Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101180**

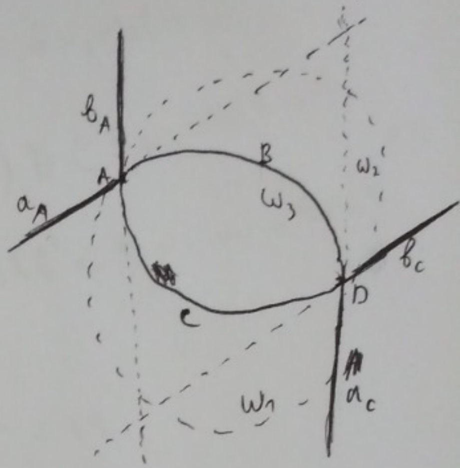
ID профиля: **172735**

Вариант 20

~~Чистовик~~ Черновик

Теперь проведём из A и C ~~касательные~~ перпендикуляры к касат к ω_1 (a_A и a_C) и к ω_2 (b_A и b_C).

Они делят всю плоскость, кроме ω_3, на 4 части:



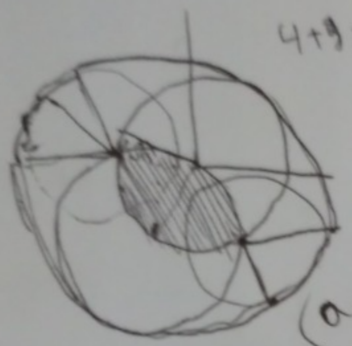
Черновик

$S = 5a_1 + 10b$

$$\begin{cases} (a_1+5b)(a_1+10b) > S+15 \\ a_1^2 + 15a_1b + 50b^2 > 5a_1 + 10b + 15 \\ (a_1+4b)(a_1+8b) < 5a_1 + 10b + 39 \\ a_1^2 + 15a_1b + 56b^2 < 5a_1 + 10b + 39 \end{cases}$$

0 1 2 3 4

$4+9 = \sqrt{13}$



$(a-2)^2 + (b-3)^2 \leq 13$

$6b^2 < 24$

$b^2 < 4$

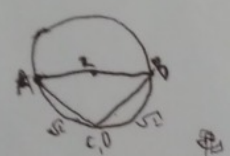
$b \in \{1, 2, 3\}$

$-4a - 6b > 0$

$\sqrt{2} = 2$

$1 = \frac{2}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{2}$



$a^2 + 15a + 50 > 5a + 10 + 15$

$a^2 + 15a + 56 < 5a + 10 + 39$

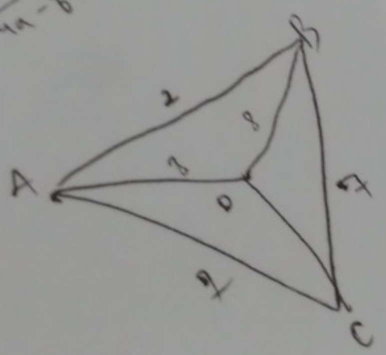
$25 - 7$

18

$81 - 90$

$\sqrt{13}$

$\sqrt{-4a - 6b}$



$a^2 + 10a + 25 > 0$

$a^2 + 10a + 7 < 0$

$a^2 + 10a \in (-25; -7)$

a	$a^2 + 10a =$
-9	-9
-8	
-7	
-6	
-5	-25
-4	
-3	
-2	
-1	-9

49

64

21101180 (U172735 M1302378)

Чистовик

Лист 1

2: AB перпендикулярна оси цилиндра, => если ~~[illegible]~~ построить срез цилиндра, перпендикулярный оси и проходящий через A (далее будем называть его ω), то он будет содержать AB {т.к. любая точка на AB входит и в плоскость сечения, и в цилиндр).

ω – ~~[illegible]~~ круг, т.к. это срез цилиндра, перпендикулярный оси => AB – хорда ω.

$AB = 2 \Rightarrow$ диаметр ω (а, значит, и цилиндра) ≥ 2.

Возьмём цилиндр диаметра 2, тогда AB в нём – диаметр.

Возьмём проекцию ABCD на ω. $\omega \perp$ оси, $CD \parallel_{оси} \Rightarrow$

$\Rightarrow CD \perp \omega \Rightarrow$ C и D спроектируются в одну точку (назовём её H)

Пусть O – середина AB. Тогда ABCD симметрично относительно OCD, $\Rightarrow AH = BH$.

