Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101175**

ID профиля: **832119**

Вариант 20

$S = \frac{a_1 + a_1 + 4b}{2} \cdot 5 = \cancel{2a_1}(a_1 + b)5$ Черновик

160−4

$a_6 a_{11} = (a_1 + 5b)(a_1 + 10b) = (a_1 + 2b)5$ $+40b + 156$

$225b^2 - 150b + 25 - 224b^2$ $21 + 15 = 36 =$

110   $121 = b^2 - 110b + 181$

$25b^2 - 110b + 85 =$
$= \sqrt{(5b - 11)^2 - 36}$

$a_{12} = 5 - 15b$

20

$D = 225b^2 - 150b + 25 - 200b^2 + 40b + 60 =$
$= 25b^2 - 110b + 85$ $9\sqrt{(5b^2 - \cancel{11})^2 + 4}$

110   $-5 - 4,5 =$
$= -9,5$

$10 = 5 \cdot 2$

$a = \frac{5 - 15b \pm \sqrt{(5b^2 - 9)^2 + 4}}{2}$ b

$4 \cdot 56 = 200$

$225b^2 - 150b + 25 - 224b^2 + 40b + 156 =$

$-5 - \frac{\sqrt{82}}{5} < -5 \frac{-\sqrt{81}}{5}$ $\frac{16}{2}$ $78 = 56$ $39 \cdot 4$ $160 - 4 = 156$

$\times \begin{array}{r} 57 \\ 52 \\ \hline 4 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 25 \end{array}$

$\frac{110}{2} =$ 181 $\frac{110}{2} = 56$ 4

$= b^2 - 110b + 181 = (b - 55)^2$

$\times \begin{array}{r} 55 \\ 55 \\ \hline 25 \\ 25 \\ 25 \\ 25 \\ 25 \\ 3025 \\ 2844 \end{array}$

$-5 + \frac{\sqrt{81}}{2} =$
$= -5 + \frac{9}{2} =$
$= -5 + 4,5$

$50b^2 - 10b - 15 = 5(10b^2 - 2b - 3)$

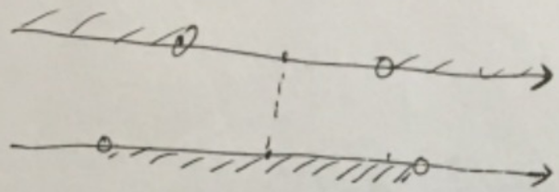
$25b^2$

черновик

$$a_{12} = \frac{5-15b \pm \sqrt{(5b-11)^2-36}}{2}$$

$$a_{12} = \frac{5-15b \pm \sqrt{(b-55)^2-2844}}{2}$$

$$\sqrt{(b-55)^2-2844} >$$



$$\sqrt{(b-55)^2-2844} \geq \sqrt{(5b-11)^2-36}$$

97

$$b^2-110b+181 > 25b^2-110b+85$$

$$24b^2-97<0$$

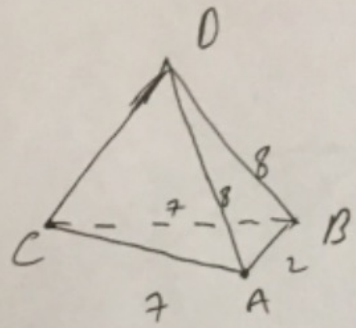
$$b^2-\frac{97}{24}<0$$

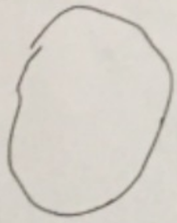
$$b^2<\frac{97}{24}<5$$

$$b=1,2$$

82

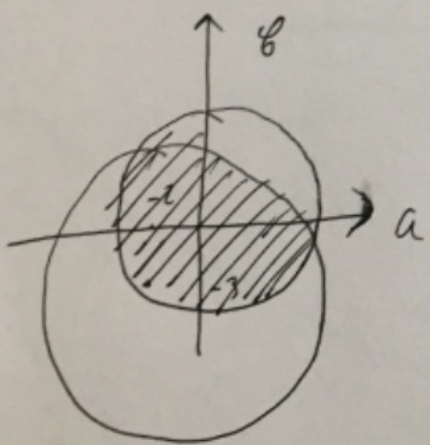
Черновик





1

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13\\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b;13)\end{cases}$$

