Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101146**

ID профиля: **117373**

Вариант 20

Чистовик 1 Вариант 20

№1.

$$S = \frac{(a_1+a_5)5}{2} = \frac{(2a_1+4d)5}{2} = 5a_1+10d$$

$a_6 = a_1+5d$, $a_{11} = a_1+10d$

$a_8 = a_1+7d$, $a_9 = a_1+8d$

$a_6 a_{11} > S+15$ (по усл.)

$(a_1+5d)(a_1+10d) > 5a_1+10d+15$

$a_1^2+15da_1+50d^2 > 5a_1+10d+15.$

$a_1^2+15da_1-10d-5a_1+50d^2-15>0$ (1)

$a_8 a_9 < S+39$ (по усл.)

$(a_1+7d)(a_1+8d) < 5a_1+10d+39$

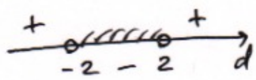
$a_1^2+15da_1+56d^2 < 5a_1+10d+39.$

$-a_1^2-15da_1+10d+5a_1-56d^2+39>0$ (2)

Сложим (1) и (2):

$\cancel{a_1^2}+\cancel{15da_1}-\cancel{10d}-\cancel{5a_1}+50d^2-15-\cancel{a_1^2}-\cancel{15da_1}+\cancel{10d}+\cancel{5a_1}-56d^2+39>0.$

$-6d^2+24>0$ $\quad d^2-4<0$ $\quad (d-2)(d+2)<0$



$d>0$, $d \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow d=1.$

Подставим d в (1):

$a_1^2+15a_1-10-5a_1+50-15>0$

$a_1^2+10a_1+25>0$

$(a_1+5)^2>0$ $\quad \underline{a \neq -5}.$

Подставим d в (2):

$-a_1^2-15a_1+10+5a_1-56+39>0.$

$-a_1^2-10a_1-7>0$

$a_1^2+10a_1+7<0$

$(a_1-(-5-\sqrt{18}))(a_1-(-5+\sqrt{18}))<0$

$a_1^2+10a_1+7=0$

$\frac{D}{4}=25-7=18$

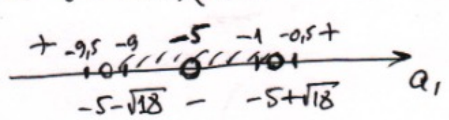
$a_1=-5\pm\sqrt{18}$

$4<\sqrt{18}<4{,}5$

$-1<-5+\sqrt{18}<-0{,}5$

$-4{,}5<-\sqrt{18}<-4$

$-9{,}5<-5-\sqrt{18}<-9$



$a_1 \in \mathbb{Z}$, $a_1 = -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1.$

Ответ: $a_1 = -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1.$

21101146 (U117373 M1302486)

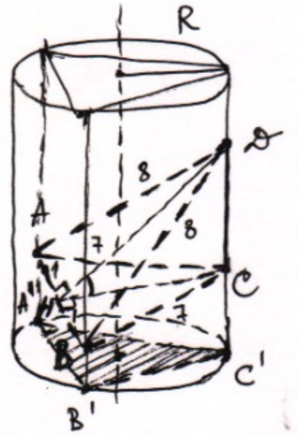
Чистовик (2) Вариант 20

№2.

$AB = 2$, $AC = CB = 7$,

$AD = DB = 8$.

$CD - ?$



$S(A'B'C') = S(ABC)\cos\alpha =$

$= S(ABD)\cdot\cos\beta$

$\angle((ABC),(A'B'C')) = \alpha$,

$\angle((ABD),(A'B'C')) = \beta$.

$S(A'B'C') \le S(ABC)$,

$S(A'B'C') \le S(ABD)$.

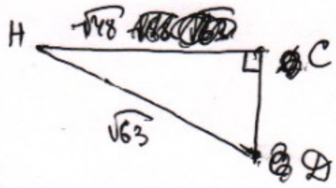
$S(ABC) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{49-1} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

$S(ABD) = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{64-1} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$.

