Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101145**

ID профиля: **190039**

Вариант 20

№1

Чистовик

Т.к арифм. прогрессия возраст. и каждый ее член - целый, то $b>0$ и $b\in\mathbb{Z}$

Т.к $S=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 \Rightarrow S=a_1+(a_1+b)+(a_1+2b)+(a_1+3b)+(a_1+4b)$
$=5a_1+10b$

$a_6=a_1+5b$, $a_{11}=a_1+10b$, $a_8=a_1+7b$, $a_9=a_1+8b$

По условию: $\begin{cases} a_6\cdot a_{11}>S+15 \\ a_8\cdot a_9<S+39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(a_1+5b)(a_1+10b)>5a_1+10b+15 \\ (a_1+7b)(a_1+8b)<5a_1+10b+39\end{cases}$

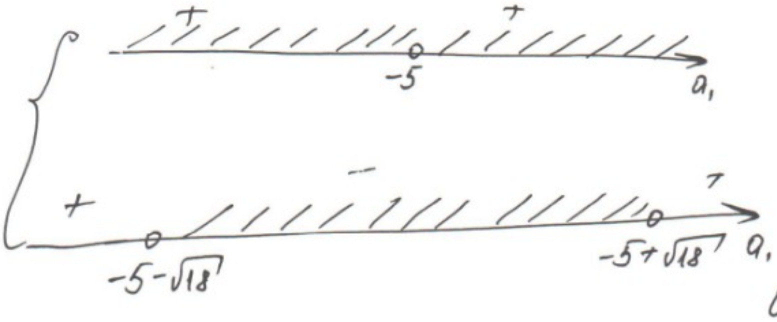
$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2+15a_1b+50b^2-5a_1-10b-15>0 \\ a_1^2+15a_1b+56b^2-5a_1-10b-39<0 \end{cases}$ из первого неравенства вычтем второе, результат должен быть >0

$a_1^2+15a_1b+50b^2-5a_1-10b-15-(a_1^2+15a_1b+56b^2-5a_1-10b-39)>0$

$-6b^2+24>0$

$b^2<4 \Rightarrow b\in(-2;2)$ а т.к по условию $b>0$ и $b\in\mathbb{Z}$ возможен лишь 1 случай — когда $b=1$, тогда

$\begin{cases}(a_1+5)(a_1+10)>5a_1+25 \\ (a_1+7)(a_1+8)<5a_1+49\end{cases}$ $\begin{cases}a_1^2+10a+25>0 \\ a_1^2+10a+7<0\end{cases}$ $\begin{cases}(a_1+5)^2>0 \\ (a_1+5-\sqrt{18})(a_1+5+\sqrt{18})<0\end{cases}$



$\Rightarrow a_1\in(-5-\sqrt{18};-5)\cup(-5;-5+\sqrt{18})$

но т.к $a_1\in\mathbb{Z} \Rightarrow$

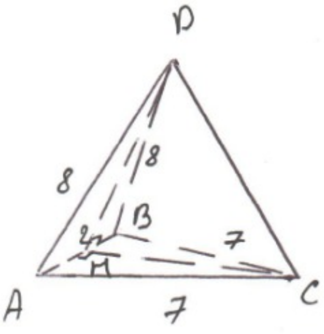
$a_1=\{-9,-8,-7,-6,-4,-3,-2,-1\}$

21101145 (U190039 M1301644)

Ответ: $-9,-8,-7,-6,-4,-3,-2,-1$.

№2

Чистовик



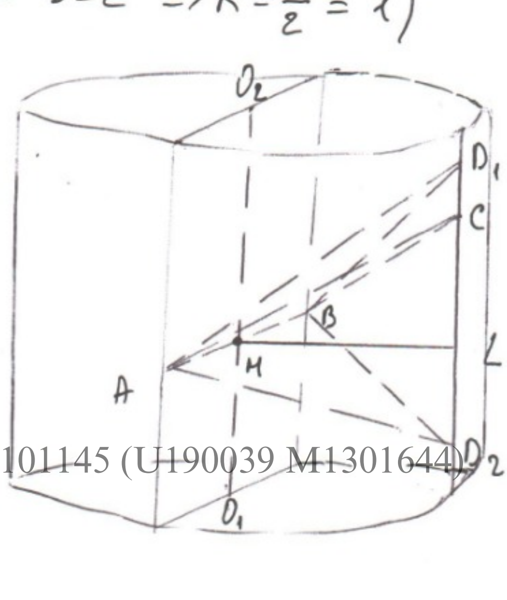
Рассмотрим тетраэдер ABCD: $\triangle ABD$ и $\triangle ABC$ - равноб т.к $AD = DB$ и $AC = CB$ => опустим медианы DH и CH, точка H - общая т.к $AH = BH$.