AB – диаметр, $\Rightarrow \angle AHB = 90°$. } =>

$AH = BH$

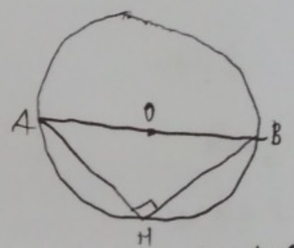


рис 1: ω

=> По т. Пифагора: $2AH^2 = AB^2$

$2AH^2 = 4$

$AH^2 = 2$

$AH = BH = \sqrt{2}$

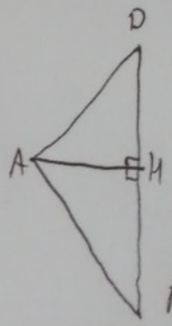


рис 2: ADC

$AH \in \omega$, $CD \perp \omega \Rightarrow AH \perp CD \Rightarrow \triangle\triangle$ ADH и CAH – прямоугольные =>

=> по т. Пифагора: $\begin{cases} DH^2 = AD^2 - AH^2 \\ CH^2 = AC^2 - AH^2 \end{cases}$

$\begin{cases} DH = \sqrt{62} \\ CH = \sqrt{47} \end{cases}$

$CD = CH + DH = \sqrt{47} + \sqrt{62}$

Ответ: $\sqrt{47} + \sqrt{62}$

3. $a^2+b^2 \le \min(-4a-6b, 13) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \le -4a-6b \\ a^2+b^2 \le 13 \end{cases}$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le -4a-6b \quad (1) \end{cases}$$

(1) $a^2+4a+4+b^2+6b+9 \le 4+9$

$(a+2)^2+(b+3)^2 \le 13$

$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \Leftarrow (x,y) \in \text{окружности с центром } (a,b) \text{ и радиусом } \sqrt{13} \\ a^2+b^2 \le 13 \Leftarrow (a,b) \in \text{окр-ти с центром } (0,0) \text{ и радиусом } \sqrt{13} \\ (a+2)^2+(b+3)^2 \le 13 \Leftarrow (a,b) \in \text{окр-ти с центром } (-2;-3) \text{ и радиусом } \sqrt{13} \end{cases}$

Обозначим точки $B(0,0)$ и $D(-2;-3)$.

Тогда $BD = \sqrt{(0-(-2))^2+(0-(-3))^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$, т.е. BD — ~~центр~~ радиус ω_1 и ω_2, где ω_1 и ω_2 — окр-ти с центрами B и D соответственно.

Обозначим точки пер-я ω_1 и ω_2 как A и C (см. рис. 1)

Тогда (a, b) может принадлежать только пересечению ω_1 и ω_2 (назовём его ω_3)

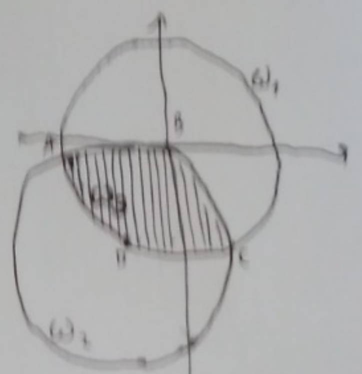


рис. 1: геом. интерпретация возможных точек (a,b)

Заметим, что чтобы (x, y) принадлежало M, она должна быть в круге радиуса $\sqrt{13}$ и центром в хотя бы одной точке из ω_3, т.е. находиться на расстоянии не более $\sqrt{13}$ хотя бы от одной из точек ω_3, т.е. находится на расстоянии не более $\sqrt{13}$ от ближайшей из точек ω_3.

Очевидно, $\omega_3 \subset M$ ($(x, y) \in \omega_3$ находится на расстоянии $0 \le 13$ от (x,y)).

Чистовик

Лист 3.

Теперь проведём перпендикуляры из A и C к касательным из A и C соответственно, проведённым к ω_1 (перпендикуляры a_A и a_C) и к ω_2 (b_A и b_C). Они делят всю плоскость (кроме ω_3) на 4 части:

I. Часть, ограниченная a_A, a_C и дугой ABD:

В ней у всех (x, y) ближайшая точка в ω_3 находится на пересечении (x, y) C и ω_3, т. е. в M войдут точки на расстоянии $2\sqrt{13}$ от C.

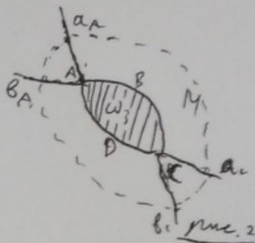


рис. 2: описанное деление плоскости

II. Часть, ограниченная b_A, b_C и дугой ACD:

Она аналогична I, в M входят точки на расстоянии $2\sqrt{13}$ от B.