$R = \dfrac{A'B'\cdot B'C'\cdot A'C'}{4S(A'B'C')}$ $R = R_{min}$ при $S(A'B'C') = S(A'B'C')_{max}$

$S(A'B'C') = S(ABC)$

$CD \perp (ABC)$



по т. Пифагора $CD = \sqrt{63-48} = \sqrt{15}$.

Ответ: $CD = \sqrt{15}$

Чистовик 3 Вариант 20.

№3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13 & (1)\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b,13) & (2)\end{cases}$$

(1) $(x-a)^2+(y-b)^2\le 13$.

$(x-a)^2+(y-b)^2=13$

график – множество окр-тей на пл-ти $\{x;y\}$ с ц. $(a;b)$, $R=\sqrt{13}$.

(2) $a^2+b^2\le \min(-4a-6b,13)$.

(2.1) $13<-4a-6b$. $b<-\frac{2a}{3}-\frac{13}{6}$.

a	0	3	-3
b	$-\frac{13}{6}$	$-\frac{25}{6}$	$-\frac{1}{6}$

$a^2+b^2\le 13$

$a^2+b^2=13$ график – мн-во окружностей на пл-ти $\{a;b\}$ с ц. $(0;0)$, $R=\sqrt{13}$

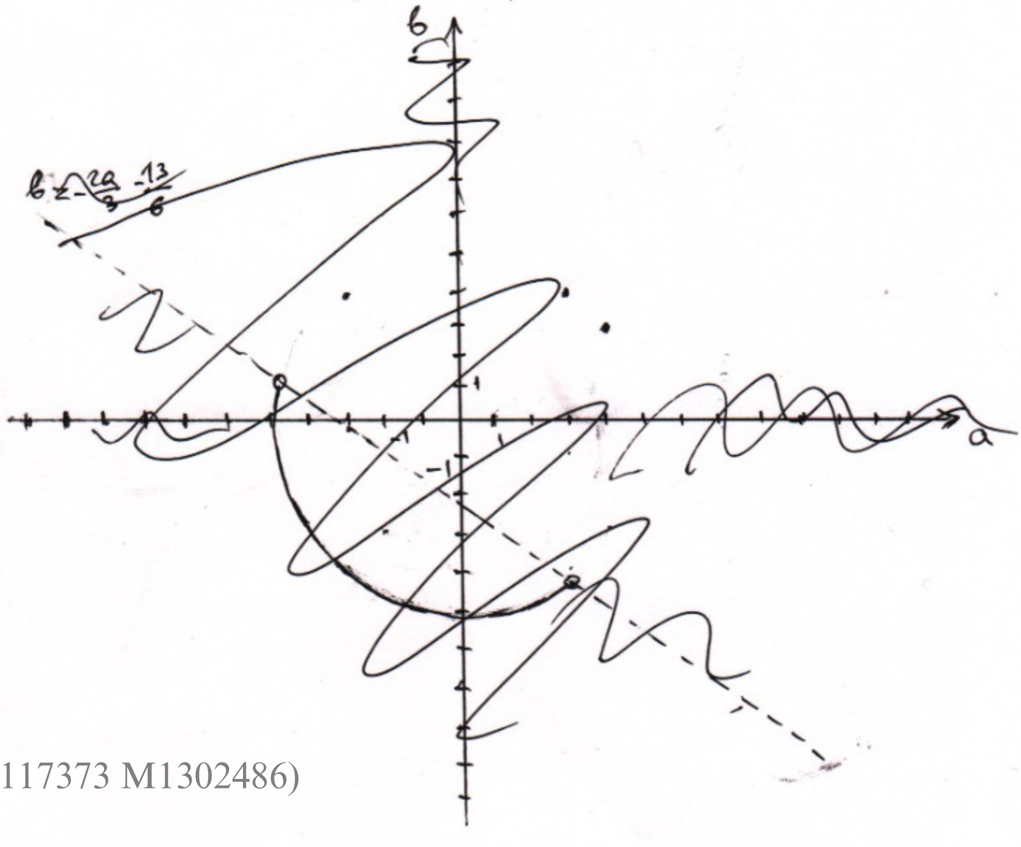
(2.2) $-4a-6b<13$. $b\ge -\frac{2a}{3}-\frac{13}{6}$.