Но т.к $\triangle ADB$ и $\triangle ABC$ - равноб. => CH и DH - высоты, тогда $AB \perp DH$ и $AB \perp CH$ => $AB \perp (HDC)$ => $AB \perp DC$ т.к $DC \in (HDC)$

а т.к DC по ~~условию~~ условию параллелен оси =>

AB - перпендикулярен оси цилиндра => AB будет являтся хордой в сечении цилиндра (сечение в виде окружности)

а т.к AB не меняется => минимальный диаметр окружности будет равен AB т.к при его дальнейшем уменьшении невозможно будет расположить AB так, чтобы A и B лежали на боковой поверхности цилиндра и при этом $AB \perp$ оси цилинда => рассмотрим цилиндр с $R = 1$ (т.к $D = 2$ => $R = \frac{D}{2} = 1$)



~~Возм~~ возможны 2 случая,
1 - когда C и D оба выше или ниже AB
2 - когда одна из точек выше AB, а другая ниже.
Рассмотрим оба случая, для первого пара D_1, C, для второго D_2 C

Чистовик | продолжение 2 задачи

H – точка пересеч D_1D_2 и AB (т.к AB – диаметр, O_2O_1 – ось)

с точки H проведем $HL \perp O_1O_2$ и $HL \perp D_1C$

$D_1B = 8$ $BH = 1$ => т.к $D_1HB = 90^\circ$ (т.к D_1H – высота) по т. Пифагора $D_1H = \sqrt{64-1} = \sqrt{63}$

=> $D_1H = \sqrt{63}$ $HL = 1$ (т.к HL – радиус) => по т. Пифагора т.к $HL \perp D_1C$ получаем, что $D_1L = \sqrt{D_1H^2 - HL^2} = \sqrt{63-1} = \sqrt{62}$

Аналогично считаем и CL: $CH = \sqrt{CB^2 - BH^2} = \sqrt{49-1} = \sqrt{48}$

и $CL = \sqrt{CH^2 - HL^2} = \sqrt{47}$ т.к $D_1L = \sqrt{62}$ и $CL = \sqrt{47}$ и

Они D_1 и C лежат по одно сторону от L на одной прямой => $D_1C = \sqrt{62} - \sqrt{47}$

2 случай) т.к $D_1L = D_2L$ (т.к $D_2H = D_1H$ из за $\triangle HBD_2 = \triangle HBD_1$,