III Часть, ограниченная b_A и a_A:

в ней ближайшая точка ω_3 – A, => все точки (x, y) в ней, входящие в M, находятся на расстоянии $\sqrt{13}$ от A.

IV Часть, ограниченная a_C и b_C

Аналогична III, в M войдут точки на расстоянии $\sqrt{13}$ от C.

$AB = BC = BD = AD = CD \Rightarrow \triangle ABD$ и CBD – р/с $\Rightarrow \angle ADB = \angle BDC = 60^\circ \Rightarrow \angle ADC = 120^\circ$

$\triangle ABD$ – р/с $\Rightarrow \angle BAD = 60^\circ \Rightarrow$ угол между b_A и $a_A = 60^\circ$ (верт. углы)

$\triangle CBD$ – р/с $\Rightarrow \angle BCD = 60^\circ \Rightarrow$ угол между b_C и $a_C = 60^\circ$ (верт. углы)

В частях III и IV в M войдут сектора круга радиусом $\sqrt{13}$, с углом 60°, т. е. площадь каждого из них равна $\frac{1}{6}$ площади круга с радиусом 13, т. е. $\frac{13\pi}{6}$.

21101180 (U172735 M1302378)

Чистовик

Лист 5

1: $S = 5a_1 + 10b$, где b — разность прогрессии.

Тогда $a_8 a_9 = (a_1 + 7b)(a_1 + 8b) = a_1^2 + 15a_1 b + 56b^2$

$a_6 a_{11} = (a_1 + 5b)(a_1 + 10b) = a_1^2 + 15a_1 b + 50b^2$

Тогда условие принимает вид:

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 b + 56b^2 < 5a_1 + 10b + 39 \\ a_1^2 + 15a_1 b + 50b^2 > 5a_1 + 10b + 15 \end{cases}$$

$6b^2 < 24$

$b^2 < 4$

$-2 < b < 2$

$b > 0 \Rightarrow$

$0 < b < 2$

$b \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow b = 1.$

Подставим в условие:

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 + 56 < 5a_1 + 10 + 39 \\ a_1^2 + 15a_1 + 56 > 5a_1 + 10 + 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 10a + 25 > 0 \\ a^2 + 10a + 7 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+5)^2 > 0 \\ (a+5)^2 - 18 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 5 \neq 0 \\ (a + 5 - \sqrt{18})(a + 5 + \sqrt{18}) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \neq -5 \\ a \in (-5 - \sqrt{18}; -5 + \sqrt{18}) \end{cases}$$

$a \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in \{-9; -8; -7; \ldots; -4; -6; \ldots; -3; -2; -1\}$

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -$

21101180 (U172735 M1302378)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101180**

ID профиля: **172735**

Вариант 20

Черновик

Лист 1

Б4:

НОК $(a,b,c) = 2^{17}\cdot 5^{16}$ => ни a, ни b, ни c не имеют простых множителей, отличных от 2 и 5.

Тогда представим каждое из чисел a, b и c в виде 2 наборов простых чисел — один с 2, другой с 5.

Тогда нет ни одного набора с более чем 17 двойками и более чем 16 пятёрками, т.к. НОК $(a,b,c) = 2^{17}\cdot 5^{16}$. По той же причине существуют наборы с 17 двойками и 16 пятёрками.

НОД $(a,b,c) = 2\cdot 5$ => во всех наборах есть одна 2 или 5, и также есть хотя бы по 1 набору с ровно одной 5 и 2.

Итого, известно о существовании наборов 2, 5, 2^{17} и 5^{16}. Пусть оставшиеся наборы — 2^x и 5^y.

Случай I: $x = 1$ или 17, $y = 1$ или 16

Тогда есть ровно 2 одинаковых набора двоек, и ровно 2 одинаковых набора пятёрок. Всего есть 4 варианта для пары (x,y), и для каждого из них есть 3 варианта расположения наборов с 2-ми в a, b и c, и столько же вариантов расположения наборов с 5-ми, и тогда всего троек (a,b,c) в этом случае:

$$4\cdot 3\cdot 3 = 36.$$

Чистовик [redacted] Лист 2

Случай II: $x \neq 1$ или 17, $y = 1$ или 16.

Все наборы 2-ек различны, ровно 2 набора 5-ок одинаковы.