$a^2+b^2\le -4a-6b$

$a^2+4a+4+b^2+6b+9\le 13$.

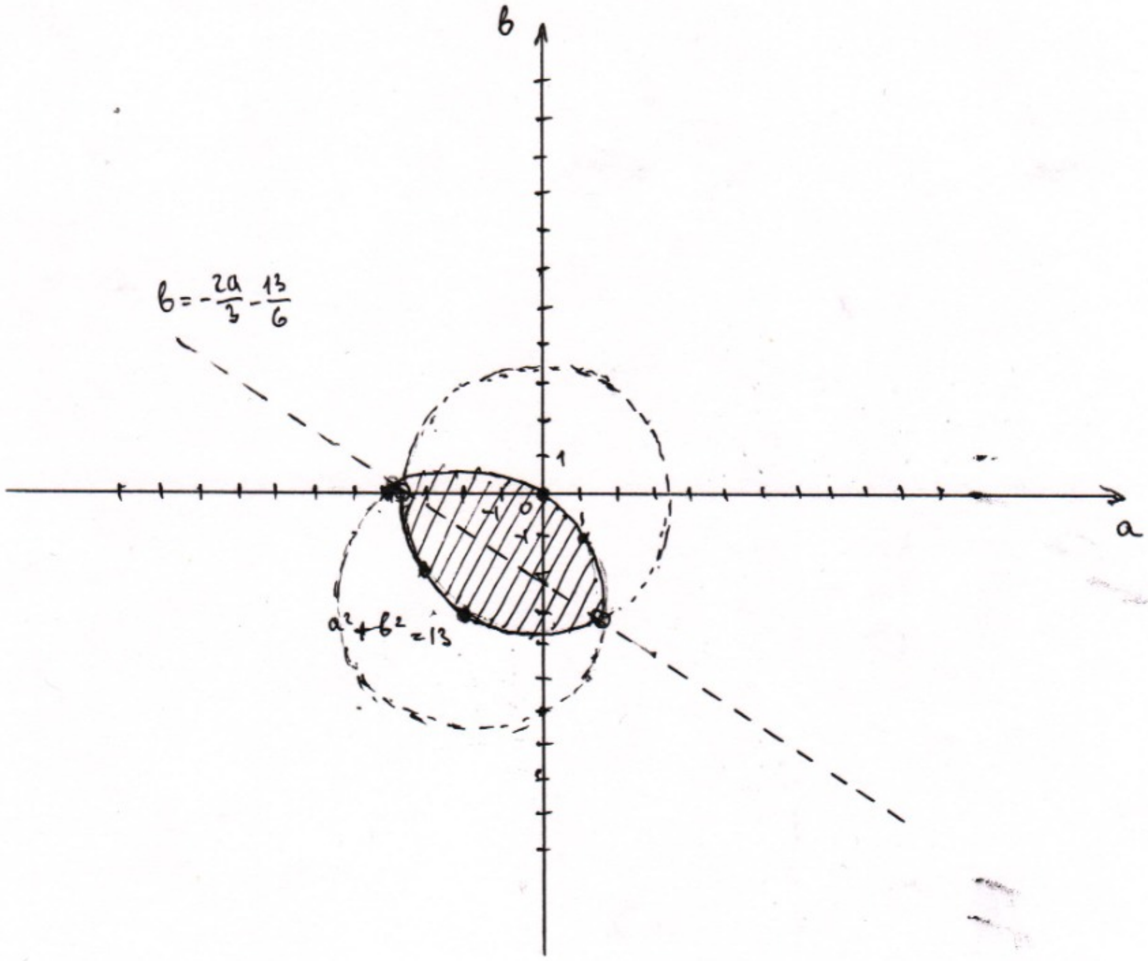
$(a+2)^2+(b+3)^2\le 13$.