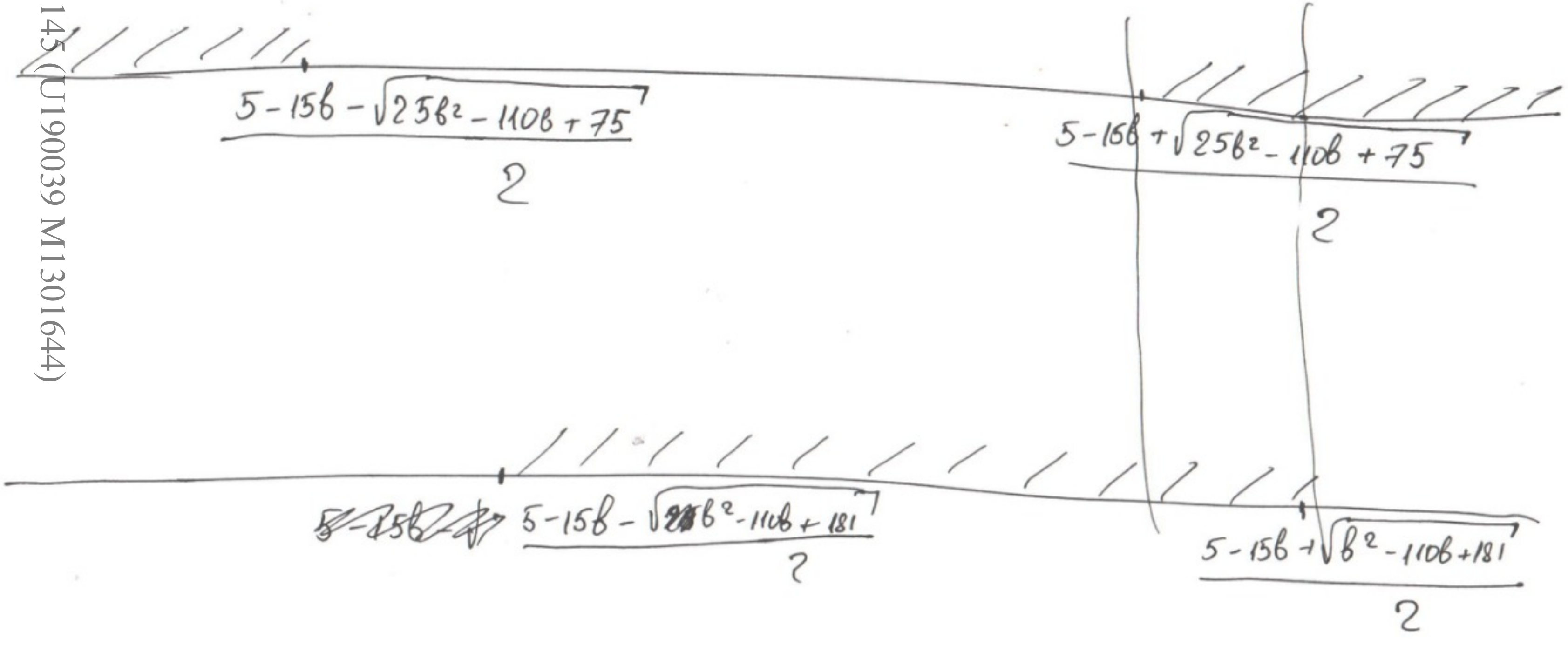
и $CL = \sqrt{47}$ => HL – общая и $\angle HLD_2 = \angle HLD_1 = 90^\circ$

=> $D_2C = \sqrt{47} + \sqrt{62}$ (т.к D_2 и C лежат на одной прямой, но по разные стороны от L) => $\triangle HLD_2 = \triangle HLD_1$ => $D_1L = D_2L$)

=> в 1 случае $DC = \sqrt{62} - \sqrt{47}$, во 2 $DC = \sqrt{62} + \sqrt{47}$

Ответ: $CD = \sqrt{62} - \sqrt{47}$ либо $CD = \sqrt{62} + \sqrt{47}$

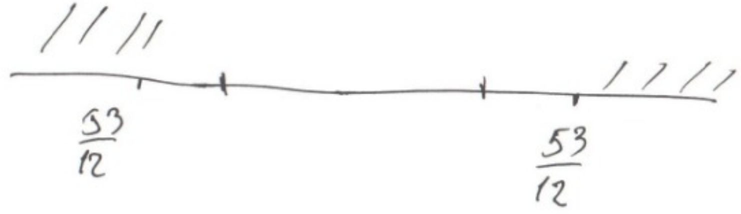
Черновик



$25b^2-110b+75 > b^2-110b+181$

$24b^2-106 > 0$

$b^2 > \frac{106}{24}$ $b^2 > \frac{53}{12}$



Черновик

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ $\qquad$ $S = 5a_1 + 10b$

$a_2 \cdot a_{11} > S + 15$

$a_8 \cdot a_9 < S + 39$

$$\begin{cases} (a_1 + 5b)(a_1 + 10b) > 5a_1 + 10b + 15 \\ (a_1 + 7b)(a_1 + 8b) < 5a_1 + 10b + 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 5ab + 10ab + 50b^2 > 5a + 10b + 15 \\ a^2 + 15ab + 56b^2 < 5a_1 + 10b + 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(a^2 + 15ab + 50b^2) < -(5a + 10b + 15) \\ a^2 + 15ab + 56b^2 < 5a + 10b + 39 \end{cases}$$

