Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101459**

ID профиля: **848929**

Вариант 20

$$0 < d < 2$$
$$d = 1$$

$$a^2+15a+56-39 < 5a+10 < a^2+15a+50-15$$

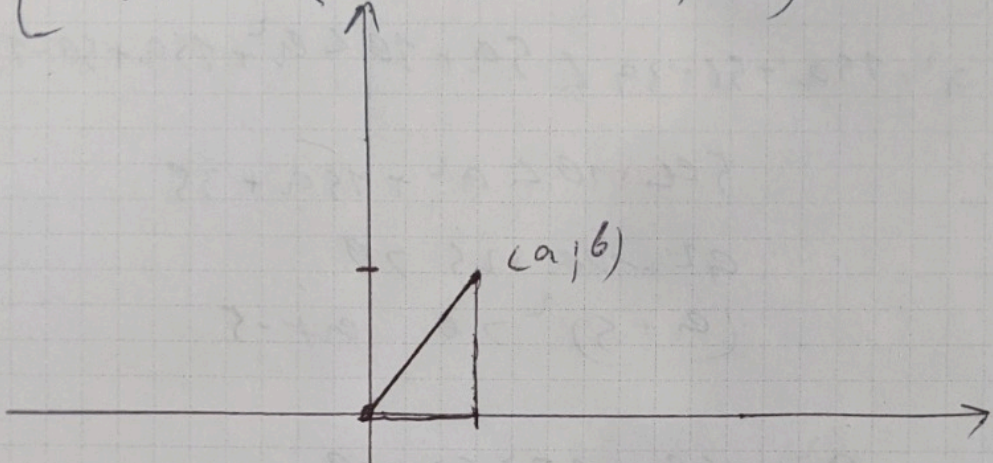
$$5a+10 < a^2+15a+35$$
$$a^2+10a+25 > 0$$
$$(a+5)^2 > 0 \quad a \neq -5$$

$$a^2+15a+17 < 5a+10$$
$$a^2+10a+7 < 0$$
$$\cancel{D} \; D = 100-28$$

$$a^2+8a+7a+56-39 < 5a+10$$
$$a^2+10a+7 < 0$$
$$D = 100-28 = 72$$
$$a_{1,2} = \frac{-10 \pm 3\sqrt{8}}{2} = -5 \pm 3\sqrt{2}$$

$-5-3\sqrt{2}$ $\qquad$ $-5+3\sqrt{2}$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b;13)\end{cases}$$



$x \cdot$

$x^2+\frac{(4x+13)^2}{36}-13\le 0 \,/\cdot 36$ $\quad x^2+4x+\frac{(4x+13)^2}{36}-4x-13\le 0$

$0\le -4a-6b<13$

$-13\le 4a+6b\le 0$

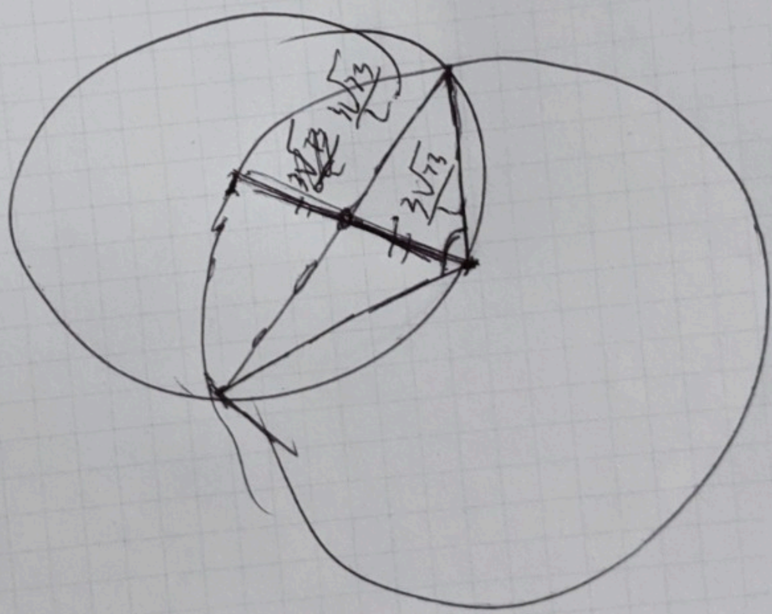
Найти

a, b, такие что

есть ~~решение~~ хотя бы одно решение $(x;y)$

$(x-a)^2+(y-b)^2\le(\sqrt{13})^2$

$x^2+y^2\le \min(-4x-6y;13)$


$\frac{4\sqrt{73}}{2}$
$\frac{3\sqrt{73}}{2}$

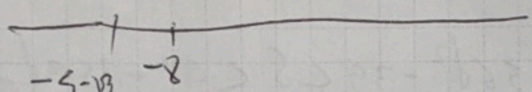
$5a + 10 > a^2 + 15a + 17$

$a^2 + 10a + 7 < 0$

$D = 100 - 28 = 72$

$a_{1,2} = \frac{-10 \pm 3\sqrt{8}}{2} = -5 \pm 3\sqrt{2}$

$= -5 - 3\sqrt{2}$ $\qquad -5 - 3\sqrt{2} \vee -9$



$9 \vee 5 + 3\sqrt{2}$

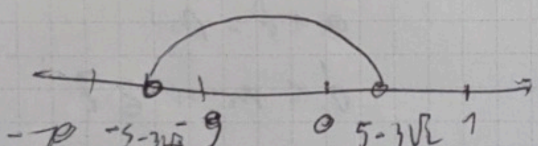
$4 \vee 3\sqrt{2}$

$-5 - 3\sqrt{2} \vee -10$ $\qquad 16 \vee 18$

$\cancel{10}\ 5 \vee 3\sqrt{2}$ $\qquad -5 - 3\sqrt{2} \vee -9$

$25 \vee 18$ $\qquad 4 \vee 3\sqrt{2}$

$16 \vee 18$



$5 - 3\sqrt{2} \vee 2$

$3 \vee 3\sqrt{2}$

$5 - 3\sqrt{2} \vee 1$

$4 \vee 3\sqrt{2}$

16

$-\frac{4}{3} - 3 + \frac{13}{6} = -\frac{8}{6} - \frac{18}{6} + \frac{13}{6} = -\frac{13}{6}$

$\frac{-4x - 13}{6} = 0$

$-4x = 13$

$x = -\frac{13}{4}$

$A = -\frac{4}{6}$

$\frac{4x}{6} + y + \frac{13}{6} = 0$

$d = |MAx + 1|$

$\frac{|AM_x + BM_y + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$

$a \quad d$

$S = \frac{a+a+4d}{2} \cdot 5 = (a+2d)5$

$a_6 \cdot a_{11} = (a+5d)(a+10d) =$

$= a^2 + 15ad + 50d^2$

$a_8 \cdot a_9 = (a+7d)(a+8d) = a^2 + 15ad + 56d^2$

$a^2 + 15ad + 56d^2 - 39 < S < a^2 + 15ad + 50d^2 - 15$

$\cancel{a^2} + \cancel{15ad} + 56d^2 - 39 < \cancel{a^2} + \cancel{15ad} + 50d^2 - 15$

$6d^2 - 24 < 0$

$d^2 < 4$

$-2 < d < 2$

$d > 0$

$a = n$

$a + d = m$

$d = m - n \in \mathbb{Z}$

$0 < d < 2$

$d = 1$

$a^2 + 15a + 17 < 5a + 10 < a^2 + 15a + 35$

$5a + 10 < a^2 + 15a + 35$

$a^2 + 10a + 25 > 0$

$(a+5)^2 > 0 \quad a \neq -5$

21101459 (U848929 M1301611)

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a\,x^2+y^2 \le \min(-4x-6y;\,13) \end{cases}$$