$(a+2)^2+(b+3)^2=13$ график – мн-во окр-тей на пл-ти $\{a;b\}$ с ц. $(-2;-3)$, $R=\sqrt{13}$.



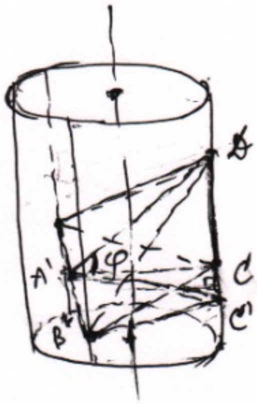
21101146 (U117373 M1302486)

Чистовик 4 Вариант 20



21101146 (U117373 M1302486)

Черновик.



$$S_{A_1'B'C'} = S(ABC)\cos\alpha$$

2

A'D

$S_1 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

$\sqrt{48}$

$S_2 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{63} = \sqrt{63}$.

$S_1\cos\alpha = S_2\cos\beta$

$\angle\beta = 180° - \varphi$

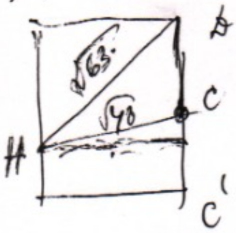
$S = \frac{abc}{4R}$

$R = \frac{abc}{4S}$

$= \frac{abc}{2ab\sin(a;b)} = \frac{c}{2\sin(a;b)}$

$\sqrt{63-48} = \sqrt{15}$

$\begin{array}{r}63\\-48\\\hline 15\end{array}$



$6b < -4a - 13$.

$b < -\frac{2a}{3} - \frac{13}{6}$.

$2 - \frac{13}{6} = -\frac{1}{6}$

$\frac{-4a-13}{6}$

$-2 - \frac{13}{6} = -\frac{25}{6}$

Черновик

$a_1+a_2+\ldots+a_5=S.$ $\quad d>0$

$a_6a_{11}>S+15$ (1) $\quad a_8a_9<S+39$ (2) $\quad a_7?$

$a_2=a_1+d$ $\quad a_n=a_1+(n-1)d$

$a_3=a_2+d=a_1+2d$

$a_6=a_1+5d$ $\quad a_8=a_1+7d$

$a_{11}=a_1+10d$ $\quad a_9=a_1+8d$

6, 7, 8, 9, 10, 11

$a_7=\frac{a_6+a_8}{2}$ $\quad a_{10}=\frac{a_9+a_{11}}{2}$

$S=\frac{(a_1+a_5)5}{2}=\frac{(a_1+a_1+4d)5}{2}=(a_1+2d)5=5a_1+10d$

(1) $(a_1+5d)(a_1+10d)>5a_1+10d+15$

$a_1^2+10a_1d+5a_1d+50d^2>5a_1+10d+15.$

$a_1^2+15a_1d-5a_1-10d+50d^2-15>0.$ (1.1)

(2) $(a_1+7d)(a_1+8d)<5a_1+10d+39.$

$a_1^2+\underbrace{8a_1d+7a_1d}_{15a_1d}+56d^2-5a_1-10d-39<0.$

$-a_1^2+5a_1-15a_1d-56d^2+10d+39>0.$ (2.1)