$6b^2 < 24$

$b^2 < 4$

$\boxed{b \in (-2; 2)}$ $\qquad$ $b \in (0; 2)$

$a^2 + 15ab + 50b^2 - 5a - 10b - 15 < 0$

$a^2 + a(15b - 5) + (50b^2 - 10b - 15) > 0$

$a^2 + a(15b - 5) + (56b^2 - 10b - 39) < 0$

$-6b^2 + 24 > 0$

$6b^2 < 24$

$b < 2$

$a^2 + 15ab + 56b^2 - 5a - 10b - 39 < 0$

$a^2 + 15ab - 5a + 56b^2 - 10b - 39$

$a^2 + a(15b - 5) + (56b^2 - 10b - 39) < 0$

$\underline{225b^2} - 300b + 25 - \underline{224b^2} + 40b + 156$

$b^2 - 260b + 181$

$(a + 10)(a + 20) > 5a + 20 + 15$

$(a + 14)(a + 16) < 5a + 20 + 39$

14
16

$2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 8$

$4 \cdot 56$

$224 - 59$

$225 - 60$

165

$a^2 + 30a + 200 > 5a + 20 + 15$

$a^2 + 30a + 14 \cdot 16 < 5a + 59$

$a^2 + 25a + 165 > 0$

$a^2 + 25a + 165 < 0$

Черновик

$\cancel{(a+5)}$

$a^2 + 10a + 25 > 0$ $(a+5)^2 > 0$

$a^2 + 10a + 7 < 0$

$100 - 28 = \sqrt{72}$ $\frac{-10 \pm \sqrt{72}}{2}$ $-5 \pm \sqrt{18}$

$a^2 + a(15b-5) + (50b^2 - 10b - 15) > 0$

$a^2 + a(15b-5) + (56b^2 - 10b - 39) < 0$

$50b^2 - 10b - 15 = 56b^2 - 10b - 39$

$6b^2 - 24 = 0$

$b^2 - 4$

$b = 2$

$b = -2$

$(15b-5)^2 - 200b^2 + 40b + 60$

$225b^2 - 150b + 25 - 200b^2 + 40b + 60$

$25b^2 - 110b + 75$

$\frac{5 - 15b \pm \sqrt{25b^2 - 110b + 75}}{2}$

$225b^2 - 150b + 25 - 224b^2 + 40b + 156$

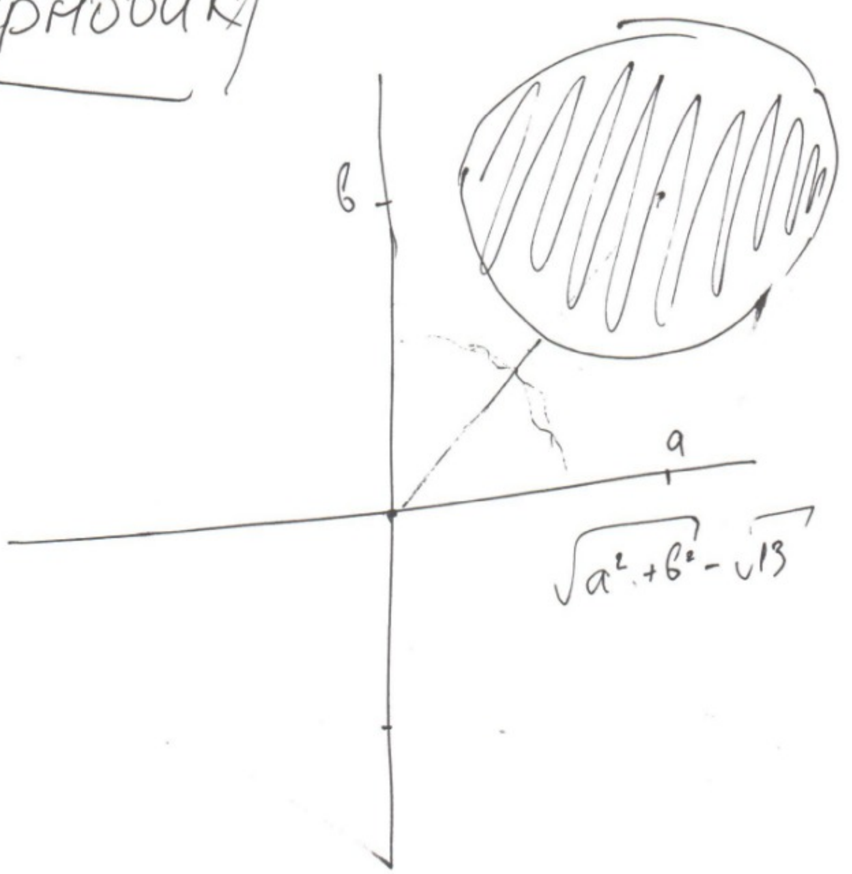
$\sqrt{b^2 - 110b + 181}$

$\frac{5 - 15b - \sqrt{25b^2 - 110b + 75}}{2}$

$5 - 15b - \sqrt{25b^2}$

21101145 (U190039 M1301644)

Черновик



Черновик!