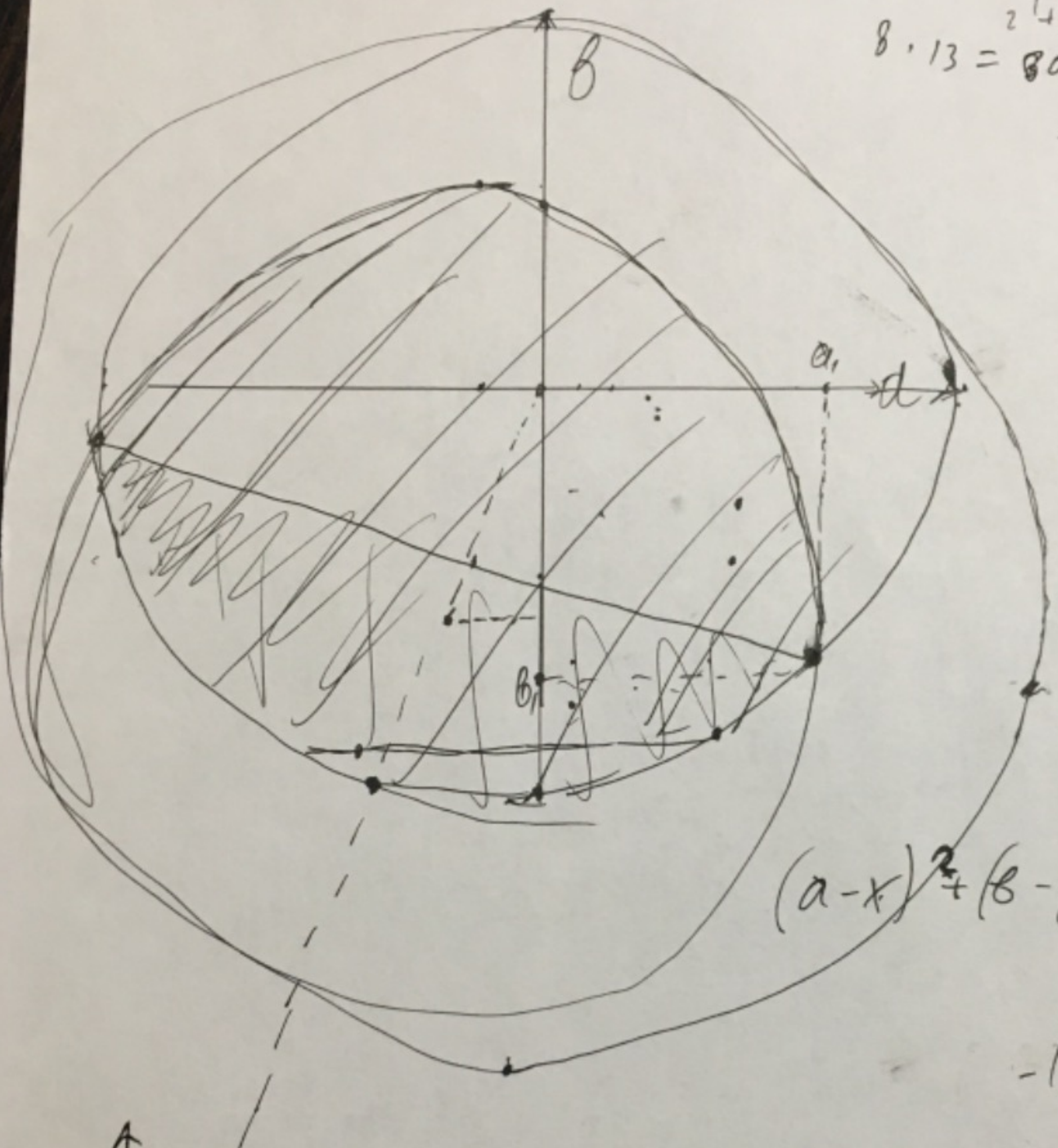


$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13\\ a^2+b^2 \le 13\\ a^2+b^2 \le -4a-6b\end{cases}$$

$$a^2+4a+4+b^2+6b+9 \le 4+9$$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13\\ a^2+b^2 \le 13\\ (a+2)^2+(b+3)^2 \le 13\end{cases}$$

Черновик



$2^2+3^2=4+9$

$8\cdot13=80+24$

$100+40+3$
$=143$

700

301
280

52
$\times52$
4
10
10
25
2704

1
4
9
6
5
6
9
4
1

$(a-x)^2+(b-y)^2\le 13$

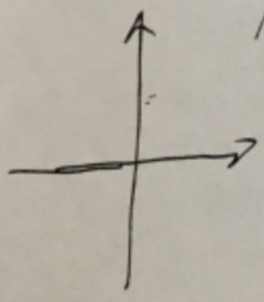
2993

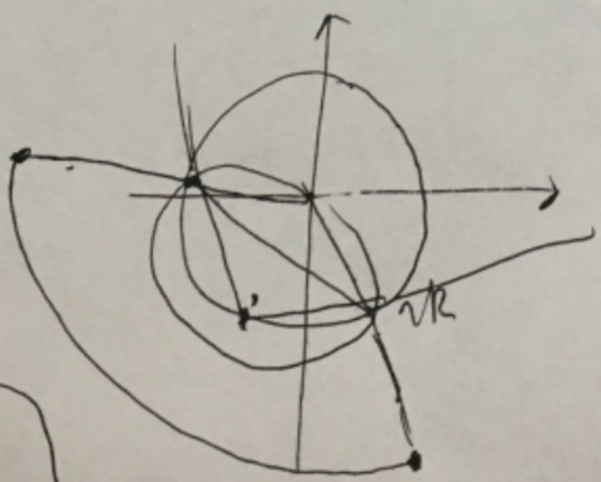
-100 3003

$13\cdot23=$

$=230+60+9=$

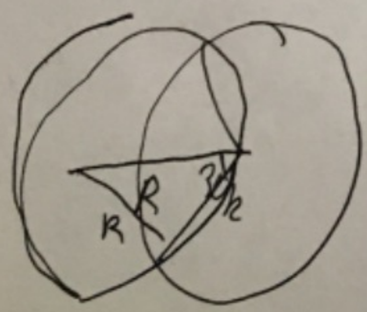
$=289$





$13\cdot23=$
$=230+60+$
9
$=299$

$4\cdot13=$
$=45$



Вариант 20 Чистовик

Задача 1

1) Пусть b - разность прогрессии (т.к. она возрастающая $b > 0$)

Тогда сумма пяти первых членов равна $S = \frac{a_1 + a_1 + 4b}{2} 5 = (a_1 + 2b)5$

Также $a_6 a_{11} = (a_1 + 5b)(a_1 + 10b) = a_1^2 + 15ba_1 + 50b^2$;

$a_8 a_9 = (a_1 + 7b)(a_1 + 8b) = a_1^2 + 15a_1 b + 56b^2$

По условию

$$\begin{cases} a_6 a_{11} > S + 15 \\ a_8 a_9 < S + 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 b + 50b^2 > 5a_1 + 10b + 15 \\ a_1^2 + 15a_1 b + 56b^2 < 5a_1 + 10b + 39 \end{cases}$$

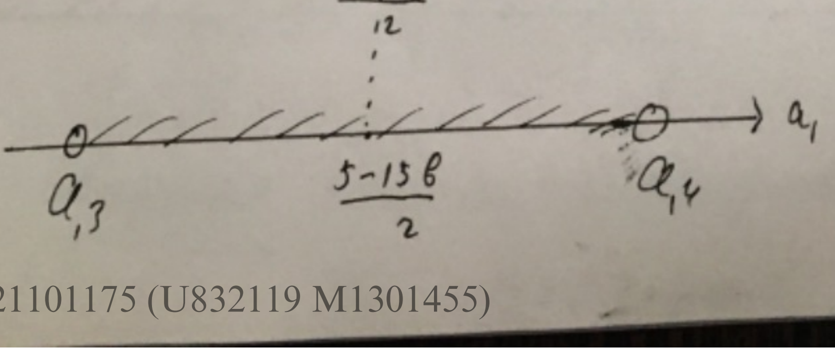
$$\begin{cases} a_1^2 + (15b - 5)a_1 + 50b^2 - 10b - 15 > 0 \quad (1) \\ a_1^2 + (15b - 5)a_1 + 56b^2 - 10b - 39 < 0 \quad (2) \end{cases}$$

2) Решим каждое из неравенств методом интервалов:

Корни уравнений:

(1) $a_{1,2} = \frac{5 - 15b \pm \sqrt{25b^2 - 110b + 85}}{2} = \frac{5 - 15b}{2} \pm \frac{\sqrt{(5b - 11)^2 - 36}}{2}$

(2) $a_{3,4} = \frac{5 - 15b \pm \sqrt{b^2 - 110b + 181}}{2} = \frac{5 - 15b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 110b + 181}}{2}$