$-6d^2+24>0$

$d^2<4$ $\quad (d-2)(d+2)<0$ $\quad d>0,\ d\in\mathbb{Z}.$

$d=1$

$a_1^2+15a_1-5a_1-10+50-15>0.$

$6d^2<24$

$a^2+10a_1+2<0$

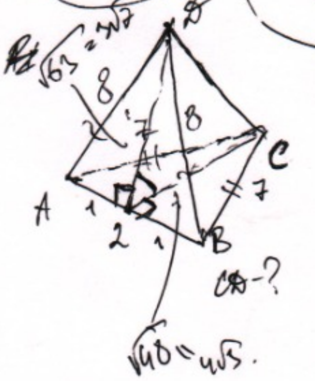
$\frac{D}{4}=25-7=18$

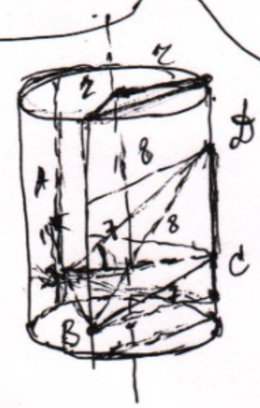
$a_1=-5\pm\sqrt{18}$

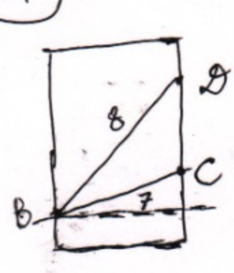
$4{,}5^2$

$\sqrt{63}=3\sqrt{7}$

$\sqrt{80}=4\sqrt{5}.$







Угол между BD и (ABC)

S

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101146**

ID профиля: **117373**

Вариант 20

Чистовик 1 Вариант 20.

№4.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 10 = 2^1 \cdot 5^1 \\ НОК(a;b;c) = 2^{17} \cdot 5^{16} \end{cases} \qquad a, b, c \in N.$$

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2}$, $b = 2^{\beta_1} \cdot 5^{\beta_2}$, $c = 2^{\gamma_1} \cdot 5^{\gamma_2}$.

$\max(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = 17$, $\min(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = 1$.

$\max(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = 16$, $\min(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = 1$.

Одно из чисел $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ равно 1, другое равно 17, третье $\in [1;17]$, $\in N$. $\Rightarrow$ числа $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ можно выбрать $3! \cdot 17$ способами.

Аналогично, числа $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ можно выбрать $3! \cdot 16$ способами.

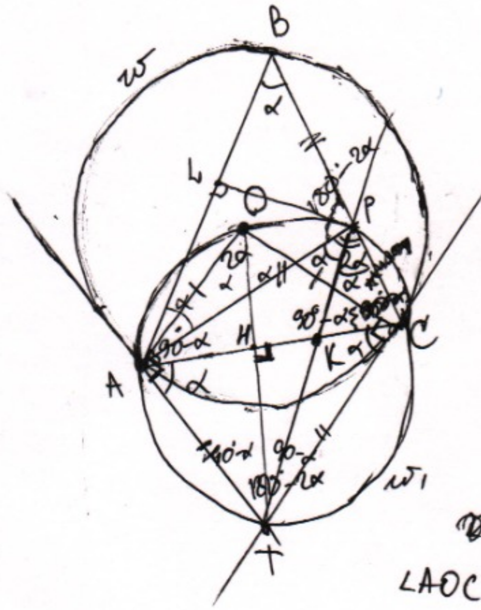
Тогда упорядоченных троек нат. чисел (a, b, c) $(3!)^2 \cdot 16 \cdot 17 = 9792$.

Ответ: 9792.

21101146 (U117373 M1302487)

Чистовик (2) вариант 2а

№6.



$S(APK)=10$, $S(CPK)=8$.

а) $S(ABC)$ – ?

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, AC – ?

а) $AT = TC$ (отрезки кас-х, проведенных из одной точки), $\angle TCA = \angle TAC = \alpha$.

$\angle TCA = \angle ABC$ (угол между касательной и хордой).

$\angle ATC = 180^\circ - 2\alpha$. (из $\triangle ATC$)

$\angle AOC = 2\alpha$ (центр. угол), $AOCT$ – вп. четырехугольник.

$\Rightarrow$ т. T лежит на окр-ти ω_1.

$\angle APC = \angle AOC = 2\alpha$ (оп. на одну дугу)

$AO = OC$ (радиусы окр-ти ω), $AO \perp AT$, $OC \perp CT$ (радиусы, проведенные в т. касания).

$OT \perp AC$ (OH – высота и медиана в равнобедр. $\triangle AOC$, TH – высота и медиана в равнобедр. $\triangle ATC$).