$\left(\frac{5-15b+\sqrt{25b^2-110b+75}}{2};\ \frac{5-15b+\sqrt{b^2-110b+181}}{2}\right)$

$b\in(0;2)$

$5-15b+$

$5-15x+\sqrt{25x^2-110x+75}$

$-15+\frac{50x-110}{\sqrt{25x^2-110x+75}}$

$(a+5b)(a+10b)>5a+10b+15$

$(a+7b)(a+8b)$

$(a+5)(a+10)>5a+25$

$(a+7)(a+8)<5a+10+39$

$a^2+15a+50-5a-25>0$

$a^2+15a+56-5a-49<0$

$-4x-6y<13$

$4x+6y$ $100-28$ 72

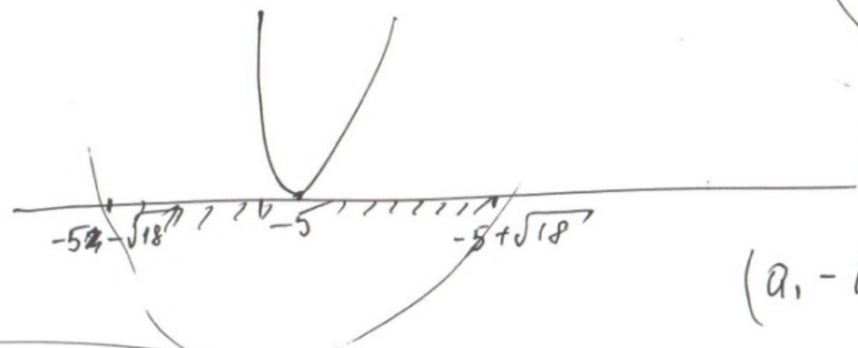
$6y>-4x-13$

$y>\frac{-4x-13}{6}$

$\begin{cases}a^2+10a+25>0\\a^2+10a+7<0\end{cases}$

$\frac{-10\pm\sqrt{72}}{2}$

$-5\pm\sqrt{18}$



$(a-(-5+\sqrt{18}))(a-(-5-\sqrt{18})$

$(a+5-\sqrt{18})(a+5+\sqrt{18})$

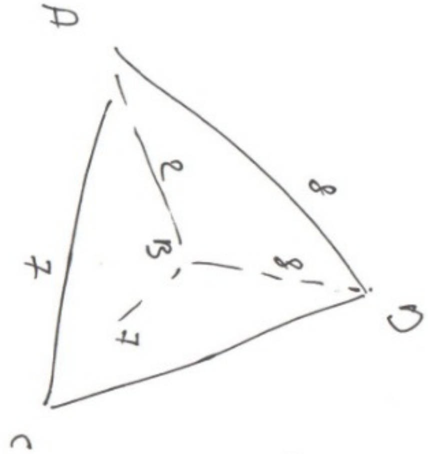
$(a+5)^2-18$

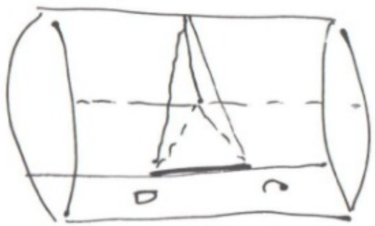
$a^2+25+10a-18$

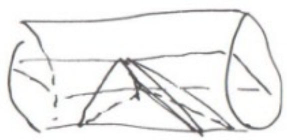
$(a-(-5+\sqrt{18}))|0$

$-9\ -8\ -7\ -6\ \ -4\ -3\ -2\ -1$

Черновик

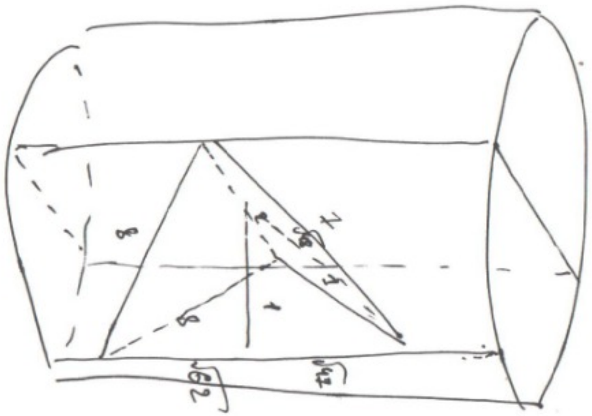






$\sqrt{62} + \sqrt{47}$

$\sqrt{62} - \sqrt{47}$



21101145 (U190039 M1301644)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101145**

ID профиля: **190039**

Вариант 20

№4 | Чистовик

$\begin{cases} НОД(a;b;c)=10 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$ т.к НОД = 10, то каждое из чисел $\vdots$ 10, тогда поделим $a;b;c$ на 10, тогда

$\begin{cases} НОД(a;b;c)=1 \\ НОК(a;b;c)=2^{16}\cdot 5^{15} \end{cases}$ => теперь числа a, b, c являются взаимнопростыми, то есть нет такого числа, кроме 1, ~~кот котор~~ который являлся бы делителем a, b и c. В таком случае $a=2^{x_1}\cdot 5^{y_1}$ $b=2^{x_2}\cdot 5^{y_2}$ $c=2^{x_3}\cdot 5^{y_3}$