Лист 1

См. прод на листе 2

Чистовик

Заметим, что решениями являются области $(a_3; a_1)$ и $(a_2; a_4)$ если $a_1 > a_3$ или $a_4 > a_2$ соответственно.
(соответственной)

Это выполняется, если один из корней удален больше от $\frac{5-15b}{2}$, что выполняется, когда

$$\frac{\sqrt{(5b-11)^2-36}}{2} < \frac{\sqrt{b^2-110b+181}}{2} \quad (3)$$

$$25b^2-110b+85 < b^2-110b+181$$

$$24b^2 < 97$$

$$b^2 < \frac{97}{24} < 5$$

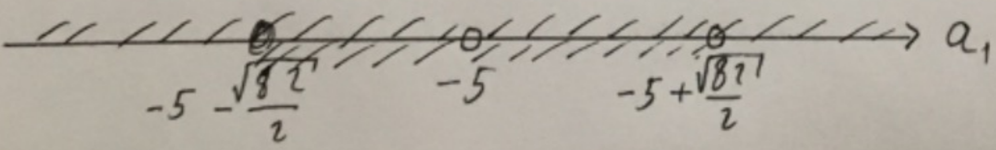
Выходит, b принимает значение 1; 2 (целые т.к. целые и члены $a_1, a_2 \dots$)

$b=2$ исключается подстановкой в (3) – подкоренное выражение слева меньше нуля.

3) Вернемся к (1) (2), учитывая $b=1$

$$a_{12} = \frac{5-15}{2} \pm \frac{\sqrt{(6)^2-36}}{2} = -5$$

$$a_{34} = \frac{5-15}{2} \pm \frac{\sqrt{1-110+181}}{2} = -5 \pm \frac{\sqrt{82}}{2}$$



Объединяя пересечения получаем $a_1 \in \left(-5-\frac{\sqrt{82}}{2}; -5\right) \cup \left(-5; -5+\frac{\sqrt{82}}{2}\right)$

$\boxed{\text{Лист 2}}$ См. прод. на листе 3

Чистовик

4) $\underline{-1} < -0{,}5 = -5 + \frac{\sqrt{81}}{2} < \underline{-5 + \frac{\sqrt{82}}{2}} < -5 + \frac{\sqrt{100}}{2} = \underline{0}$

$\underline{\underline{-10}} = -5 - \frac{\sqrt{100}}{2} < \underline{\underline{-5 - \frac{\sqrt{82}}{2}}} < -5 - \frac{\sqrt{81}}{2} = -9{,}5 < \underline{\underline{-9}}$

Т.к. a_1 - целое из вышеуказанного промежутка подходят значения ~~$a_1 \in \{-9; -8; -7; -6\} \cup \{$~~

$a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

Лист 3

21101175 (U832119 M1301455)

Чистовик

Задача 3

1) $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b,13)\end{cases}$ или равно

Если какое-то число меньше минимального из двух других чисел логично, что оно меньше или равно одних из них:

$\Updownarrow$

$$\begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 13\\ a^2+b^2\le -4a-6b\\ a^2+b^2\le 13\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 13\\ a^2+4a+4+b^2+6b+9\le 4+9\\ a^2+b^2\le 13\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 13 \ (1)\\ (a+2)^2+(b+3)^2\le 13 \ (2)\\ a^2+b^2\le 13 \ (3)\end{cases}$$

2) Найдем решения (2) и (3) графически в осях $(a;b)$

$a^2+b^2=13$ - уравнение окружности с радиусом $\sqrt{13}$ и центром $(0;0)$

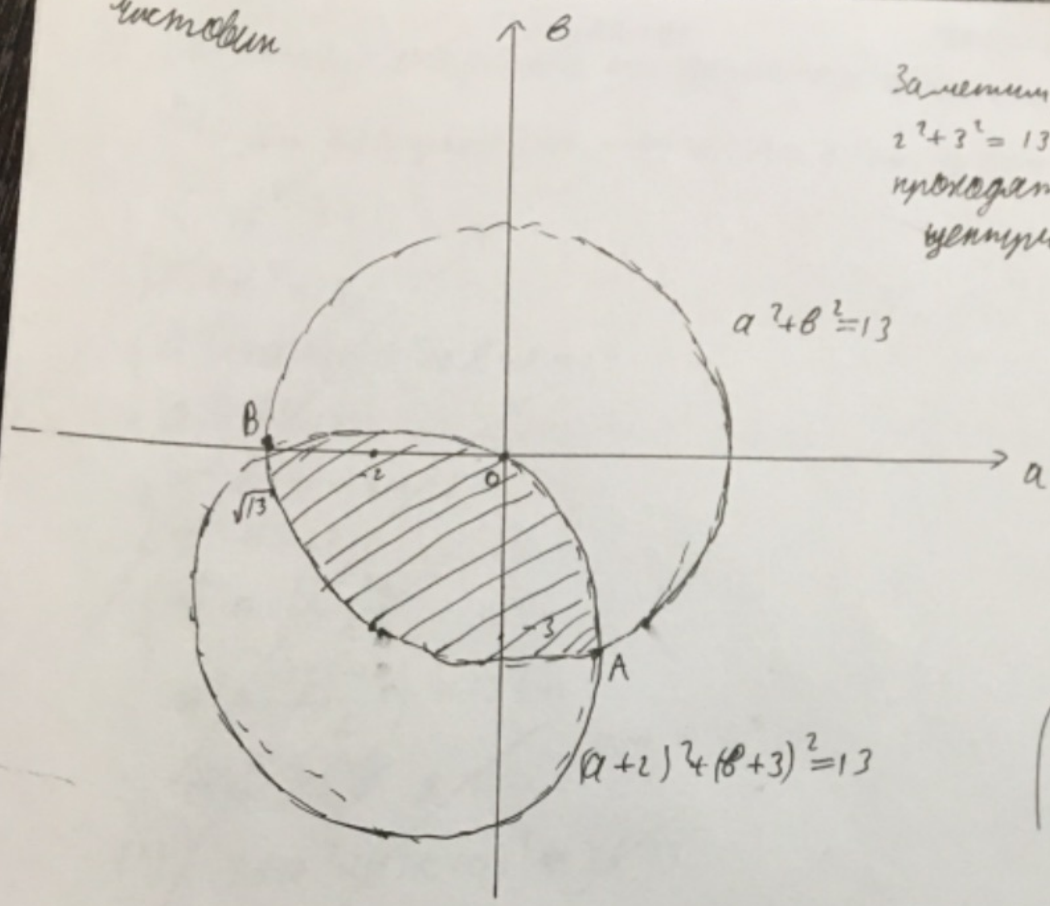
$(a+2)^2+(b+3)^2=13$ - уравнение окружности с радиусом $\sqrt{13}$ и центром $(-2;-3)$

Знак "меньше" говорит о том, что подходит также область "внутри" окружности

Лист 4

См. прод на листе 5

чистовик



Заметим, что $2^2+3^2=13 \Rightarrow$ окружности проходят через центры друг друга

(См. прод. на листе 6)

Общим решением является заштрихованная область и ее границы.