$\angle TCA = \angle TPA = \alpha$, $\angle TAC = \angle TPC = \alpha$ (оп. на одну дугу), $\Rightarrow AB \parallel TP$.

PK – биссектриса $\angle APC$.

$\frac{AK}{KC} = \frac{S(APK)}{S(CPK)} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$ (общ. высота)

$\triangle KPC \sim \triangle ABC$ ($\angle ABC = \angle KPC = \alpha$, $\angle C$ – общ.), $\frac{S(KPC)}{S(ABC)} = \left(\frac{KC}{AC}\right)^2$

$$S(ABC) = S(KPC)\cdot\left(\frac{AC}{KC}\right)^2 = S(KPC)\cdot\left(\frac{AK+KC}{KC}\right)^2 = 8\cdot\left(\frac{AK}{KC}+1\right)^2 = 8\left(\frac{5}{4}+1\right)^2 = \frac{8\cdot 9^2}{4^2} = \boxed{\frac{81}{2}}.$$

б) $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

$AB \parallel TP$ (см. п. а)) $\Rightarrow AK:KC = BP:PC$ (т. Фалеса).

по св-ву биссектрисы (для PK): $AP:PC = AK:KC$ | $\Rightarrow AP = BP$, $\angle BAP = \alpha$.

$S(APB) = S(ABC) - S(APC) = \frac{81}{2} - 18 = \frac{81-36}{2} = \frac{45}{2}$.

$PL \perp AB$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{PL}{BL} = \frac{1}{2}$ $S(APB) = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot PL = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot\frac{AB}{4} = \frac{AB^2}{8}$.

21101146 (U117373 M1302487)

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{PL\cdot 2}{AB} = \frac{1}{2}$, $PL = \frac{AB}{4}$.

Чистовик 3 Вариант 20.

$$\frac{AB^2}{4\cancel{8}} = \frac{45}{\cancel{2}}$$

$AB^2 = 45\cdot 4 = 5\cdot 9\cdot 4$, $\underline{AB = 6\sqrt{5}}$.

~~[illegible]~~ $PL = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, $BL = 3\sqrt{5}$.

по т. пифагора для $\triangle BLP$:

$$BP = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 + \frac{(3\sqrt{5})^2}{4}} = 3\sqrt{5}\sqrt{1+\frac{1}{4}} = 3\sqrt{5}\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{3\cdot 5}{2} = \frac{15}{2}.$$

$BP : PC = AK : KC = 5 : 4$,

$$BC = \frac{BP}{5}\cdot 9 = \frac{\cancel{15}\,3}{2\cdot \cancel{5}}\cdot 9 = \underline{\frac{27}{2}}.$$

$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ $\quad \frac{1}{4} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ $\quad \cos^2\alpha = \frac{4}{5}$

$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\quad$ (α – острый).

по т. кос-в для $\triangle ABC$:

$$AC^2 = 36\cdot 5 + \frac{27^2}{4} - 2\cdot 6\cancel{\sqrt{5}}\cdot \frac{27}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{\sqrt{5}}}$$

$$AC^2 = 36\cdot 5 + \frac{27^2}{4} - 12\cdot 27 = 180 + \frac{729}{4} - 324 = \frac{720 + 729 - 1296}{4} =$$

$$= \frac{1449 - 1296}{4} = \frac{153}{4}.$$

$$\boxed{AC = \frac{\sqrt{153}}{2}}$$

Ответ: а) $S(ABC) = \frac{81}{2}$.

б) $AC = \frac{\sqrt{153}}{2}$.

21101146 (U117373 M1302487)

Чистовик 4 Вариант 20.

№5.

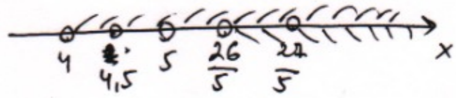
Замена:
$x-4=a$
$5x-26=b$.