$0 \le -4x-6y \le 13$

$-4x-6y \ge 0$

$6y \le -4x$

$y \le \frac{-4x}{6}$

$-4x-6y \le 13$

$6y+4x \ge -13$

$y \ge \frac{-4x-13}{6}$

$\frac{4-13}{6} = \frac{-9}{6} = -\frac{3}{2}$

$-4x-6y > 13$

$6y < -4x-13$

$y < \frac{-4x-13}{6}$

$\frac{-4x-13}{6} = 0$

$-4x-13 = 0$

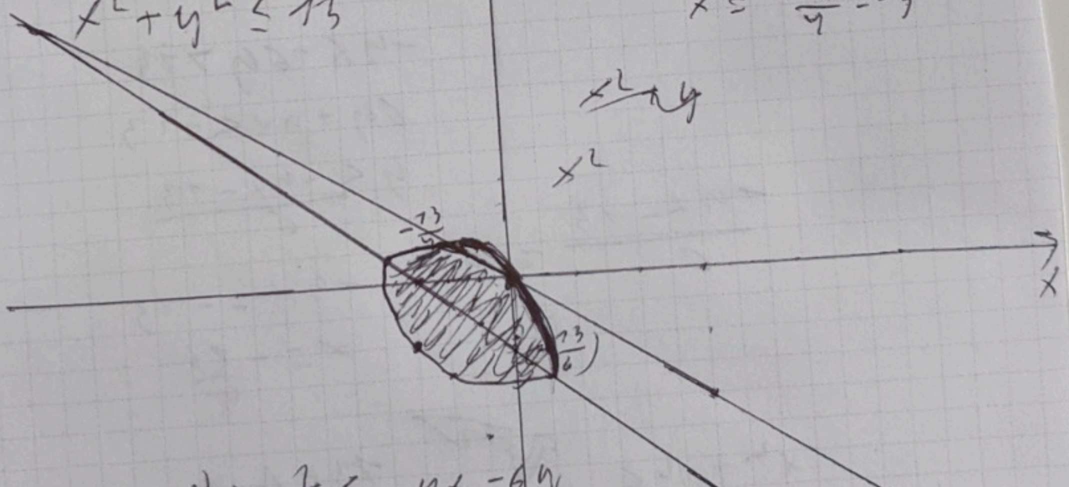
$4x = -13$

$x = -\frac{13}{4} = -3$

$x^2+y^2 \le 13$

x^2+y

x^2

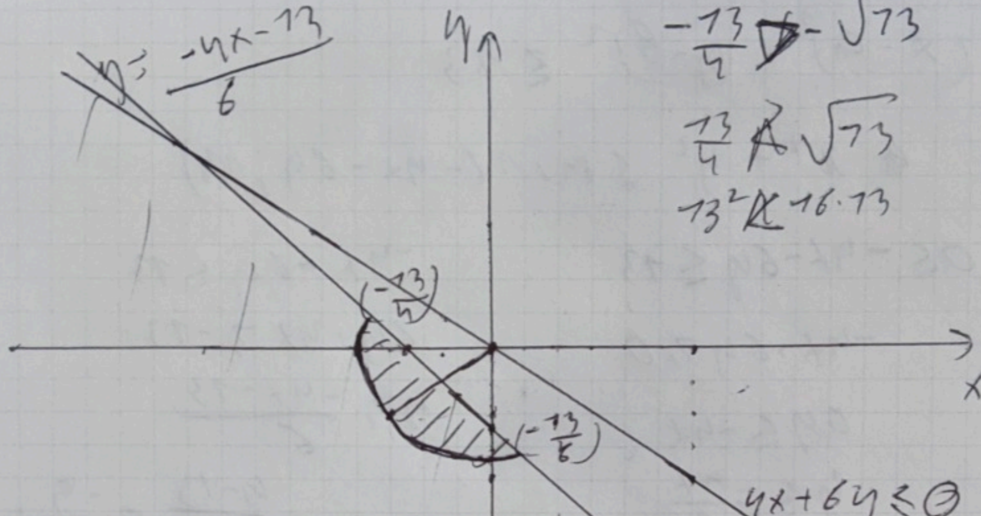


$x^2+y^2 \le -4x-6y$

$x^2+4x+y^2+6y \le 0$

$(x+2)^2+(y+3)^2-4-9 \le 0$

$(x+2)^2+(y+3)^2 \le 13$



$-\frac{13}{4} \; \cancel{>} \; -\sqrt{13}$

$\frac{13}{4} < \sqrt{13}$

$13^2 < 16 \cdot 13$

$4x + 6y \leq 0$

$y \leq \frac{-4x}{6}$

$4x + 6y \geq -13$

$0 \leq -4x - 6y \leq 13$

$\cancel{-4x} \; -13 \leq 4x + 6y \leq 0$

$6y \geq -4x - 13$

$y \geq \frac{-4x-13}{6}$

$-4x - 6y > 13$

$6y + 4x < -13$

$y < \frac{-4x-13}{6}$

$\frac{-4x-13}{6} = 0$

$-4x = -13$

$x = -\frac{13}{4}$

$x^2 + y^2 \leq -4x - 6y$

$13 = 4 + 9$

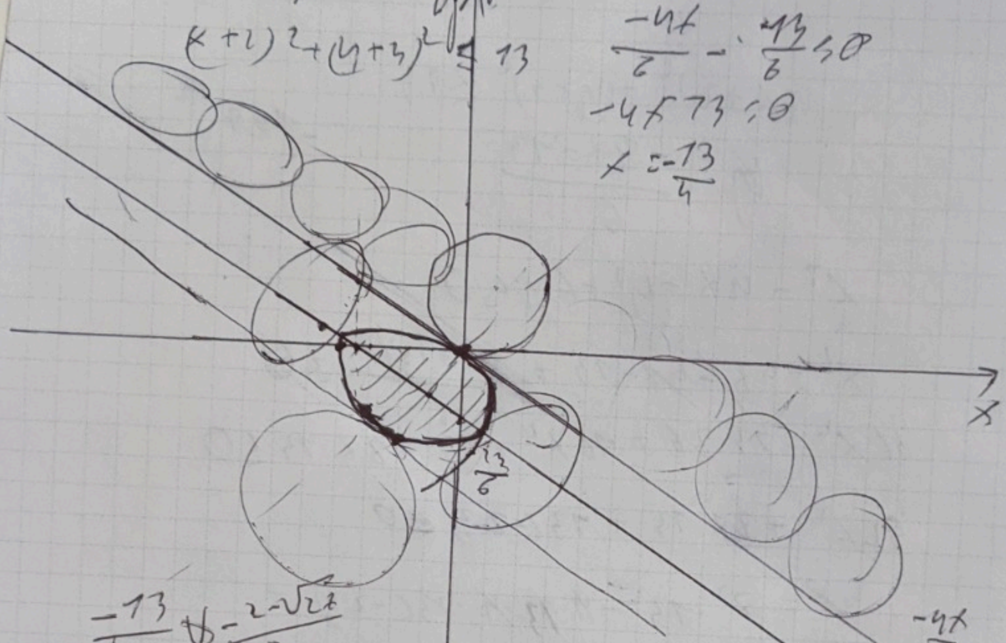
$x^2+y^2 \leq -4x-6y$

$(x+2)^2+(y+3)^2 \leq 13$

$\frac{-4x}{6}-\frac{13}{6} \leq 0$

$-4x-13=0$

$x=-\frac{13}{4}$



$\frac{-13}{4} \neq \frac{2-\sqrt{27}}{2}$

$-13 \neq -4-2\sqrt{27}$

$\frac{-2 \mp \sqrt{27}}{2}$

$9 \neq 2\sqrt{27}$

$81 \neq 4 \cdot 27$

$-\frac{4x}{6}$

$y=-\frac{4x}{8}-\frac{13}{6}$

$x^2+y^2 \leq 13$

$x^2+\frac{(4x+13)^2}{36} \leq 13$

$36x^2+16x^2+13^2+8\cdot 13x \leq 13\cdot 36$

$52x^2+8\cdot 13x-13(-13+36) \leq 0$

$52x^2+8\cdot 13x-13\cdot 23 \leq 0$

$D=8^2\cdot 13^2+4\cdot 52\cdot 13\cdot 23=4^2(2^2\cdot 13^2+13\cdot 13\cdot 23)=$

$=4^2\cdot 13^2(4+23)=27\cdot 4^2\cdot 13^2$

$x_{1,2}=\frac{-8\cdot 13 \pm 13\cdot 4\sqrt{27}}{2\cdot 52}=$

$=\frac{-4 \pm 2\sqrt{27}}{4}=$

$=\frac{-2 \pm \sqrt{27}}{2}$

$$y = \frac{-4x - 13}{6}$$

$$y = \frac{-47}{6}$$

$$\cancel{\frac{-4x}{6}} - \frac{13}{6} = \cancel{\frac{-4x}{6}}$$

$a_6 a_{11} > S+15$ $\quad a \quad d$

$a_8 a_9 < S+39$ $\quad S = \frac{a+a+4d}{2}\cdot 5 = (a+2d)5$

$(a+5d)(a+10d) > S+15$

$(a+7d)(a+8d) < S+39$

$a^2+15ad+56d^2-39 < S < a^2+15ad+50d^2-15$

$\cancel{a^2}+\cancel{15ad}+56d^2-39 < \cancel{a^2}+\cancel{15ad}+50d^2-15$

$6d^2 < 24$ $\quad a \in Z$

$d^2 < 4$ $\quad a+d \in Z$

$-2 < d < 2$

$a = n$

$a+d = h$

$d =$ $\quad d = h-n \in Z$

$\cancel{a>a}$ $\quad a+d > a$ $\quad 39$

$d > 0$ $\quad -15$

24

$a \quad d$

$\frac{a+a+4d}{2}\cdot 5 = S = 5(a+2d)$

$(a+7d)(a+8d)-39 < S < (a+5d)(a+10d)-15$

$\cancel{a^2}+8ad+7ad+56d^2-39 < \cancel{a^2}+10ad+5ad+50d^2-15$

$\cancel{15ad}+56d^2-39 < \cancel{15ad}+50d^2-15$

$6d^2 < 24 \quad d^2 < 4 \quad -2 < d < 2$

Чистовик

$KC = \sqrt{30} + \sqrt{13}$

$\angle COB = 2\angle COA$

$tg\,COA = \frac{2(\sqrt{30}+\sqrt{13})}{3\sqrt{13}}$

$$tg(\angle COB) = \frac{2tg\angle(COA)}{1+tg^2(\angle COA)} = \frac{\frac{4(\sqrt{30}+\sqrt{13})}{3\sqrt{13}}}{1+\frac{4(30+13+2\sqrt{390})}{9\cdot 13}} =$$

$$= \frac{4(\sqrt{30}+\sqrt{13})\cdot \cancel{9}\cdot 13}{\cancel{3}\sqrt{13}(9\cdot 13+4(43+2\sqrt{390}))} = \frac{12\sqrt{13}(\sqrt{30}+\sqrt{13})}{(117+172+8\sqrt{390})} = k$$

$COB = arctg(k)$

$$\frac{\pi R_n^2}{2\cdot\frac{\pi}{2}} = \frac{x}{COB}$$

$x = R_n^2\cdot COB$

$S_B = 2x = 2\cdot 9\cdot 13\cdot CB = 18\cdot 13\cdot COB$

Ответ: $S = 18\cdot 13\cdot COB$

$\cancel{0}$

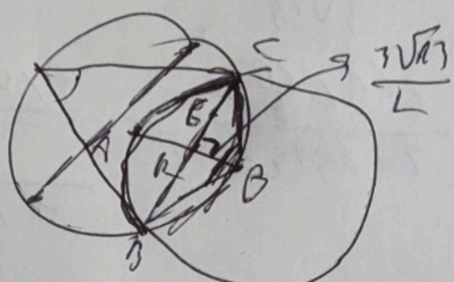
21101459 (U848929 M1301611)

то $R_4 = \sqrt{13} + AB + CD$ чистовик

на графике изображены

Т.к $R_3 = \sqrt{13}$, то $AB = R_3 = CD = \sqrt{13}$ $\Leftrightarrow$

$\Rightarrow R_4 = 3\sqrt{13}$



Чтобы узнать S_{ACOB} надо найти GKC

$KC = \sqrt{13} + GK$

$AD =$

$0 = b$

$-3 = -2k + b$

$k = -1,5$

$LD = 1,5x -$

$1,5x = \frac{-4x - 13}{6}$

$9x = -4x - 13$

$13x = -13$

$x = -1$

$y = -\frac{3}{2}$

$(-1; -\frac{3}{2})$

9

$kG =$

$x = \frac{3\sqrt{3} - 2}{2}$

$y = \frac{-6\sqrt{3} + 4 - 13}{6} = \frac{-6\sqrt{3} - 9}{6} = -\sqrt{3} - \frac{3}{2}$

$\delta(kG) = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2})^2} = \sqrt{27 + 3} = \sqrt{30} \Leftrightarrow kG = \sqrt{30}$

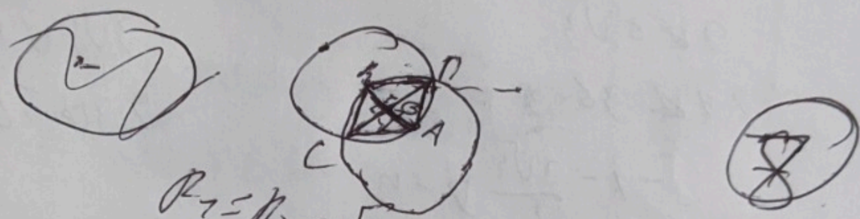
Чистовик

$S = \frac{13}{\sqrt{52}}$ / ...