$(a-x)^2+(в-y)^2 \le 13$ - область "круга" и его границу с радиусом $\sqrt{13}$ и центром $(x;y)$. Исходя из системы он ~~Она должна~~ центр пересекать или касаться ~~окруж~~ заштрихованной области $\Leftrightarrow$ ~~фигура М состоит~~ граница фигуры М представляет из себя множество всех возможных ~~точ~~ центров вышеуказанной окружности, ~~и все области внутри этой фигуры~~ при которых она касается заштрихованной области. Все точки внутри этой границы принадлежат М (т.к. внутри будет такой центр $(x;y)$, что его окружность будет давать пересечение областей)

3) ~~Посчитаем отдельно~~ площадь ~~определенных областей~~: Чистовик

Найдем координаты точек A и B (см. чертеж пункта 2)

$$\begin{cases}(a+2)^2+(b+3)^2=13\\ a^2+b^2=13\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+4a+4+b^2+6b+9=13\\ a^2+b^2=13\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+b^2=-4a-6b\\ a^2+b^2=13\end{cases}$$

$$\begin{cases}-b=\frac{13+4a}{6}\\ a^2+\left(\frac{13+4a}{6}\right)^2=13 \ (*)\end{cases}$$

~~$b=\frac{13+4a}{6}$~~

$(*)$: $36a^2+(13+4a)^2=36\cdot13$

$36a^2+13^2+104a+16a^2=36\cdot13$

$52a^2+104a-13\cdot23=0$

~~$a_{1,2}=\frac{-104\pm\sqrt{104^2}}{}$~~

$$a_{1,2}=\frac{-52\pm\sqrt{52^2+13\cdot23}}{52}=-1\pm\frac{\sqrt{2704+299}}{52}=$$

$$=-1\pm\frac{\sqrt{1001\cdot3}}{52}=-1\pm\frac{\sqrt{143\cdot7\cdot3}}{52}$$

Вернемся к системе

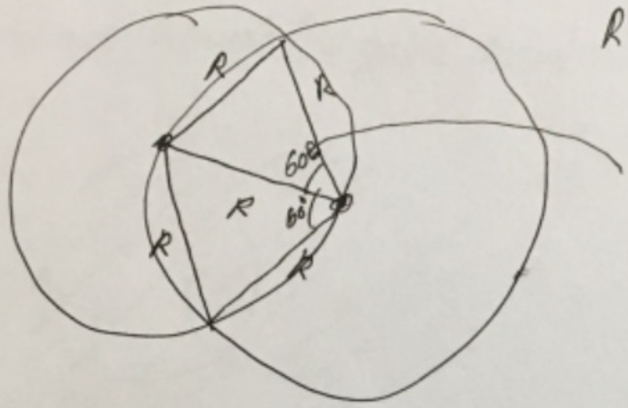
$$\begin{cases}\left[\begin{aligned}&a=-1+\frac{\sqrt{3003}}{52}\\ &b=-\frac{13+4\left(-1+\frac{\sqrt{3003}}{52}\right)}{6}\end{aligned}\right.\\ \left[\begin{aligned}&a=-1-\frac{\sqrt{3003}}{52}\\ &b=-\frac{13+4\left(-1-\frac{\sqrt{3003}}{52}\right)}{6}\end{aligned}\right.\end{cases}$$

Лист 6

См. прод на листе 7

Чистовик

4) Посчитаем ~~...~~ углы окружностей

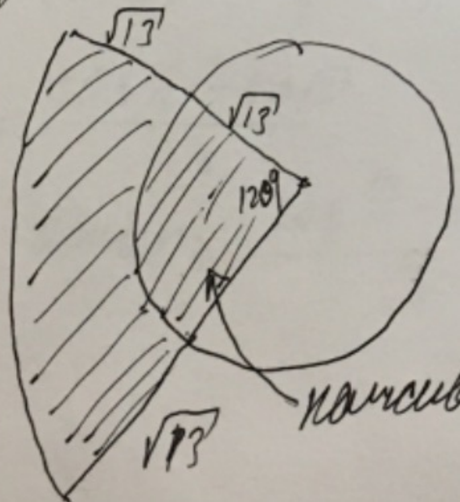


$R = \sqrt{13}$

общий угол $\underline{120°}$

Заметим, что в наших пересекающихся окружностях получаются равнобокие треугольники, углы в них по 60°.

5) ~~Общая область является~~ Посчитаем разные области: для одной окружности нам подходит вся данная область (при таких проходит касание с заштрихованной областью)



начальная область

Это сектор окружности радиусом $2\sqrt{13}$

Его площадь $S_1 = \frac{120°}{360°}\pi\left(2\sqrt{13}\right)^2 = \frac{\pi}{3}\cdot 4\cdot 13$

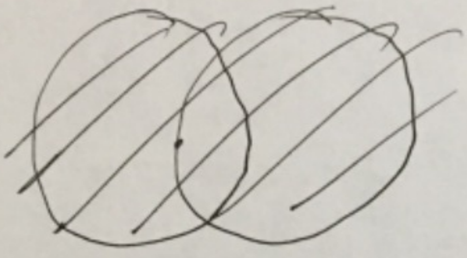
$\boxed{\text{Лист 7}}$

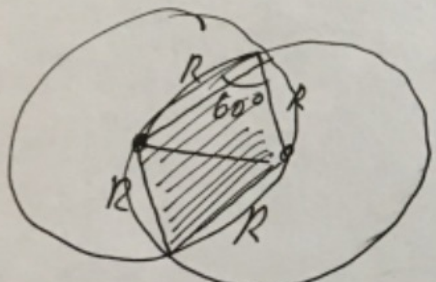
См пункт на листе

Чистовик

Таких областей для каждой окружности две, их площадь $S_0 = 2S_1 = \frac{2\pi}{3}\cdot 4\cdot 13$

Но таким подсчетом мы дважды считаем область "ромба" в двух окружностях:





Его площадь

$S_p = R^2\cdot \sin 60^\circ = R^2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{13\sqrt{3}}{2}$

Тогда конечная площадь фигуры M:

$S_M = S_0 - S_p = \frac{2\pi}{3}\cdot 4\cdot 13 - \frac{13\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi\cdot 52}{3} - \frac{13\sqrt{3}}{2} =$

$= \frac{208\pi - 39\sqrt{3}}{6}$

Ответ: $\frac{208\pi - 39\sqrt{3}}{6}$

Лист 8

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101175**

ID профиля: **832119**

Вариант 20

Чистовик

Задача 4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=10 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$$

1) Т.к. НОД$(a;b;c)=10$ ~~[illegible]~~ $\Rightarrow$

$a=10m=2\cdot5\cdot m$

$b=10n=2\cdot5\cdot n$

$c=10k=2\cdot5\cdot k$

$m, n, k \in Z$, причем не имеют делителей одинаковых для всех троих

2) Т.к. НОК$(a;b;c)=2^{17}\cdot5^{16}$, следовательно m, n, k могут содержать в себе ~~[illegible]~~ до ~~[illegible]~~ $17-1=\underline{16}$ множителей двойки, и до $16-1=\underline{\underline{15}}$ множителей пятерки, причем какое-то число должно содержать ~~[illegible]~~ 16 двоек, какое-то (возможно то же) 15 пятерок, чтобы ~~[illegible]~~ выполнялось значение для НОК.

~~[illegible]~~

3) Выбрать число в котором будет ~~[illegible]~~ 16 двоек множителей мы можем тремя способами; еще от 0 до 16 двоек мы можем "положить" на ~~[illegible]~~ последнем одно из двух оставшихся чисел. ~~Тогда~~ В ~~оставшем~~ся двоек не будет иначе НОД станет равен 20. Заметим, что при таком подсчете мы дважды считаем ~~[illegible]~~ расстановки с 16-ю двойками на двух числах (их 3: mn, mK, nk) и с ~~[illegible]~~ другими "пустыми" числами (их 3: mn, mK, nK). (см. прод. на 2) / Лист 1 /

~~их~~ общее число "расстановок" чисел:

$$P_1 = \underline{3} \cdot \underline{\underline{17}} \cdot \underline{\underline{\underline{2}}} - 3 - 3 = 6 \cdot 17 - 6 = 6 \cdot 16$$

~~[illegible]~~ (подчеркиваниями обозначены соответственные пункты, вносящие вклад)

4) ~~Такая~~ Такая же схема присутствует в распределении пятерок: 15 пятерок ~~[illegible]~~ пр~~и~~ев~~о~~носим в одно из трех чисел; от 0 до 15 в одно из двух оставшихся; исключаем по 3 случая с двумя "пустыми" и двумя "полными" числами.

Всего способов:

$$P_2 = \underline{3} \cdot \underline{\underline{16}} \cdot \underline{\underline{\underline{2}}} - 3 - 3 = 6 \cdot 16 - 6 = 6 \cdot 15$$

5) Заметим, что расстановка двоек и пятерок не зависит друг от друга.

Значит общее число способов:

$$P = P_1 \cdot P_2 = 6 \cdot 16 \cdot 6 \cdot 15 = 96 \cdot 90 = 13500$$

количество способов "расставить" числа по k, m, n равно количеству разных k, m, n, что равно количеству разных троек $(a; b; c)$, а таких $P = 13\,500$

Ответ: 13 500

Лист 2

~~Чистовик~~ Черновик

Задача 5

~~а) Рассмотрим разные случаи~~

~~1) $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$~~

~~$2\log_{2x-8}(x-4) = \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)$ / : $\log_{2x-8}(x-4) \neq 0$ (т.к. $(x-4)\neq 1$)~~

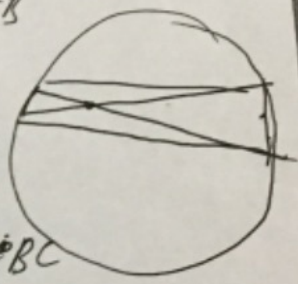
~~$4 = \frac{\log_{(x-4)}(5x-26)}{\log}$~~