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{\sqrt{2a}} a = 2\log_{2a} a$. (1)

$\log_{(x-4)^2}(5x-26) = \log_{a^2} b = \frac{1}{2}\log_{|a|} b = \frac{1}{2}\log_a b$ $(a>0)$. (2)

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = \log_{\sqrt{b}} 2a = 2\log_b 2a$. (3)

$\begin{cases} x-4>0 \\ 5x-26>0 \\ 5x-26\neq 1 \\ 2x-8\neq 1 \\ x-4\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>4 \\ x>\frac{26}{5} \\ x\neq\frac{27}{5} \\ x\neq\frac{9}{2} \\ x\neq 5 \end{cases}$



$x\in\left(\frac{26}{5};\frac{27}{5}\right)\cup\left(\frac{27}{5};+\infty\right)$.

I. (1) = (3), (2) = (1) + 1 = (3)+1

$\begin{cases} 2\log_{2a} a = 2\log_b 2a \quad (*) \\ \frac{1}{2}\log_a b = 1 + 2\log_b 2a \quad (**) \end{cases}$

(*) $\log_{2a} a = \log_b 2a$

$\log_{2a} a = \frac{1}{\log_{2a} b}$ $\qquad \frac{\log_{2a} a\cdot\log_{2a} b - 1}{\log_{2a} b} = 0$. $\qquad \log_{2a} b \neq 0$ (Если $\log_{2a} b = 0$, $b=1$; $b=5x-26\neq 1$).

$\log_{2a} a\cdot\log_{2a} b = 1$. $\qquad \log_b 2a\cdot\log_{2a} b = 1$.

$\log_b 2a\cdot\frac{1}{\log_b 2a} = 1$.

II. (1) = (2), (3) = (1) + 1 = (2)+1.

$\begin{cases} 2\log_{2a} a = \frac{1}{2}\log_a b \\ 2\log_b 2a = 2\log_{2a} a + 1 \end{cases}$

21101146 (U117373 M1302487)

Черновик.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=10 = 2\cdot 5 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$$

$a,b,c \in N$

~~НОК(a;b;c)·НОД(a;b;c)=abc~~ ? вз. пр.

~~abc=10·2^{17}·5^{16}~~

$2^{17}\cdot 5^{17}$

2 3 2^2

НОК = $3\cdot 2^2$

НОД = $3^0\cdot 2^0=1$.

$a=2^{\alpha_1}\cdot 5^{\alpha_2}$, $b=2^{\beta_1}\cdot 5^{\beta_2}$, $c=2^{\gamma_1}\cdot 5^{\gamma_2}$

$\max(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=17$. $\min(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=1$.

$\max(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)=16$ ... $=1$.

×17

[1;17]

$\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ 17, 1, от 1 до 17

$\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$ 16, 1, от [1 до 16]

×16

α_1 β_1 γ_1

=17 =1 ×17

=17 ×17 =1

...

3!×17 3!×16

$N=3!\cdot 17\cdot 3!\cdot 16$

$6\cdot 6\cdot 16\cdot 17$

17 × 16 = 102, 17, 272

272 × 36 = 1632, 816, 9792

ОДЗ!

$x-4>0$

$5x-26>0$

$5x-26\neq 1$

$2x-8\neq 1$

$x-4\neq 1$.

$x-4=a$

$5x-26=b$.

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=\log_{\sqrt{2a}}a=2\log_{2a}a$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26)=\log_{a^2}b$ (2) $\frac{1}{2}\log_a b$.

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=\log_{\sqrt{b}}2a$ (3).

$2\log_b 2a$

(1)=(2)

$\log_{2a}a=\frac{1}{\log_{2a}b}$

$A=\frac{1}{A}$

$A-\frac{1}{A}=0$. $\frac{AB-1}{B}=0$.

$\log_{2a}b=0$.

$b=1$.

$\frac{1}{2}\log_a b=\log_b 4\cdot 2\log_b 2a$.