$q((0;0); \frac{-4x-13}{6}) = q((-2;-3); \frac{-4x-13}{6})$

II

Дуги образованные этими окружностями симметричны и одинаковы



$R_1 = R_2 = \sqrt{13}$ и $OA = OB$,

тогда $\triangle CAD = \triangle CBD \Rightarrow \angle DBC = \angle CAB$ и дуги равны.

4) Если $\odot$ не касается этих дуг или не лежит в фигуре, то решений не будет

Т.е. если расстояние от $(a;b)$ до ближайшей точки фигуры A (2 дуги) $> \sqrt{13}$ – нет решений $\Rightarrow$ расст. от $(a;b)$ до ближ. точки A $\leq \sqrt{13}$

Расст от $(a;b)$ до ближ точки A – расст от $(a;b)$ до касат к дуге в этой ближ. точке

Все точки $(a;b)$, при которых $R_3 = \sqrt{13}$ и касаются A – B фигура, состоящая из дуг $\parallel$ дугам A, Рассмотрим в начале:

$$52x^2+8\cdot13x-13\cdot23=0$$

$$D=8^2\cdot13^2+4\cdot4\cdot13\cdot13\cdot23=4^2\cdot13^2(2^2+23)=$$

$$=4^2\cdot13^2\cdot27$$

$$x_{1,2}=\frac{-8\cdot13\pm4\cdot13\sqrt{27}}{8\cdot13}=-1\pm\frac{\sqrt{27}}{2}=-1\pm\frac{3\sqrt3}{2}$$

$-1-\frac{3\sqrt3}{2} \vee -\frac{13}{4}$

$13 \vee 4+6\sqrt3$

$9 \vee 6\sqrt3$

$81 \vee 36\cdot3$

$\frac{3\sqrt3}{2}-1 \vee 1$

$3\sqrt3 \vee 4$

$9\cdot3 \vee 16$

$-1-\frac{3\sqrt3}{2} \vee -4$

$4 \vee 1+\frac{3\sqrt3}{2}$

$8 \vee 2+3\sqrt3$

$6 \vee 3\sqrt3$

$36 \vee 27$

7

5

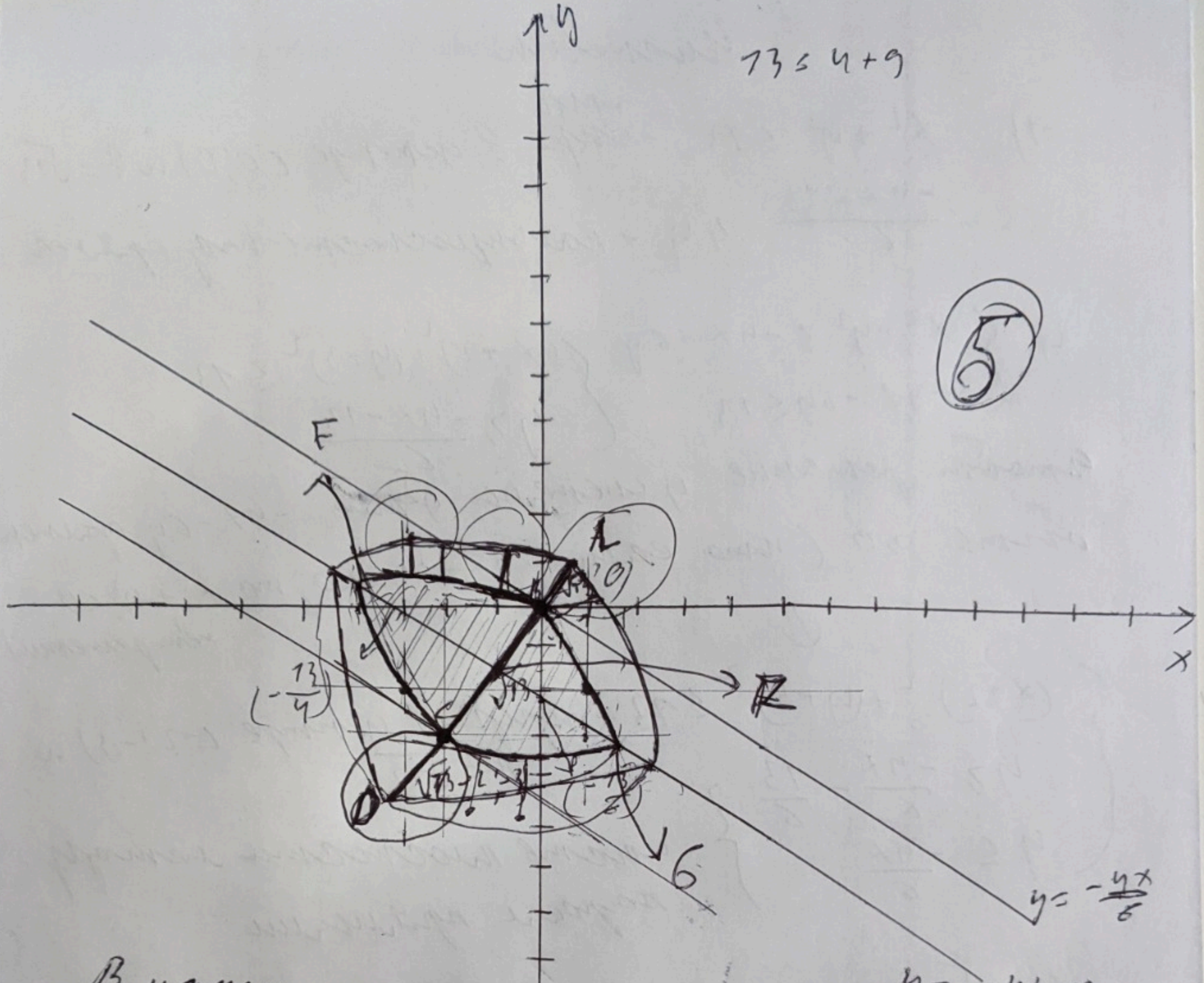
Нарисовав решений, получаем, что решения (2) лежат внутри фигуры созданной дугами окружностей

2) (1) $(x-a)^2+(y-b)^2\le13$ — ~~окружность~~ круг с центром $(a;b)$ и $R=\sqrt{13}$

3) Расст от $(-2;-3)$ до $y=\frac{-4x-13}{6}$

$$d=\frac{\left|\frac46\cdot-2+1\cdot-3+\frac{13}{6}\right|}{\sqrt{\frac{16}{36}+1}}=\frac{\left|-\frac{13}{6}\right|}{\sqrt{\frac{52}{36}}}=\frac{13\cdot6}{6\sqrt{52}}=\frac{13}{\sqrt{52}}$$

Расст от $(0;0)$ до $y=-\frac{4x-13}{6}$ $d=\frac{\left|\frac46\cdot0+1\cdot0+\frac{13}{6}\right|}{\sqrt{\frac{16}{36}+1}}=$



В каких точках пересекают окр-и прямую $y = \frac{-4x-13}{6}$

1) $x^2+4x+y^2+6y \le 0 \Leftrightarrow x^2+\cancel{4x}-\cancel{4x}-13+\frac{(4x+13)^2}{36} \le 0$

$36x^2-13\cdot 36+16x^2+13^2+8\cdot 13x \le 0$

$52x^2+8\cdot 13x-13\cdot 23 \le 0$

2) $x^2+y^2 \le 13$ $\quad 36x^2+16x^2+13^2+8\cdot 13x-13\cdot 36 \le 0$

$52x^2+8\cdot 13x-13(23) \le 0$

Нер-ва одинак $\Leftrightarrow$ Окр пересекают $y = \frac{-4x-13}{6}$ в одних и тех же точках

Листовик

1) $x^2+y^2 \leq 13$ – ~~окр~~ круг в центре $(0;0)$ и $R=\sqrt{13}$

$\frac{-4x-13}{6} \geq y$ – полуплоскость под прямой

4) $\begin{cases} x^2+y^2 \leq -4x-6y \\ -4x-6y \leq 13 \end{cases}$ $\begin{cases} (x+2)^2+(y+3)^2 \leq 13 \\ y \geq \frac{-4x-13}{6} \end{cases}$

чтобы решение у системы было $-4x-6y$ должен быть ≥ 0 (т.к. если $-4x-6y<0$, то $x^2+y^2<0$ нет решений)

$\Downarrow$

$\begin{cases} (x+2)^2+(y+3)^2 \leq 13 \text{ – круг в центре } (-2;-3) \text{ и } R=\sqrt{13} \\ y \geq \frac{-4x}{6} - \frac{13}{6} \\ y \leq \frac{-4x}{6} \end{cases}$

$\left.\begin{matrix} y \geq \frac{-4x}{6} - \frac{13}{6} \\ y \leq \frac{-4x}{6} \end{matrix}\right\}$ – часть плоскости между парал. прямыми.