есть 2 варианта значений для y, и 15 — для x, и для каждой пары (x, y)

есть 6 перестановок наборов двоек в (a, b, c), и 3 набора

перестановок 5-ок в (a, b, c), и тогда всего возможных троек

(a, b, c) в этом случае:

$$2 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 3 = 540$$

Случай III: $x = 1$ или 17, $y \neq 1$ или 16

Все наборы 5-ок различны, и есть ровно 2 одинаковых набора 2-ек.

Есть 14 значений y, и 2 значения x.

Аналогично случаю 2 получаем кол-во троек (a, b, c):

$$2 \cdot 14 \cdot 6 \cdot 3 = 504$$

Случай IV $x \neq 1$ или 17, $y \neq 1$ или 16.

Все наборы различны.

Есть 14 возможных значений y, 15 возможных значений x,

для каждой пары (x, y) есть 6 перестановок наборов с 2-ми и 6

перестановок набора с 5-ми, а тогда всего троек (a, b, c) в этом

случае:

$$15 \cdot 14 \cdot 6 \cdot 6 = 7560$$

Итого, суммарное число возможных троек (a, b, c):

$$36 + 540 + 504 + 7560 = 8640$$

Ответ: 8640

21101180 (U172735 M1302379)

Чистовик

Лист 3

№6 а) Пусть $\angle TAC = \alpha$, $\angle BAT = \beta$

$AT = TC \Rightarrow \angle TCA = \angle TAC = \alpha$

$\angle BCT = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BT} = \angle BAT = \beta$ (углы опираются на 1 дугу $\overset{\frown}{BT}$)

$\angle ABC = \cancel{180^\circ - \alpha + \beta} = 180^\circ - \angle BAC - \angle BCA =$

$= 180^\circ - (\alpha + \beta) - (\alpha - \beta) = 180^\circ - 2\alpha.$

$\angle ATC = 180^\circ - (\angle TAC + \angle TCA) = 180^\circ - 2\alpha = \angle BAC$

$\left.\begin{array}{l}\angle ATC = \angle BAC \\ \angle ATC \text{ и } \angle BAC \text{ опираются на } \overset{\frown}{AC}\end{array}\right\} \Rightarrow A, B, C$ и T лежат на одной окружности, т.е. $T \in$ окружности ω.

~~ABCA~~

$\angle BCT = \frac{1}{2}\overset{\frown}{PC}$ (угол между касательной и хордой)

$\angle PAC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{PC}$ (угол опирается на дугу) $= \angle BCT = \beta$

~~$\angle BPA = \angle ...$~~

$\angle APC = 180^\circ - \angle PAC - \angle PCA = 180^\circ - \beta - (\alpha - \beta) = 180^\circ - \alpha$

$\angle BPA = 180^\circ - \angle APC$ (смежные углы) $= \alpha$

$\angle BAP = \angle MAC - \angle PAC + \angle BAT = \alpha - \beta + \beta = \alpha$

$\angle BPA = \angle BAP = \alpha \Rightarrow \triangle ABP$ - р/б $\Rightarrow AB = BP$

$\left.\begin{array}{l}\angle MPA = \angle MAC = \alpha \\ \angle MAP = \angle MCA = \alpha - \beta\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle MPA \sim \triangle MAC$

Пусть коэфф подобия $- k$.

Тогда $\frac{MP}{AM} = \frac{AM}{CM} = k = \frac{AP}{PC}$

$MP = AM \cdot k = CM \cdot k^2 = (MP + PC) \cdot k^2$

$MP \cdot (1 - k^2) = k^2 \cdot PC$

Чистовик Лист 4

$MP = \frac{k^2}{1-k^2} PC$

~~$\angle ABC = \angle ATC = 180° - 2\alpha$~~
~~$\angle BAT = \angle TCB = \beta$ $\Rightarrow \triangle BAP$~~

$\angle APB = \angle PAB = \angle TAC = \angle TCA = \alpha \Rightarrow \triangle TCA = \triangle BAP$

Тогда коэффициент подобия $= \frac{AP}{AC} = k$

Тогда ~~$\frac{AB}{BP}$~~ $\frac{BP}{TC} = k$

$\left.\begin{array}{l}\angle BAT = \angle TCB = \beta \\ \angle BMA = \angle TMC \text{ как верт-е}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle CTM$