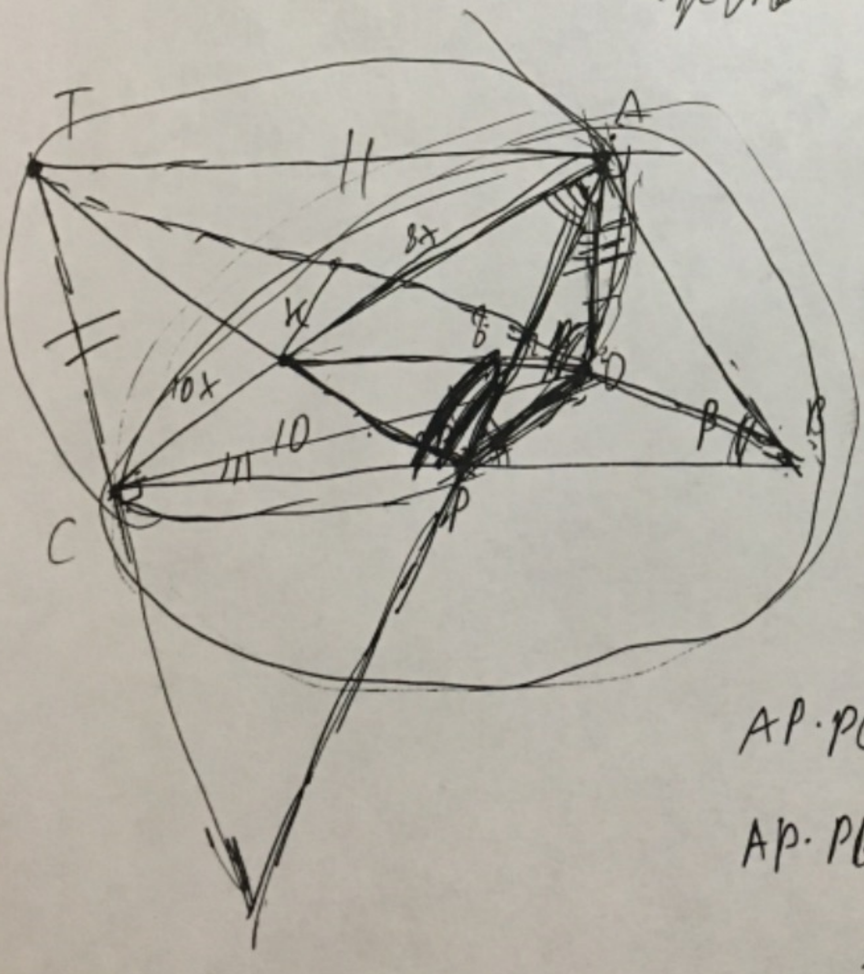
$\frac{TK}{KP} = \frac{AK}{KC}$

AB

~~BP·PC~~

~~PC·AB~~





$AB^2 = BP \cdot BC$

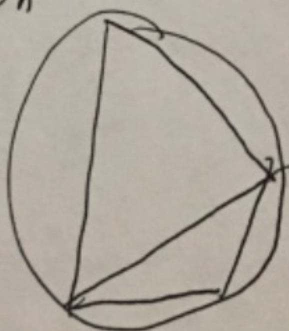
$AP \cdot AC \cdot \sin\gamma = 36$

~~$AB \cdot BC \cdot \sin\alpha$~~ $= S_n$

$AP \cdot PC \cdot \sin\gamma = 36$

$AP \cdot PB \cdot \sin\gamma = S_n$

$\frac{S_n}{36} = \frac{PB}{PC}$



$2\log_{2(x-4)}(x-4) = 2\log_{5x-26} 2(x-4)$ чернови

$\dfrac{\log_{2(x-4)}(x-4)}{\log_{2x-4} 5x-26} = 1$

$R_1^2 \sin(\beta+\gamma) =$

$= R^2 \sin\beta \quad S_1\cos\beta + S_2\cos\gamma$

$\log_{5x-26}(x-4) = 1$

$5x-26 = x-4$

$R = \dfrac{4S}{aBC}$

$\log_{2(x-4)}(x-4) = \log_{2(x-4)}(5x-26) \neq$

$\dfrac{AP \cdot PC \cdot AC \cdot R}{AK \cdot PK \cdot AK \cdot R} = \dfrac{18 \cdot 4}{8 \cdot 4}$

$\dfrac{AP \cdot PK \cdot AK}{CP \cdot PK \cdot CK \cdot R} \quad R = \dfrac{4 \cdot 8}{10 \cdot}$

$\log_{2(x-4)}(5x-26) =$

$\dfrac{PC}{PK} \quad \dfrac{18}{8} = \dfrac{18}{}$

$\dfrac{AP}{CP} \quad \dfrac{8}{10} = \dfrac{8}{10}$

$\log_{2(x-4)}(x-4) = \log_{5x-26} 2(x-4)$

$\log_{2(x-4)}(x-4) = \log_{5x-26} 2 + \log_{5x-26}(x-4)$

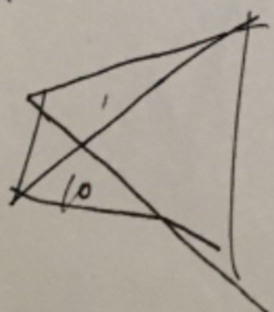
$R^2 \sin\alpha = 36$

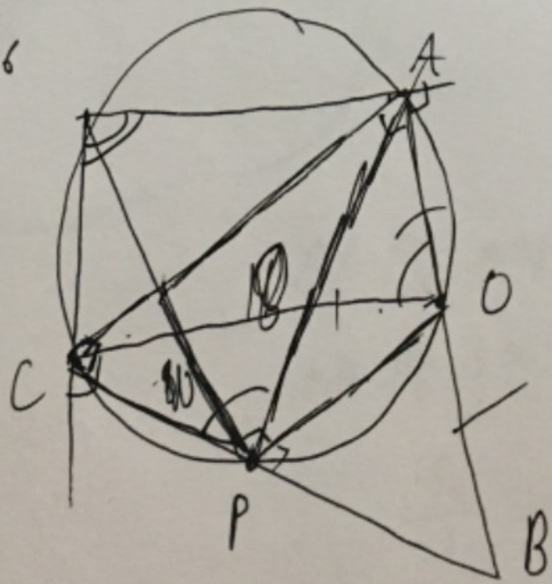
$R^2 \sin(\beta+\gamma) = 36$

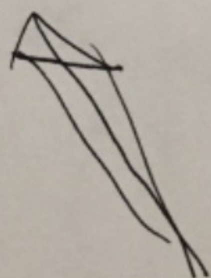
R^2

$AP \cdot PC \cdot AC \cdot R = 18 \cdot 4$

T.K.