Изобразим решения этой системы на плоскости XOY!

5

Чистовик

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b;\ 13) \end{cases}$$

Переформулировав условие получаем, что нужно найти все такие точки $(x;y)$, при которых эта система ~~реш~~ имеет решение)

$\Rightarrow$ $(x;y)$ - параметры

$(a;b)$ - переменные

Если $(x;y)$ и $(a;b)$ поменять ролями, то новое условие: найти все такие точки $(a;b)$, при которых система $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ x^2+y^2 \le \min(-4x-6y;\ 13) \end{cases}$

имеет решение.

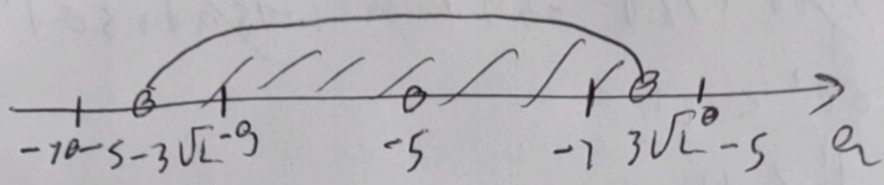
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 & ① \\ x^2+y^2 \le \min(-4x-6y;\ 13) & ② \end{cases} \qquad И$$

② $\qquad x^2+y^2 \le \min(-4x-6y;\ 13)$

Это мн-во разбивается на 2 системы

$$\begin{cases} x^2+y^2 \le 13 \\ -4x-6y \geq 13 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2+y^2 \le -4x-6y \\ -4x-6y \le 13 \end{cases}$$

Чистовик



$-10 < -5-3\sqrt{2} < -9$

$-5 < -3\sqrt{2} < -4$

$4 < 3\sqrt{2} < 5$

$16 < 18 < 25$

$\Downarrow$

$-10 < -5-3\sqrt{2} < -9$

$-1 < 3\sqrt{2}-5 < 0$

$4 < 3\sqrt{2} < 5$

$16 < 18 < 25$

$\Downarrow$

$-1 < 3\sqrt{2}-5 < 0$

$\Downarrow$

Ответ: $a \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

3

Чистовик

5) $\cancel{a^2}+\cancel{15ad}+56d^2-39<\cancel{a^2}+\cancel{15ad}+50d^2-15$

$6d^2<24$

$d^2<4$

$-2<d<2$

6) $\begin{cases} d\in\mathbb{Z} \\ d>0 \\ -2<d<2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\in\mathbb{Z} \\ 0<d<2 \end{cases} \Rightarrow d=1$ (т.е только при $d=1$ выполняются все условия из п. 1; 2; 4)

7) $d=1 \Rightarrow S=5a+10$

$a^2+15ad+56d^2-39<S<a^2+15ad+50d^2-15$

$a^2+15a+17<5a+10<a^2+15a+35$

Решив эту систему, мы получим промежуток для a и потом найдём там целые числа.

7.1) $5a+10<a^2+15a+35$

$a^2+10a+25>0$

$(a+5)^2>0$

$\Updownarrow$

$a\neq-5$

2

7.2) $a^2+15a+17<5a+10$

$a^2+10a+7<0$

$D=100-28=72$

$a_{1,2}=\dfrac{-10\pm3\sqrt{8}}{2}=-5\pm3\sqrt{2} \Rightarrow -5-3\sqrt{2}<a<3\sqrt{2}-5$

Чистовик

№1

Пусть a - первый член ар. прогрессии и d - разность прогрессии.

1) Т.к прогрессия возраст. $\Rightarrow \boxed{d>0}$

2) Т.к все члены прогрессий $\in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a \in \mathbb{Z} \\ a_2 = a+d \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a = m, m \in \mathbb{Z} \\ a+d = n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$ $d = n-m$ и т.к $(n-m) \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{d \in \mathbb{Z}}$

3) $S = \frac{a + a+4d}{2} \cdot 5 = (a+2d)5$

4) По условию: $a_6 a_{11} > S+15$

$\Downarrow$

$(a+5d)(a+10d) > S+15$

$\Downarrow$

$a^2+15ad+50d^2-15 > S$

и

$a_8 a_9 < S+39$

$(a+7d)(a+8d) < S+39$

$a^2+15ad+56d^2 < S+39$

$a^2+15ad+56d^2-39 < S$

Т.е: $a^2+15ad+56d^2-39 < S < a^2+15ad+50d^2-15$

Чтобы такой S существовал, надо чтобы: $(a^2+15ad+56d^2-39)$ было $< (a^2+15ad+50d^2-15)$

21101459 (U848929 M1301611)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101459**

ID профиля: **848929**

Вариант 20

1 1 1
2 2 2
3 3 3

1 1 1
1 1 2
1 1 3
1 2 2
1 2 3
1 3

1 1 1
1 2 1

1 1 1
1 1 2
1 1 3
1 2 1
1 2 2
1 2 3
1 3 1
1 3 2
1 3 3
2 1 1
2 1 2
2 1 3

2 2 1
2 2 2
2 2 3
2 3 1
2 3 2

1 1 1
1 1 2
1 1 3
1 2 1
1 2 2
1 2 3
2 1 1
2 1 2
2 1 3
2 2 1
2 2 2
2 2 3
3 2 1
3
2 3 3

3 1 1
3 1 2
3 1 3
3 2 1

3 2 2
3 2 3
3 3 1
3 3 2

3 3 3

21101459 (U8[illegible]29[illegible])

$a = 2^{x_1} \cdot 5^{y_1}$ $\quad 1 \le x_1 \le 17$

$b = 2^{x_2} \cdot 5^{y_2}$ $\quad 1 \le y_1 \le 16$

$c = 2^{x_3} \cdot 5^{y_3}$

$16 \cdot 17$

$(16\cdot 17)^3 - 3(16\cdot 17)\cdot(16\cdot 17) +$

$C_3^2 = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = 3$

$x_1 \; y_1 \quad x_2 \; y_2 \quad x_3 \; y_3$

$(16\cdot 17)^3 \qquad 16\cdot 17$

$(16\cdot 17)^3 - \frac{(16\cdot 17)^3}{6} =$

$(16\cdot 17)^3 -$

$a = 2^{x_1} 5^{y_1}$ $\quad 1 \leq x_1 \leq 17$

$b = 2^{x_2} 5^{y_2}$ $\quad a > b$

$c = 2^{x_3} 5^{y_3}$ $\quad 16 \cdot 17$

$(17 \cdot 16)^3 =$

$2^2 \cdot 5^2$ $\quad 1 \leq \quad \leq 2$

$(2 \cdot 2)^4$ $= 4$

$2^1 \cdot 5^1 = 10$

$2^2 \cdot 5 = 20$

$2^2 \cdot 5^2 = 100$

$2 \cdot 5^2 = 50$

10 10 10

10 20 100

10 100 50

10 10 10

10 20 100

10 10 10

10 10 10

10 10 20

10 10 100

10 10 50

10

~~10, 10, ...~~ E

$C_{16}^{3} = \frac{16!}{3!\,13!} =$

$= \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{6} =$

$= 5 \cdot 7 \cdot 16 = 35 \cdot 16 =$

$4^3 =$

3

35

$\times 16$

210

35

560

$2x-8=a$ $\quad x>4,2$
$7x-4=b$ $\quad x \neq \frac{27}{5}$
$5x-26=c$ $\quad a>1$
$b>1$

$2\log_a b \quad \frac{1}{2}\log_b c \quad 2\log_c a$

$a>b$ $\quad \log_b a > 1$

$0<2\log_a b<2$ $\quad 2\log_a b \cdot \frac{1}{2}\log_b c \cdot 2\log_c a =$

$= \log_a c \cdot 2\log_c a = 2$

$= 2$

$-(a)(a)(a+1)=2$ $\quad \sqrt{5x-26} = x-4$

$a^2(a+1)=2$ $\quad 5x-26 = x^2-8x+16$

$a^3+a^2-2=0$

$a=1$

$$\begin{array}{l|l} a^3+a^2-2 & a-1 \\ \hline -(a^3-a^2) & a^2+2a+2 \\ 2a^2-2 & \\ -(2a^2-2a) & \\ 2a-2 & \end{array}$$

$x^2-13x+42=0$

$D = 13^2-4\cdot 2\cdot 21 =$
$=1$

$2x-8=a$
$5x-26=b$ $\quad x>4,2$
$x-4=c$

$\frac{1}{2}\log_b c = 1$

$c^2=b$

$2\log_a c \quad \frac{1}{2}\log_c b \quad 2\log_b a$

$2\log_a c \cdot \frac{1}{2}\log_c b \cdot 2\log_b a = 2\log_a b \cdot \log_b a = 2$

$(a)(a)(a+1)=2$ $\quad a^3+a^2-2=0$

$a=1$

$$\begin{array}{l|l} a^3+a^2-2 & a-1 \\ \hline -(a^3-a^2) & a^2+2a+2 \\ 2a^2-2 & \\ -(2a^2-2a) & \\ 2a-2 & \\ -(2a-2) & \\ 0 & \end{array}$$

$(a-1)c$

$D=4-8$

21101459 (U848929 M1301612)

$2x-8=a$ $\quad a>0$ $\quad x>4$

$x-4=b$ $\quad a\neq 1$ $\quad x\neq\frac{9}{2}$

$5x-26=c$ $\quad b>0$ $\quad x>4$

$b\neq \pm 1$ $\quad x\neq 5;1$

$c>0$ $\quad x>\frac{26}{5}=5,2$

$c\neq 1$ $\quad x\neq\frac{27}{5}$

$5,2$ $\quad \frac{27}{5}$

$a>1$

$b,c>1$

$2\log_a b \cdot \frac{1}{2}\log_b c \quad 2\cdot\log_c a$

$a\vee b$ $\quad a>b$

$2x-8 \vee x-4$

$x-4\vee 0$

$x\vee 4$

$a\vee 2b$

$a=2b$

$a\vee c$

$2x-8\vee 5x-26$

$18\vee 3x$

$6\vee x$

$2\log_{2b} b \quad \frac{1}{2}\log_b c \quad 2\log_c 2b \quad x>6$

$2\log_a b\cdot\frac{1}{2}\log_b c=\log_a c>1 \quad 0<\log_c a<1$

$(a \quad a) \quad 2(a+1)$

$a^2 \quad a^2+a=a^2+a$

$\log_a c=4\log_a b \quad \log_c a=4\log_c b$

НОД (abc)

