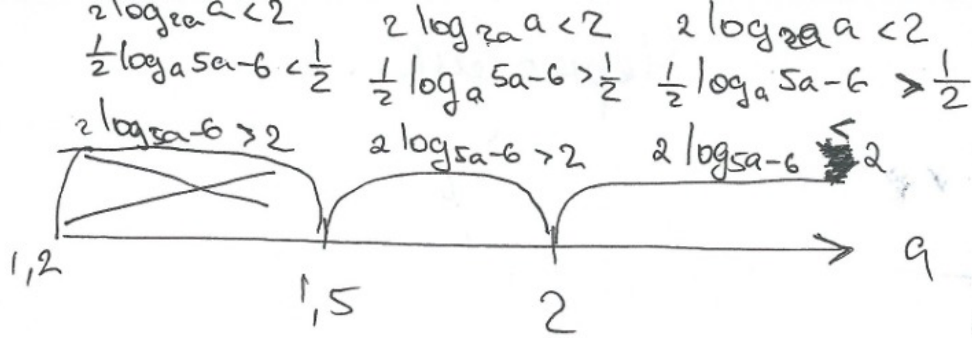
▨ +)) +))) = 90

α + ξ = ▨ +))

α + ξ +))) = 90

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) - \log_{\sqrt{x}}$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}\left((5x-26)(x-4)^2\right)$



Черновик

$a\in[1,5;2]$

$2a[3;4)$

$5a-6\in[1,5;4]$

$2a^a$ $.a^{5a-6}$

$\log_{5a-6}2a=1$

$5a-6=2a$

$3a=6$

$a=2$

$\log_a 5a-6=2$

$a^2=5a-6$

$a^2-5a+6=0$

$a=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=$

$a=\frac{5\pm 1}{2}$

$a_1=2$ $a_2=3$

$\log_{2a}a=\frac{1}{2}$

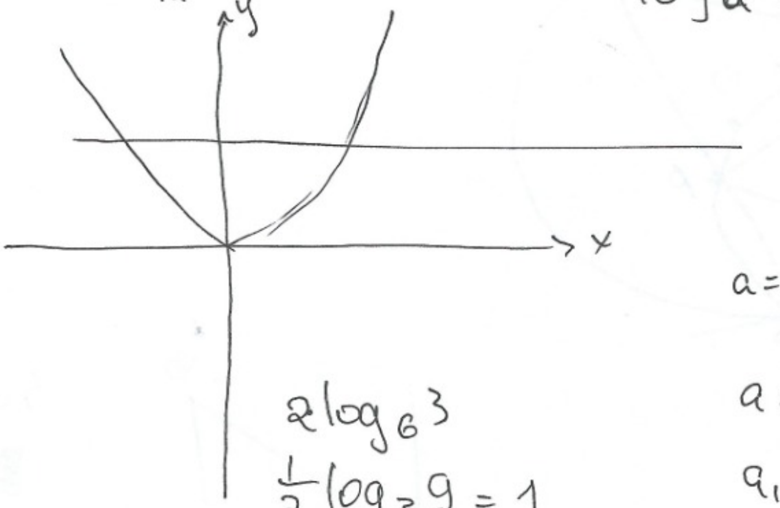
$\sqrt{2a}=a$

$a^2=2a$

$a=0$ или $a=2$

$2\log_3 1,5$

$\frac{1}{2}\log_{1,5}3$



$2\log_6 3$

$\frac{1}{2}\log_3 9=1$

$2a>5a-6$

$6>3a$

$2>a$

a^2

$5a-6=2a$