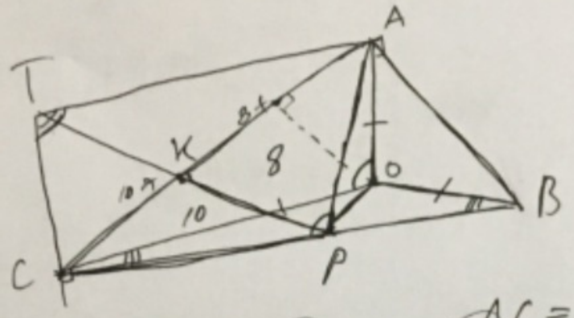




черновик

S_Δ 4R

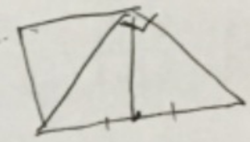
$4R = \frac{4S}{abc}$



$H \cdot AC = 18$

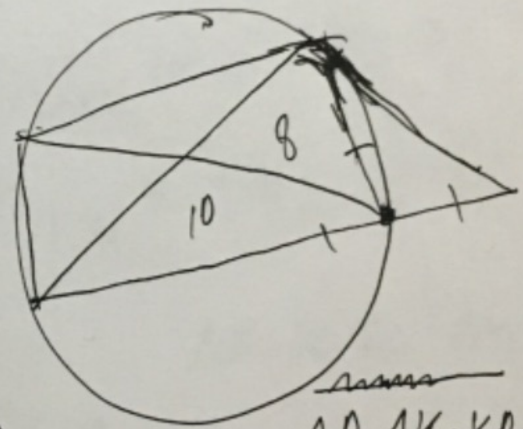
$TO = D$

$AC = \frac{TO}{2} \sin \alpha$

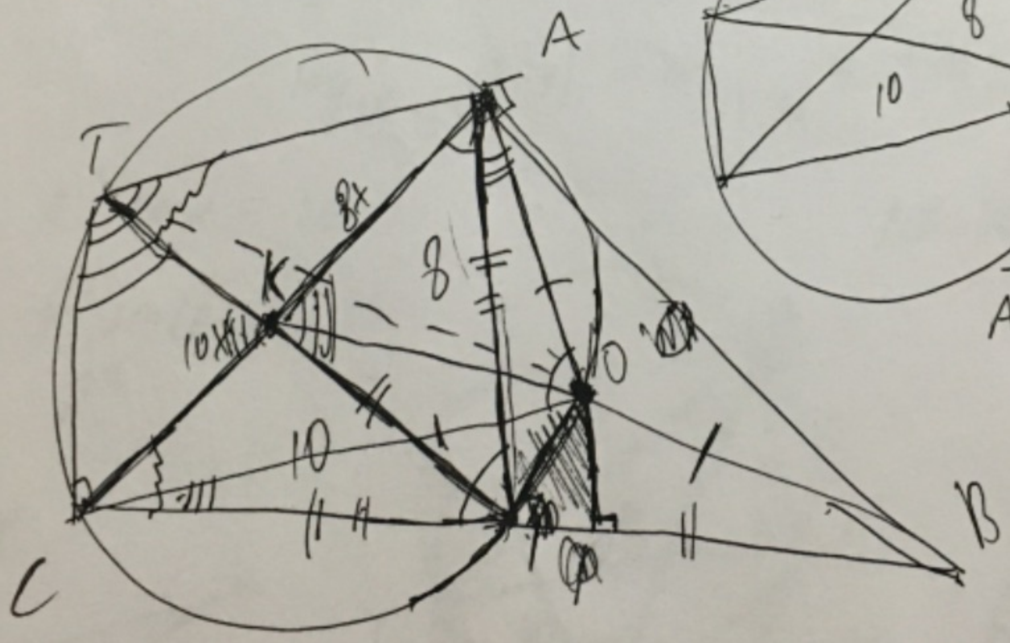


$\frac{H \cdot TO}{2} \sin \alpha = 18$

$AT \cdot TP \cdot \sin \alpha = x$



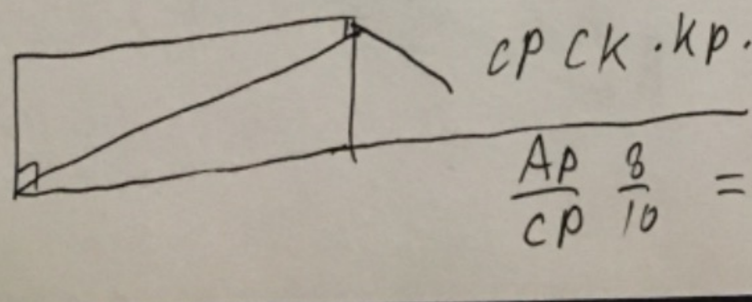
$AP \cdot AK \cdot KP \cdot$



R

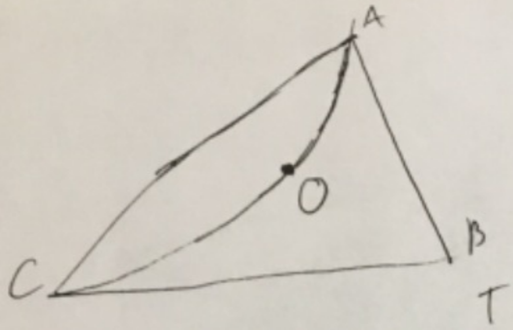
$AP \cdot AK \cdot KP = \frac{\cancel{TO}}{2} = \cancel{8} \; 8 \cdot 4$

$CP \; CK \cdot KP \cdot R = 10 \cdot 4$



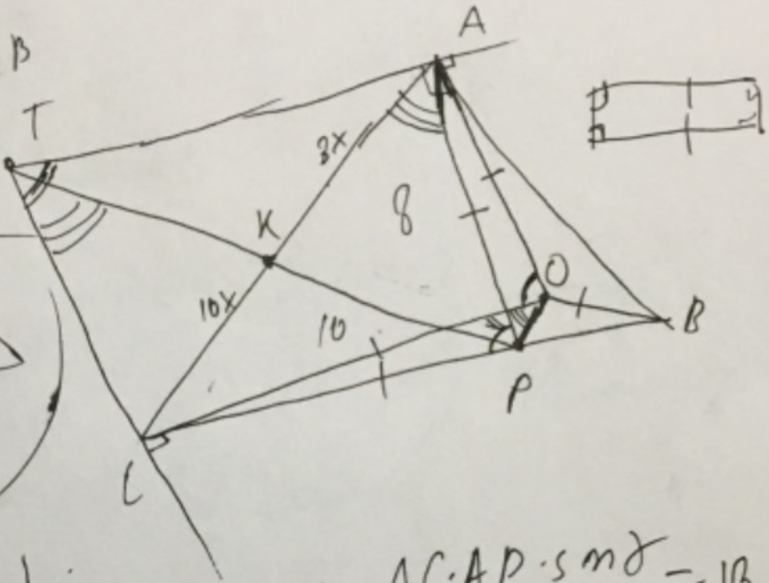
$\frac{AP}{CP} \; \frac{8}{10} = \frac{8}{10}$