~~7 7 4~~ $\quad$ ~~$a = 2^a \cdot 5^b$~~

1 2 1 $\quad$ $a = 2^{x_1} \cdot 5^{y_1}$ $\quad$ $1 \le x_1 \le 17$ $\quad$ 17

7 1 2 $\quad$ $b = 2^{x_2} \cdot 5^{y_2}$ $\quad$ $1 \le y_1 \le 16$ $\quad$ 16

$c = 2^{x_3} \cdot 5^{y_3}$

1 $\quad$ 1 $\quad$ a b a

a c b

2 $\quad$ 2 $\quad$ $(16 \cdot 17)^3 -$ $\quad$ 1 2 1

3 $\quad$ 3 $\quad$ ~~$a \quad b_1 \quad c_1$~~ $\quad$ 1 ~~7 2~~

2 1 1 $\quad$ 1 2 1

$2\log_a b \quad \frac{1}{2}\log_b c \quad \frac{1}{2}\log_c a$ $\quad$ 2 1

$a = b = c$ $\quad$ 1 $\quad$ 1 1

$2x - 8 = a$

$x - 4 = b$ $\quad$ $2\log_a b \quad \frac{1}{2}\log_b c \quad 2\log_c a$

$5x - 26 = c$

$a > 0$ $\quad$ $2x - 8 > 0$

$b > 0$ $\quad$ $x > 4$ $\quad$ $x - 4 > 0$ $\quad$ 5,2 $\quad$ $\frac{27}{5}$

$c > 0$ $\quad$ $x = \frac{9}{4}$ $\quad$ $x > 4$

$x = 4 \pm 1$ $\quad$ $2x - 8 \ge x - 4$

$5x - 26 > 0$ $\quad$ $x \ne 5{,}3$ $\quad$ $x \ge 4$

$x > \frac{26}{5} = 5{,}2$

$x \ne \frac{27}{5}$ $\quad$ $5x - 26 \vee x - 4$ $\quad$ $a > b$

$4x \vee 22$ $\quad$ $5x - 26 \vee 2x - 8$

$x \vee \frac{22}{4} = 5{,}5$ $\quad$ $3x \vee 18$

$x \vee 6$

10 20 50
10 50 20

a b c
b a c
b c

a b c
b c b
b a c
b c a
c a b
c b a

$\frac{6}{6}$

1 a b c
a c b

a b c
$3 \cdot 2 \cdot 1 =$
$= 6$

5

$5^a \cdot 2^b$ $1 \leq a \leq 2$
$1 \leq b \leq 2$

10
20
100
50

10 10 10
20 20 20
100 100 100
50 50 50

10 {10, 20, 100, 50} {100, 20, 100, 50}

10 {10, 20, 100, 50} {10, 20, 100, 50}

Чистовик

№4

$$\begin{cases} НОД(a; b; c) = 10 = 2^1 \cdot 5^1 \\ НОК(a; b; c) = 2^{17} \cdot 5^{16} \end{cases}$$

Чтобы НОД был равен $2 \cdot 5^1$, то $a = 2 \cdot 5 \cdot x$
$b = 2 \cdot 5 \cdot y$
$c = 2 \cdot 5 \cdot z$,

$НОД(x; y; z) = 1$

Чтобы $НОК(a; b; c) = 2^{17} \cdot 5^{16}$ в разложение чисел a, b, c не должно входить никаких простых чисел кроме 5/2 и также степень вхождения "2" ≤ 17 и степень вхождения "5" ≤ 16

Т.е $a = 2^{a_1} 5^{a_2}$ ~~$1 \le a_1 \le 17$~~ $\begin{cases} 1 \le (a; b, c)_1 \le 17 \\ 1 \le (a; b, c)_2 \le 16 \end{cases}$

$b = 2^{b_1} 5^{b_2}$

$c = 2^{c_1} 5^{c_2}$

Придумать 1 такое число $16 \cdot 17$-способов (выбрать ст. "5" и ст. "2")

Тогда троек чисел $= (16 \cdot 17)^3$

~~Но~~ Т.к мы ищем упорядоченные

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)\cdot\log_{(x-4)^2}(5x-26)\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$2x-7\neq1 \quad x\neq\frac{9}{2}=4,5$

$2x-8>0 \quad x>4$

$x-4\neq1$

$x=5,3$

$x-4>0$

$x>4$

$5x-26>0$

$x>\frac{26}{5}=5,2$

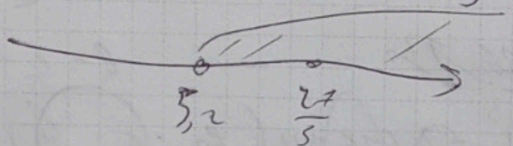
$2 \quad 2 \quad 2^{17}$

$5 \quad 5 \quad 5^{16}$

$5x-26\neq1$

$x\neq\frac{27}{5} \quad a=2\cdot5 \quad c=2^{17}\cdot5$

$b=2\cdot5^{16} \quad d=2^{17}\cdot5^{16}$



$2x-8=a$

$x-4=b$

$5x-26=c$

$\log_{a^{\frac{1}{2}}}(b)\ \log_{b^2}c\ \log_{c^{\frac{1}{2}}}a$

$2\log_a b \quad \frac{\log_b c}{2} \quad 2\log_c a$

$2\log_a b\cdot 2\log_c a=4\log_c b$

$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$

$\log_a b\cdot\log_c a=\log_c b$

$b\cdot b$

$a\ b\ c$

c

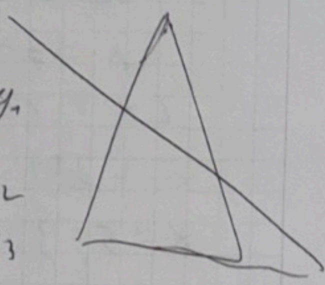
c

$2\ 5^{16} \quad 2^{17}\ 5 \quad 2^{17}\ 5^{16}$

$2\ 5$

$НОД(a;b;c) = 10 = 5\cdot 2$

$НОК(a;b;c) = 2^{17}\cdot 5^{16}$



$a = 5\cdot 2 x$ $\quad a = 5^{x_1}\cdot 2^{y_1}$

$b = 5\cdot 2\cdot y$ $\quad b = 5^{x_2}\cdot 2^{y_2}$

$c = 5\cdot 2\cdot z$ $\quad c = 5^{x_3}\cdot 2^{y_3}$

$1 \le x_1 \le 16$ $\quad 16$ $\quad x_1, y_1$

$1 \le y_1 \le 17$ $\quad 17$

a b c

$\cancel{16\cdot 17}$

$b = c$

$\cancel{(16\cdot 17)^3 - 2(16\cdot 17)}$ (a · c · b)

$\cancel{(16\cdot 17)^3 - (16\cdot 17)\cdot 16\cdot 17}$

$(16\cdot 17)^3 - 2\cdot(16\cdot 17)\cdot 16\cdot 17)$

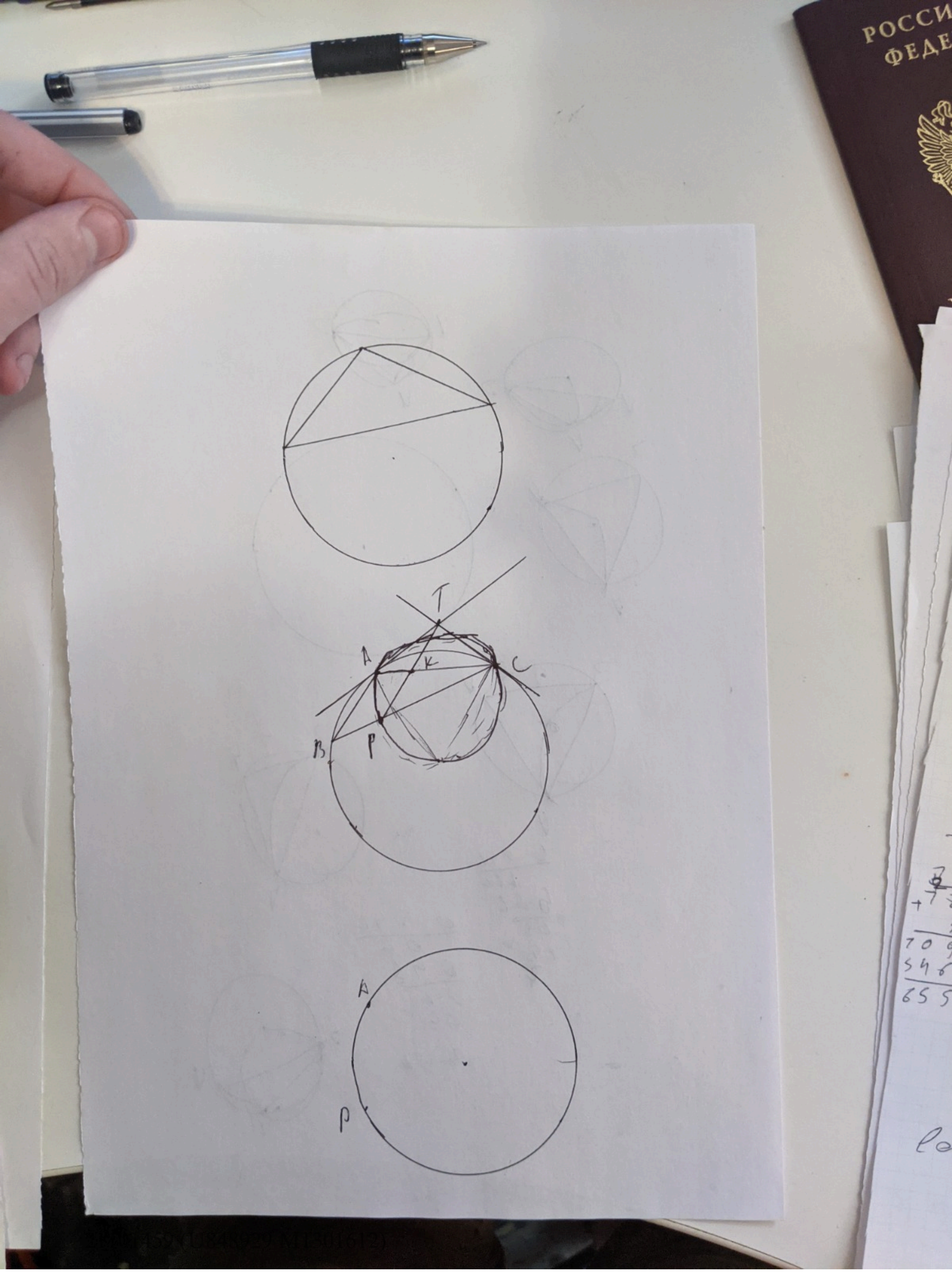
$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 52 \end{array}$