~~Тогда~~ Пусть число a состоит только из 2, тогда число b может состоять из 5 или из 5 и 2, в зависимости от этого, число c состоит или из 5 и 2, или из 5, то есть из 3 чисел, 2 из них являются степенями 2 или 5, а последнее ~~вид~~ имеет вид $2^k\cdot 5^n$. Рассмотрим эти числа

2^{x_1}, $2^{x_2}\cdot 5^{y_1}$, 5^{y_2} т.к $НОК(a;b;c)=2^{16}\cdot 5^{15}$ =>

=> либо $y_1=15$, либо $y_2=15$, либо $y_1=y_2=15$, тоже самое и с x: либо $x_1=16$, либо $x_2=16$, либо $x_1=x_2=16$

В любом случае одно из x, и одно из y - фиксированное эти x и y можно выбрать 4 способами (x_1y_1 x_2y_1 x_1y_2 x_2y_2).

~~Теперь~~ 21101145 (U190039 M1301645) ~~а~~ числа a, b, c можно выбрать 6 способами (в зависимости от вида то есть $a=2^{x_1}$ $b=2^{x_2}\cdot 5^{y_1}$ $c=5^{y_2}$

№4 продолжение | Чистовик

и всех таких вариантов с перестановкой a, b и c

6. Остались две не фиксированные степени они могут принимать любые значения, не превосходящие 16 и 15 для 2 и 5 соответственно. => всего вариантов:

~~4·6·15·16 = 5760 (4 - кол-во выборов фикс~~

$4 \cdot 6 \cdot 16 \cdot 17 = 6528$ (4 - кол-во вариантов выбрать фикс. степень

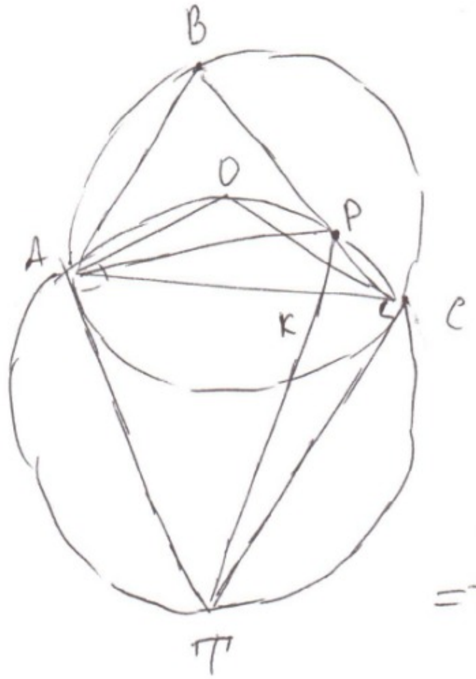
6 - перестановки a, b и c

16 - кол-во степени в нефикс. степени для 5

17 - кол-во ~~...~~ степеней в нефиксир. степени для 2)

Ответ: 6525

21101145 (U190039 M1301645)



Т.к AT и CT касательные

$\Rightarrow \angle OAT$ и $\angle OCT = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow AOCT$ – вписанный четырех.уг.