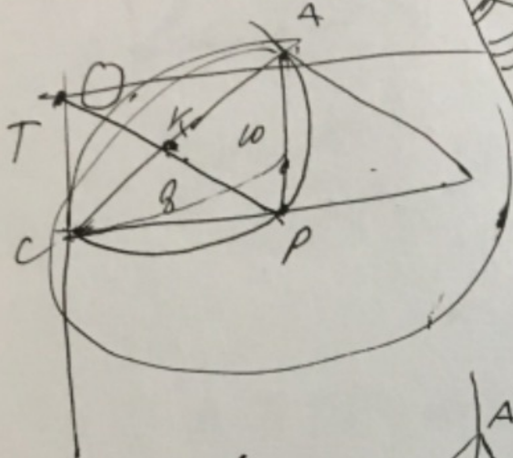
Черновик



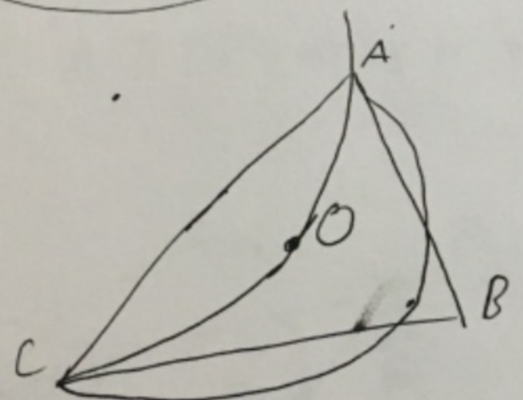
$H \cdot AK = 18$

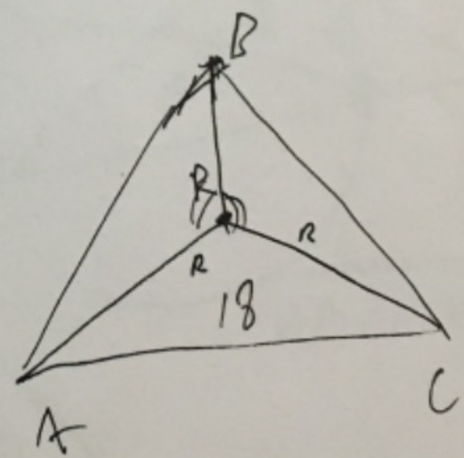
$H\ KC = 20$

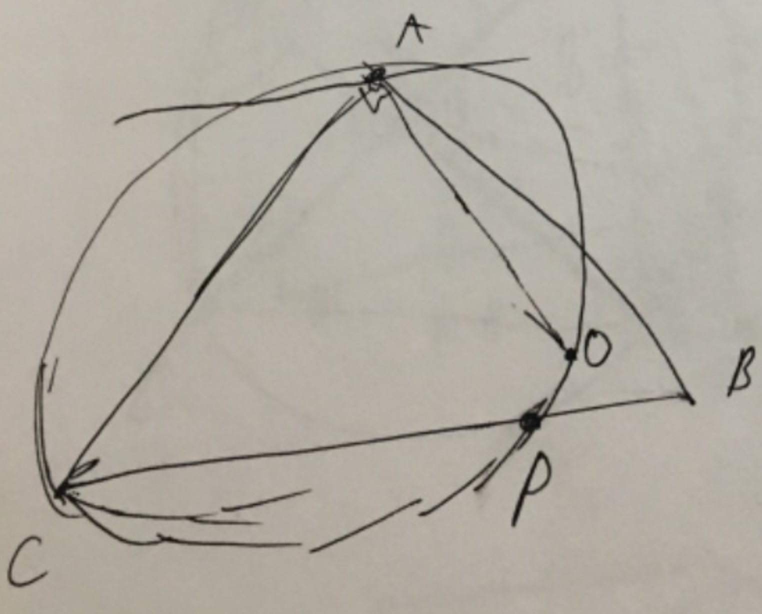




$$\frac{AC \cdot AP \cdot \sin\gamma}{2} = 18$$

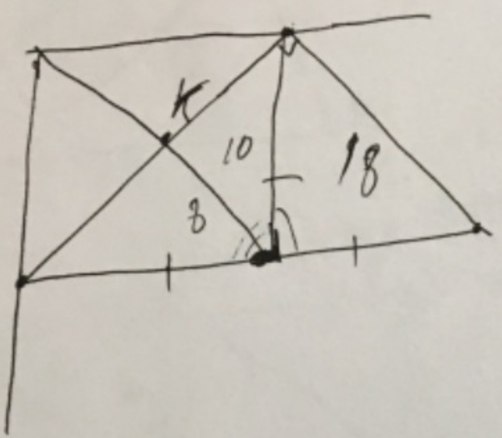


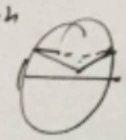


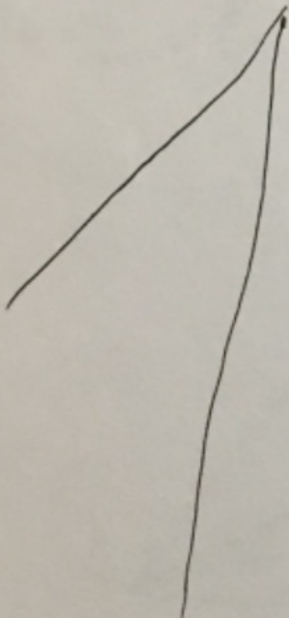


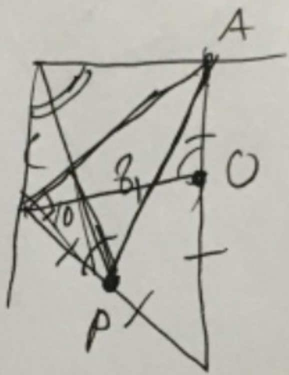
$R^2 \sin\alpha = 18$

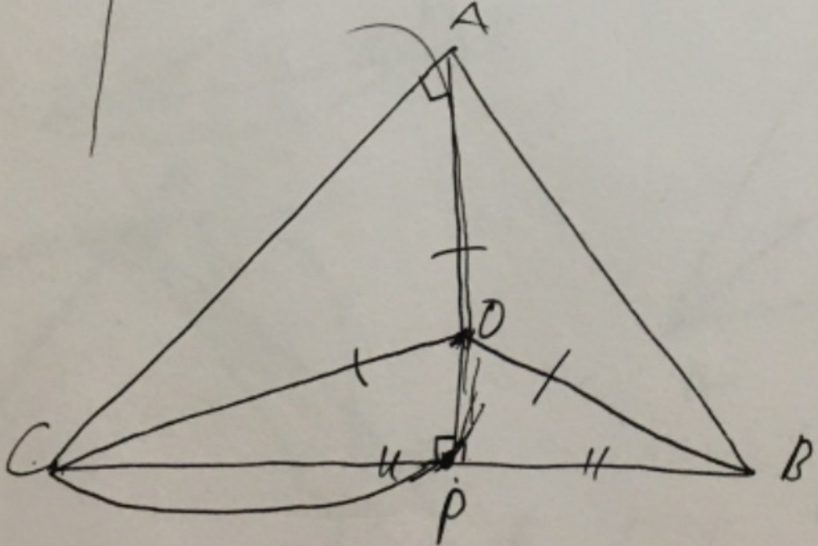
черновик











Черновик

НОД $(a;b;c)=10$

НОК $2^{17}\cdot 5^{16}$

$\log_{\cancel{2(x-4)}}(x-4)$

$2\log_{2(x-4)}(x-4)$

$\frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)$

$2\log_{5x-26} 2(x-4)$

$a \quad b \quad c$

$$\boxed{\begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{matrix}}$$

$2 \quad 2$

2^{1}

2

5 $\quad a \cancel{\times} b$

$6\cdot 16=60+36=96$

$6\cdot 15 \quad 80$

60

$2\log_a b>1$

$\frac{1}{2}\log_b c$

$2\log_c a$

$6\cdot 16\cdot 6\cdot 15=$

$=96\cdot 90$

13

$96\cdot 9=$

$=810+540=$

$=1350$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=\log_{(x-4)^2}$

$\log_{\sqrt{2}\sqrt{x-4}}(x-4)=\log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$x\geq 4$ $\quad x\geq\frac{26}{5}=$

$=5,1$

$2\log_{2(x-4)}(x-4)$

$\frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)$

$2\log_{5x-26}(2(x-4))$

21101175 (U832119 M1301456)