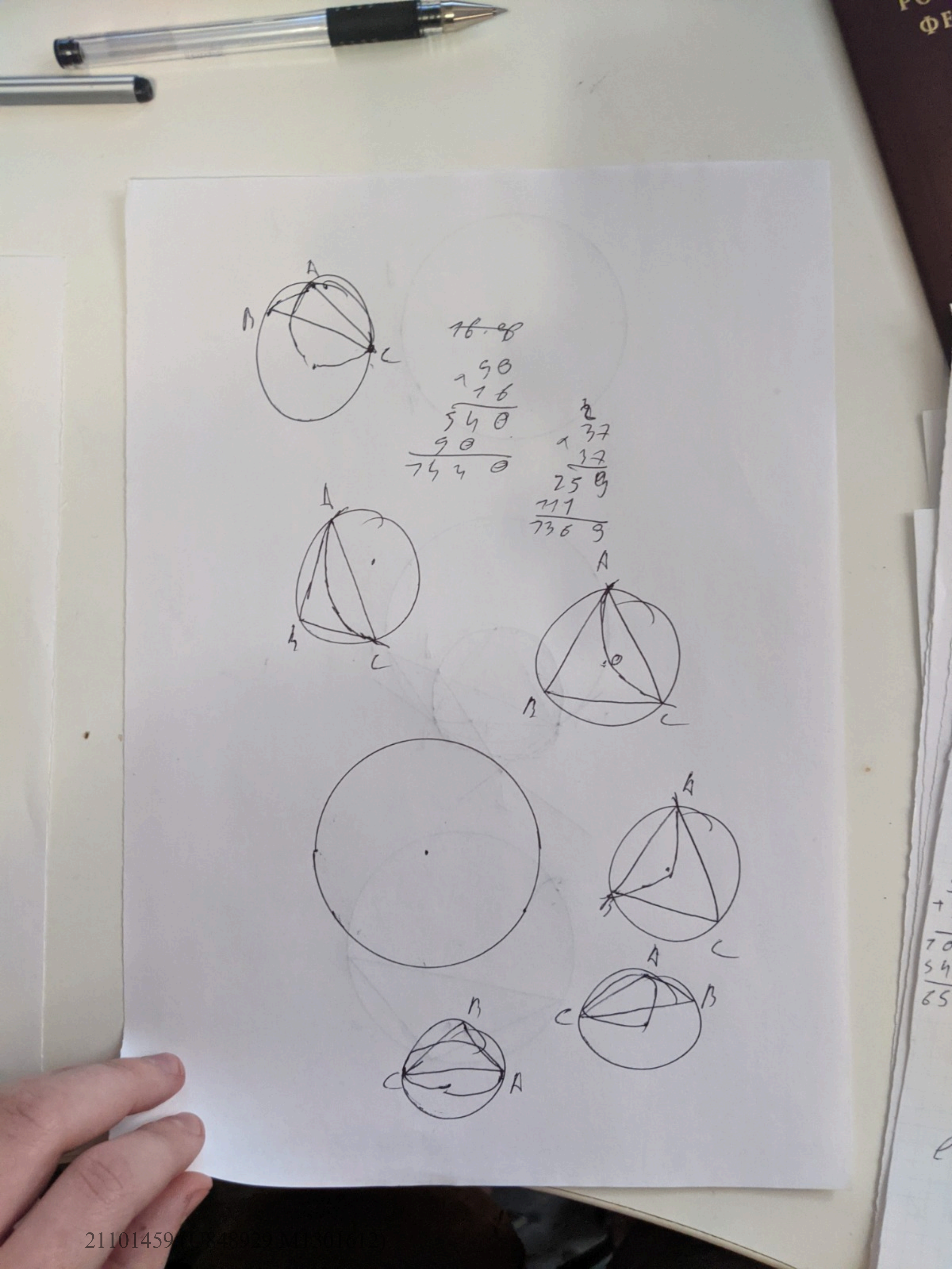
$\begin{array}{r} 1 \\ 13 \\ \times 14 \\ \hline 52 \\ 13 \\ \hline 182 \\ + 36 \\ \hline 1092 \\ 546 \\ \hline 6552 \end{array}$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$ $\quad \log_{(x+4)^2}(5x-26)$; log