Тогда коэфф-т подобия $= \frac{AM}{CM} = k$

~~Тогда BM~~

$\frac{BM}{MT} = k$

~~Тогда~~ $BM + CM = \cancel{k} \cdot \frac{MT}{k} + \cancel{km} \cdot \frac{AM}{k} = \frac{AT}{k} = \frac{AB}{k^2} = \frac{BP}{k^2} = \frac{\cancel{BM+MP}}{k^2}$ ~~BM+MP~~

$BM - \frac{BM}{k^2} = \cancel{\frac{MP}{k^2}} \frac{CM \cdot k^2}{k^2} - CM$

$BM \cdot \cancel{MA} \cdot \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = 0$

21101180 (U172735 M1302379)

Чернова

2

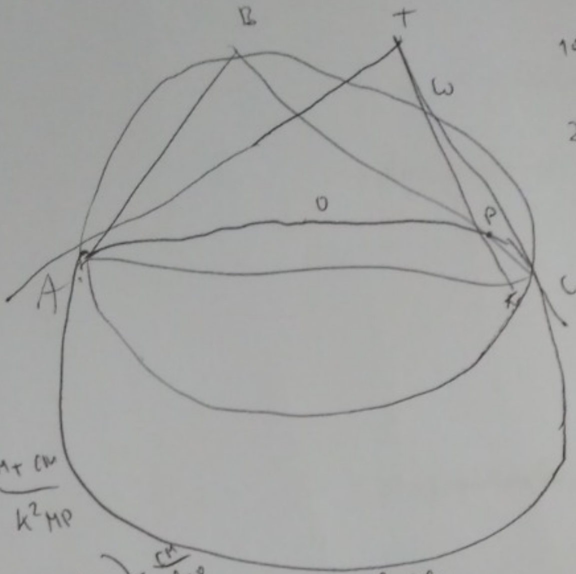
$10 \quad 2^{17} 5^{16}$

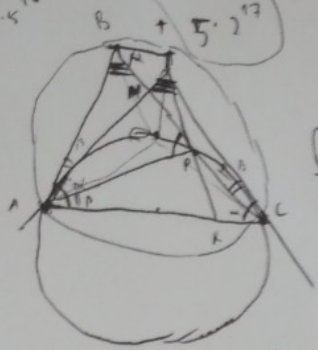
$\boxed{2 \cdot 5^{15}} \quad S_{ABC} =$

$10 \quad 2^{17} \cdot 5^{16}$

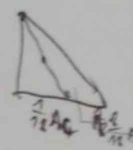
$5 \cdot 2^{17}$

$2 \cdot 5^{15}$





$\boxed{\angle ABC = \angle ATC}$



$AB = AP$

$BM = \frac{BM + CM}{k^2 MP}$

$BM \cdot \left(1 + \frac{1}{k^2 MP}\right) = \frac{CM}{k^2 MP}$

$BM + CM = k \cdot AM + MT \cdot k = k \cdot AT = \frac{k^2 \cdot AB}{k}$

$AC :$

$BM + CM = k \cdot BP = k \cdot BM + MP$

$BM(1-k) = CM + MP$

$BC = k^2 \cdot AB$

$k \cdot AT = BM + CM$

$k \cdot AT =$

$AK : KC = 10 : 8$

$18 \cdot 30$

$AC / AP =$

$BM = \frac{CM}{k^2 MP + 1}$

$\boxed{BM = \frac{CM}{CM + 1}}$

$\times 18$, 30, 24, 3, 540

$15 =$

$BM = \frac{BC}{k^2 MP}$

$\log_{\sqrt{2x-8}} (x-4) - 1 = \log\left(\frac{x-4}{\sqrt{2x-8}}\right)$

k^2	1
CM	MP
BC	AB

$BM = \frac{BC}{CM}$

k	1
AC	AP
AT	AB
CT	BP
CM	AM
AM	MP
CT	AB
BM	MT

$\frac{CM}{MP} = k^2$

$\times 84$, 90, 36, $\boxed{7560}$

$\times 14$, 6, 24, 6, 84

28×18, 264, 16, 28, 504

$7560 : 540 = 14$, 54, 216

$BM = \frac{BC}{CM}$

$BM + CM = BC$

$\frac{CM}{MP}$

$590 + 540 + 7560$

8100

8640

$\frac{MP + CP}{MP} = k^2$

$BM = BC - CM$

$\frac{CP}{MP} = k^2 - 1$

$\boxed{S_{CAM} = (k^2 - 1) \cdot 18}$

21101180 (U172735 M1302379)

Черновик