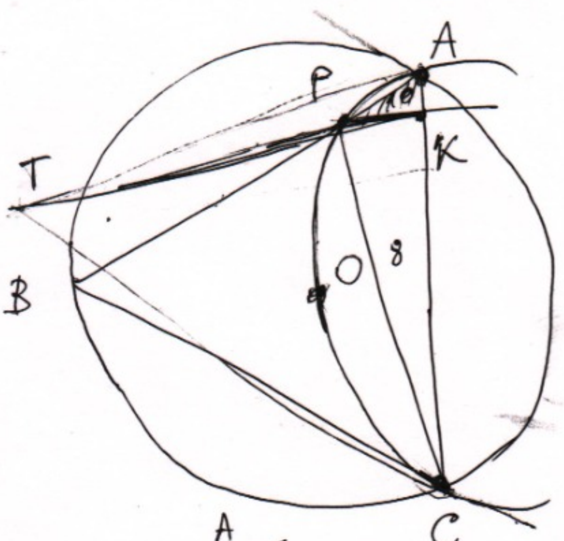
$\log_a b=2+4\log_b 2a$

$\log_b 2a\cdot\log_{2a}b=1$.

~~$\log_{2a}a=\log_b 2a$~~

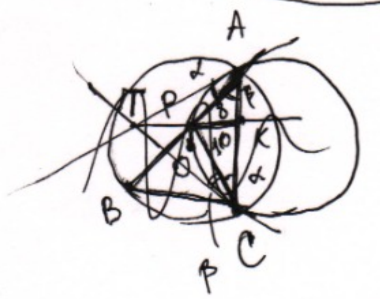
21101146 (U117373 M1302487)

Черновик.



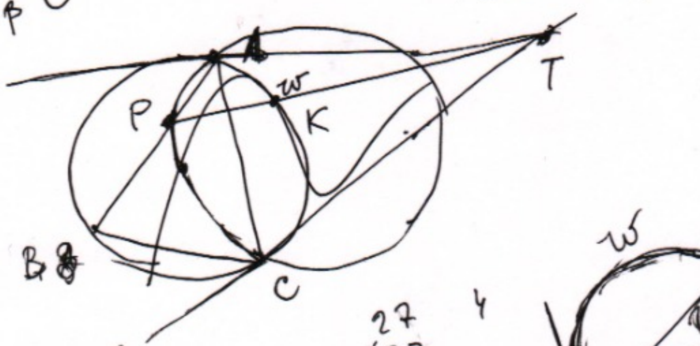
S_{ABC} - ?

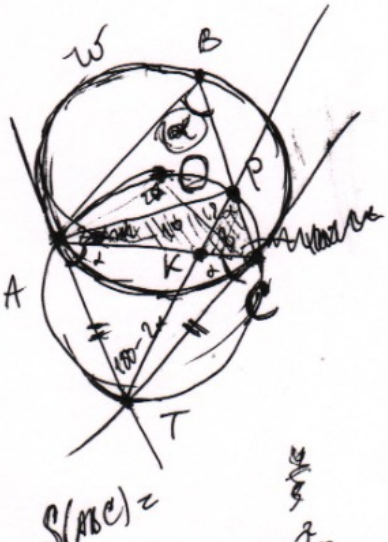
AC - ?



ΔATC – р/б.
(отр. кас.).

T лежит на окр-и.





$\frac{5+4}{4}=$

$\frac{\cancel{27}\cdot 9\cdot 9}{\frac{4\cdot 4}{2}}=$

$\frac{8\cdot 4\cdot 9\cdot 9}{42\cdot 4}$

$36 \times 5 = 180$

27×27: 189, 54, 729

$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \;|:\cos$

$tg^2 x$

$180 \times 4 = 720$

$1449 - 1296 = 153$

27×12: 54, 27, 324

$324 \times 4 = 1296$

$\frac{AC}{\sin\alpha}=2R$

$\frac{720}{7}$

$S(ABC)=$

$720 + 729 = 1449$

$\frac{81\cdot 7\cdot 4}{2\cdot 49}$

$81 - 36 = 45$

$\frac{2PL}{AB}=\frac{1}{2}$ $2PL=\frac{AB}{2}$