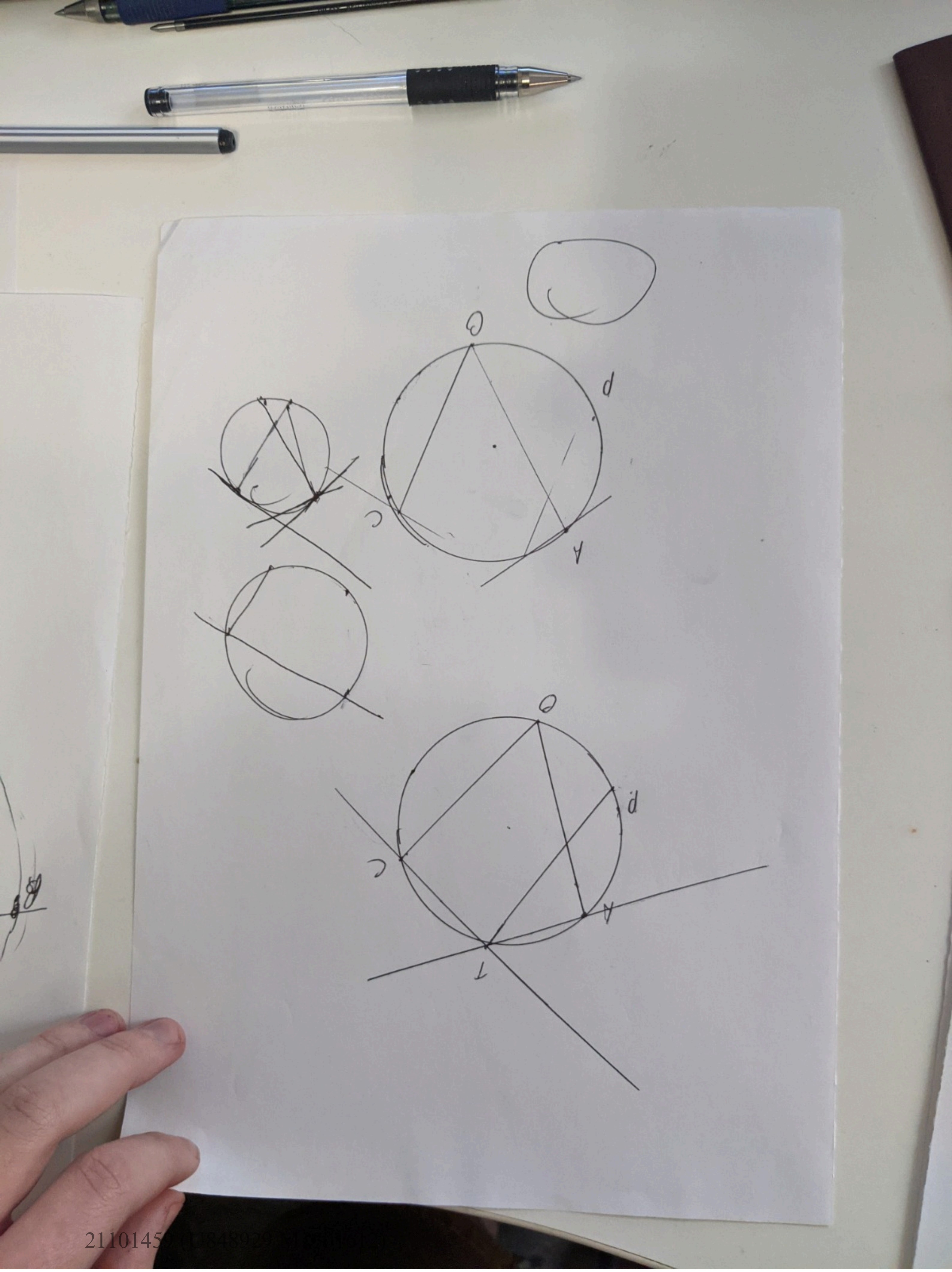
log

$\begin{array}{r} 6552 \\ + 36 \\ \hline 6588 \end{array}$

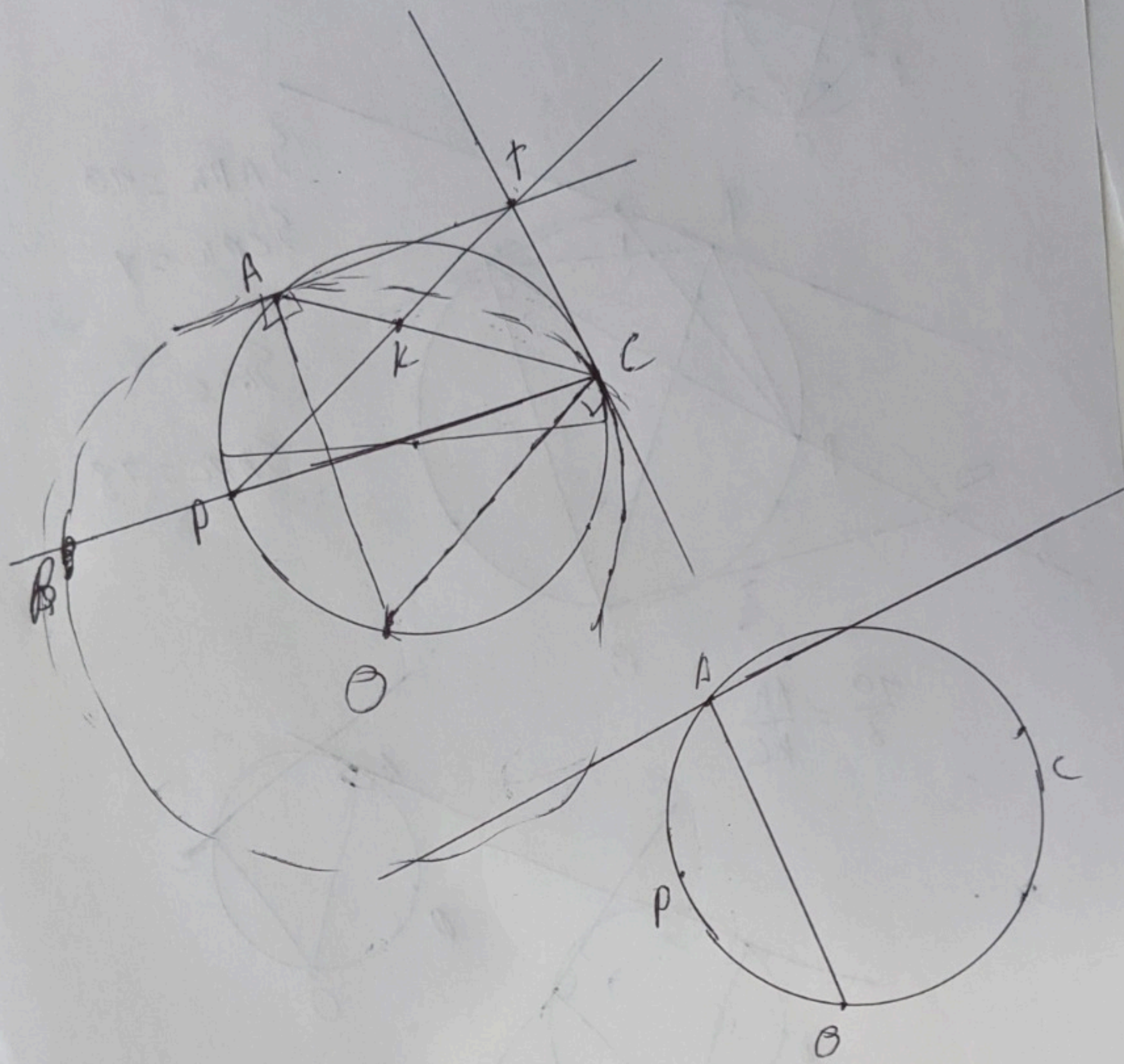

T
A
K
C
B
P
A
P



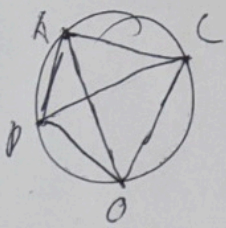
A
B
C
16·98
98
16
37
37
259
111
1369

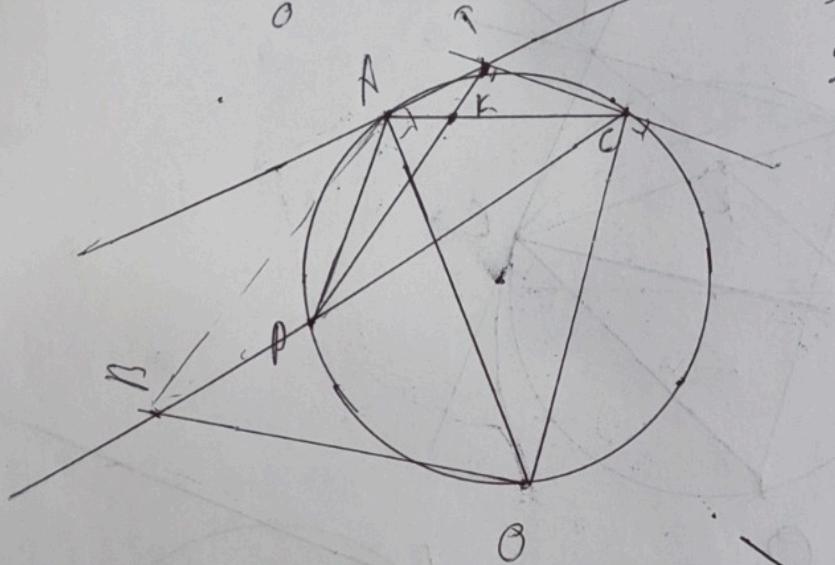


2110145



21101459 (U848929 M1301612)





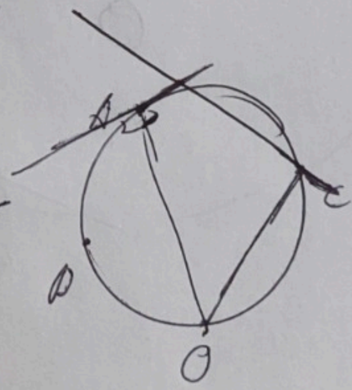
$S_{ABK} = 18$

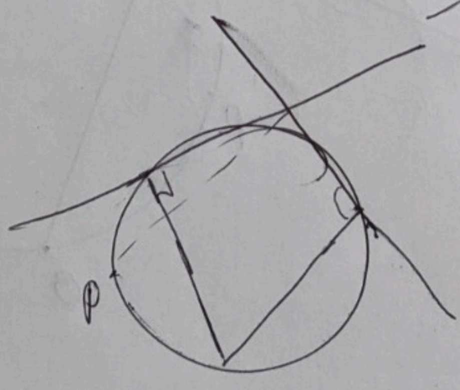
$S_{CBK} = 8$

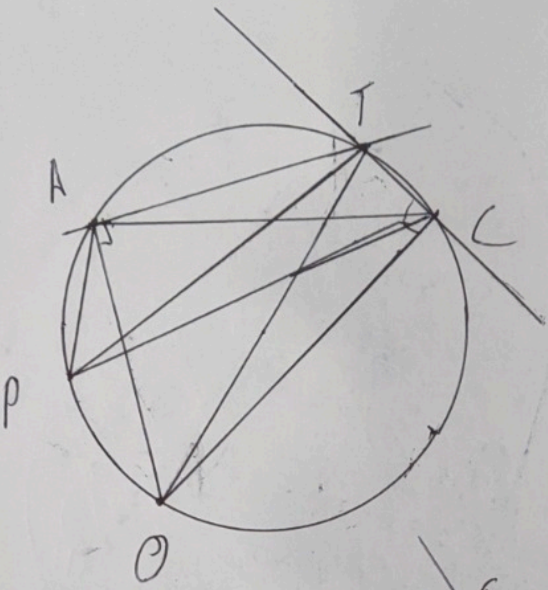
S_{ABC}

$S_{ABC} = 78$

$\frac{18}{8} = \frac{AK}{KC}$





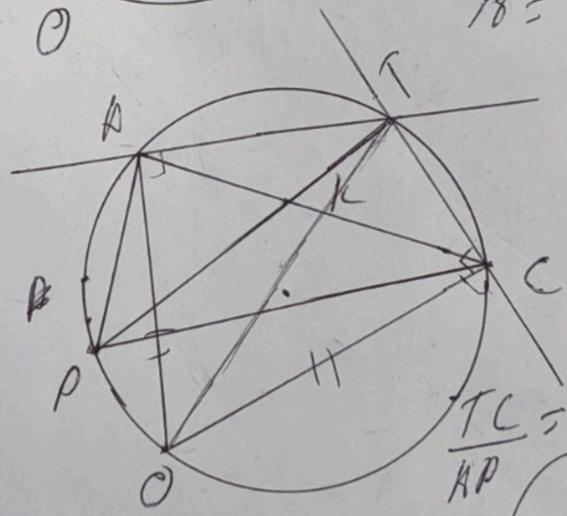


$AK \cdot KC = PK \cdot KT$

$78 = \frac{2S}{a+b+c}$

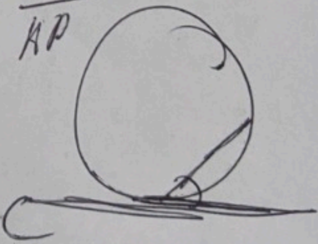
$S_{APK} = 10$

$S_{CPK} = 8$

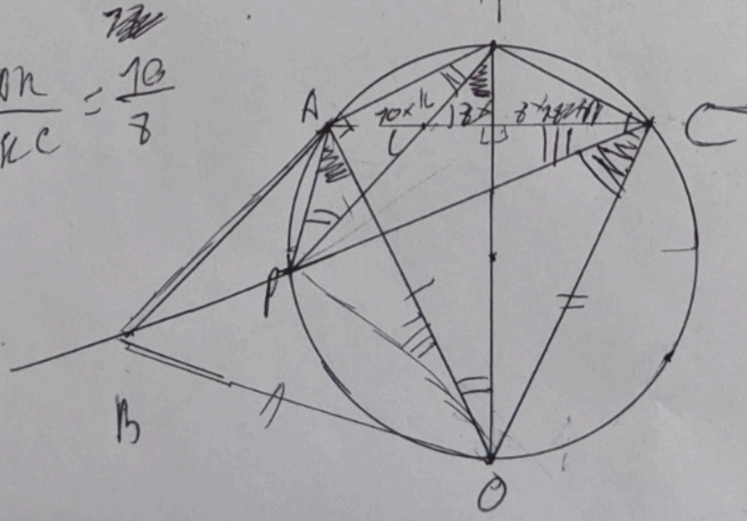


$S_{APC} = 78$

$\frac{TC}{AP} =$



$\frac{AK}{KC} = \frac{10}{8}$



~~черновик~~ чистовик

1a) Общее кол-во = 9·4 + 13·14·36 =

= 6588 различных трёх чисел

Ответ: 6588 способов

7

21101459 (U848929 M1301612)

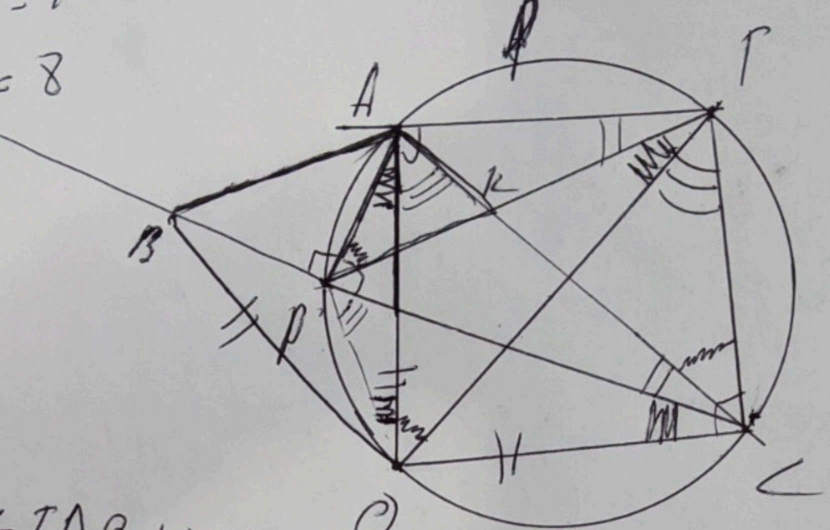
Чистовик

№6

$S_{APK} = 10$

$S_{CPK} = 8$

$S_{ABC} = ?$



1) Т.к $\angle TAO + \angle TCO = 180$ $\Rightarrow$ $OCTA$ - впис

Т.к $A, O, C \in (\rho)$, то и $T \in (\rho)$, потому что 4-х угольник можно вписать только в одну окр.

Т.к $\angle TAO = 90°$ $\Rightarrow$ OT = диаметр (ρ)

2) $OA = OC = OB$ (т.к O - центр опис окр) $= R$

3) $S_{APC} = S_{APK} + S_{KPC} = 18$

$$\frac{AK}{KC} = \frac{10}{8}$$

4) Т.к AT и TC - касат $\Rightarrow$ $AT = TC$ $\Rightarrow$

$OATC$ - квадрат

8

Чистовик

2) $a=1$ $b=1$

Цифры

$$\begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 2^{17} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 5 \\ 5 \\ 5^{16} \end{matrix}$$

Различные тройки чисел без порядка:

$(2\cdot 5;\ 2\cdot 5;\ 2^{17}5^{16}) \to$ 3 способа расставить эти числа

$(2\cdot 5;\ 2^{17}\cdot 5;\ 2\cdot 5^{16}) \to$ 6 способов расставить эти числа

$\boxed{!!}$

+ 9 сп. для $(1;1)$ $\quad$ 6

3) $a=1$ $b=16$

Цифры

$$\begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 2^{17} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 5 \\ 5^{16} \\ 5^{16} \end{matrix}$$ – симметричный П. 2

если бы 5 был равен 5^{16} $\Rightarrow$ + 9 способов тут

4) $a=17$ $b=1$

Цифры

$$\begin{matrix} 2 \\ 2^{17} \\ 2^{17} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 5 \\ 5 \\ 5^{16} \end{matrix}$$ – симметричен П. 2, если бы

2^{17} был равен 2, поэтому + 9 способов

5) $a=17$ $b=16$

$$\begin{matrix} 2 \\ 2^{17} \\ 2^{17} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 5 \\ 5^{16} \\ 5^{16} \end{matrix}$$ – симметричен П. 2, если бы

2^{17} был равен 2 и $5^{16}=5$ $\Rightarrow$ + 9 способов

Чистовик

№4

$НОД(a; b; c) = 2^1 \cdot 5^1$

$НОК(a; b; c) = 2^{17} \cdot 5^{16}$

Чтобы НОК содержал только 5 и 2, разложения чисел $(a; b; c)$ должны состоять только из 2 и 5

Чтобы НОД $= 2 \cdot 5$, в каком-то числе степень "2" должна быть $= 1$ и в каком-то числе степень "5" $= 1$

Чтобы НОК был равен $2^{17} \cdot 5^{16}$ в каком-то числе степень "2" $= 17$ и в каком-то числе степень "5" $= 16$

Т.е числа ~~также~~ можно собирать из: 4

$2^1;\ 5^{16};\ 2^{17};\ 5^1;\ 2^a;\ 5^b$ $\quad 1 \le a \le 17$, $1 \le b \le 16$

Случай когда $1 < a < 17$, $1 < b < 16$, тогда у нас числа будут различные.

Выбрать a – 14 способов; b – 13 способов

Для фиксированного a и b нужно провести

A	B
2^a	5^b
2^1	5
2^{17}	5^{16}

3 ребра из (A) в (B), соединив цифры: способов это сделать $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Т.е для фикс. a и b – 6 способов выбрать
(переставить)
3 числа. Каждый такой способ порождает ещё 5 подобных ему (т.к. у нас числа будут точно разными), в другом порядке

$$\begin{matrix} a & b & c \\ a & c & b \\ b & a & c \\ b & c & a \\ c & a & b \\ c & b & a \end{matrix}$$

1

5

5

$\Downarrow$

для $1 < a < 17$ и $1 < b < 16$

$13 \cdot 14 \cdot 6 \cdot 6$

выбрать "a"

выбрать "b"

3 порядок

выбрать 3 числа

2) для $a = 1$ $b = 1$, получаются цифры

$2, 2, 2^{17}$ $5, 5, 5^{16}$

Числа $\left[\begin{matrix} 2 \cdot 5 \\ 2^{17} \cdot 5^{16} \\ 2 \cdot 5^{16} \\ 2^{17} \cdot 5 \end{matrix}\right.$

Тройки чисел: $(2 \cdot 5;\ 2 \cdot 5;\ 2^{17} \cdot 5^{16})$;
$(2 \cdot 5;\ 2 \cdot 5^{16};\ 2^{17} \cdot 5)$ | $\Rightarrow$ 2 разных тройки

Для первой тройки 3 способа расставить числа
Для второй тройки 6 способов

$\Downarrow$

для $(1;1) \to +9$ способов

Чистовик

4) Пусть $\frac{1}{2}\log_b c = 1$

$\log_b c = 2$

$5x - 26 = x^2 + 16 - 8x$

$x^2 - 13x + 42 = 0$

$(x-6)(x-7) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = 6 \text{ - уже проверили} \\ x = 7 \end{array}\right.$, тогда $a = 6$

$b = 3$

$c = 9$

3

$2\log_a b = 2\log_6 3 \neq 1$

$2\log_c a = 2\log_9 6 \neq 1$

$\frac{1}{2}\log_b c = 1$

$\Rightarrow x = 7$ - не подходит

5) Пусть $2\log_c a = 1$

$a^2 = c$

$4x^2 + 64 - 4x \cdot 8 = 5x - 26$

$\cancel{4x^2 + x6}$

$4x^2 - x(32+5) + 90 = 0$

$D = 37^2 - 16 \cdot 90 = 1369 - 1440 < 0 \Rightarrow$ нет корней

$\Downarrow$

Только $x = 6$ - подходит

Ответ: $x = 6$

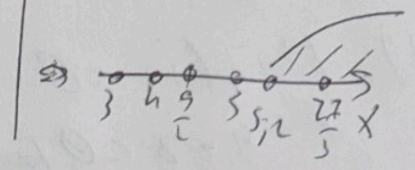
21101459 (U848929 M1301612)

Чистовик

№5

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$ $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$ $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

ОДЗ: $\begin{cases} x-4>0 & x>4 \\ x-4\neq\pm1 & x\neq 5;3 \\ 2x-8>0 & x>4 \\ 2x-8\neq 1 & x\neq\frac{9}{2} \\ 5x-26>0 & x>\frac{26}{5}=5{,}2 \\ 5x-26\neq 1 & x\neq\frac{27}{5} \end{cases}$



Пусть $2x-8=a$, $\in$ ОДЗ
$x-4=b$
$5x-26=c$, тогда наши числа преобразовываются в

$\log_{\sqrt{a}} b$ $\log_{b^2} c$ $\log_{\sqrt{c}} a$

$2\log_a b$ На ОДЗ можно вынести степени перед log:

$2\log_a b$ $\frac{1}{2}\log_b c$ $2\log_c a$

Если эти числа перемножить: (1)

$\cancel{2}\log_a b\cdot\cancel{\frac{1}{2}}\log_b c\cdot 2\log_c a = 2\log_a c\cdot\log_c a = 2 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow$ произведение этих чисел всегда 2.

По усл. 2 из чисел одинаковы, одно больше их на 1. Пусть числа: $(b)(b)(b+1)$

Как мы уже посчитали: $b\cdot b\cdot(b+1)=2$

Чистовик

$b^2(b+1)=2$

$b^3+b^2-2=0$

$b=1$ - корень

$$\begin{array}{r|l} b^3+b^2-2 & b-1 \\ \underline{b^3-b^2} & b^2+2b+2 \\ 2b^2-2 & \\ \underline{2b^2-2b} & \\ 2b-2 & \\ \underline{2b-2} & \\ 0 & \end{array}$$

$(b-1)(b^2+2b+2)=0$

1) $b-1=0$

$b=1$

2) $b^2+2b+2=0$

$D=4-8<0 \Rightarrow$ корней нет

$\Downarrow$

Значит только $t=1$ подходит условию задачи.

3) Пусть $\log_a c$ $2\log_a b=1$ $b^2=a$,

т.е $(x-4)^2=2x-8$ $(x-4)(x-4-2)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=4 \text{ ∉ ОДЗ} \\ x=6 \end{array}\right.$

~~x≠4~~ ~~Рас~~ $x=6$ $a=4$

$b=2$

$c=4$

2

$2\log_a b=1$

$\frac{1}{2}\log_b c=\frac{1}{2}\log_2 4=1$

$2\log_c a=2\log_4 4=2$

$\Rightarrow$ подходит усл

$x=6$

21101459 (U848929 M1301612)