$\Rightarrow T$ – лежит на окружности

Пусть угол $ABC = \alpha \Rightarrow \angle ACT = \alpha$

т.к $\angle ACT$ – угол между хордой и касательной $\Rightarrow$ $\angle ACT = \alpha$

$\Rightarrow \angle APT = \alpha$ т.к опирается на дугу AT

$\Rightarrow$ т.к $\angle CAT = \alpha$ (т.к $\angle CAT$ – угол между касат и хордой) то и $\angle CPT = \alpha$ (т.к опирается на дугу CT) $\Rightarrow$

$\angle CPT = \alpha$ и $\angle CBA = \alpha \Rightarrow AB \parallel PT \Rightarrow \frac{KC}{PC} = \frac{BC}{AC}$

Т.к $\frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{10}{8} \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{5}{4}$ ~~$\frac{S_{ABC}}{S_{CPA}} = \frac{CP}{CB} = \frac{4}{9}$~~

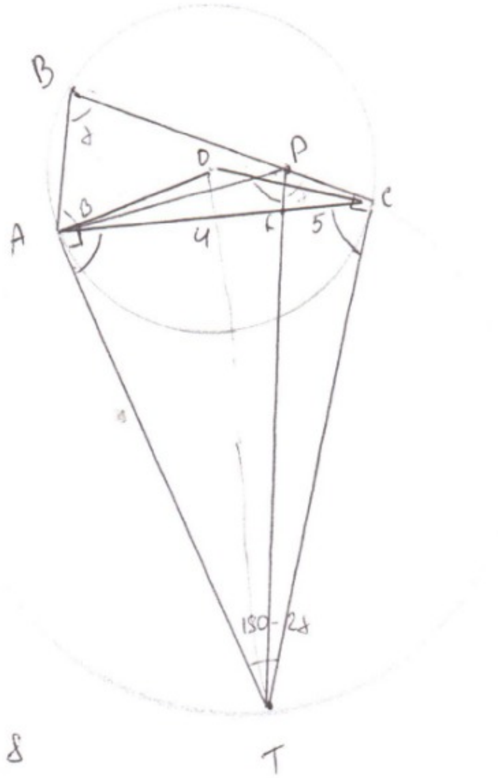
~~$S_{ABC} = \frac{9}{5} S_{CPA} = \frac{9}{5}(S_{APK} + S_{PKC}) = \frac{9 \cdot 18}{5}$~~

$\Rightarrow$ т.к $AB \parallel PK \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle PKC$ $k = \frac{KC}{AC} = \frac{4}{9} \Rightarrow$

$S_{ABC} = S_{CPK} : \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{8 \cdot 81}{16} = 40{,}5$

Ответ: $S_{ABC} = 40{,}5$

Черновик



3840
2688
6528

5 · 72 · 16

10 · 72 · 8

5 2
384
17
2688

24 · 15 · 16

32 · 4

560
5760

~~42~~373·

128 · 3

21101145 (U190039 M1301645)

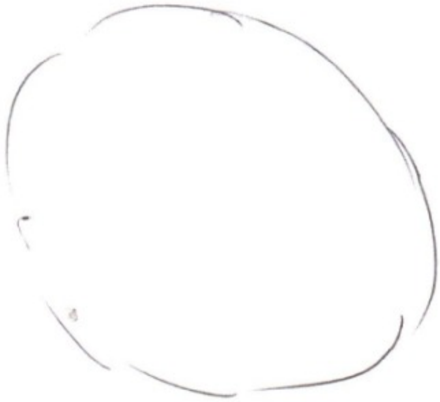
24 · 16

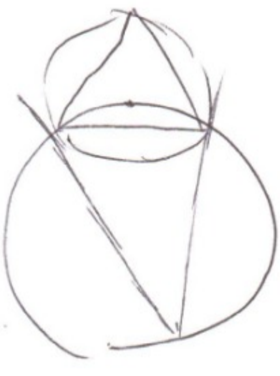
5 · 9 · 128

300 600 24

3 · 5 · 16

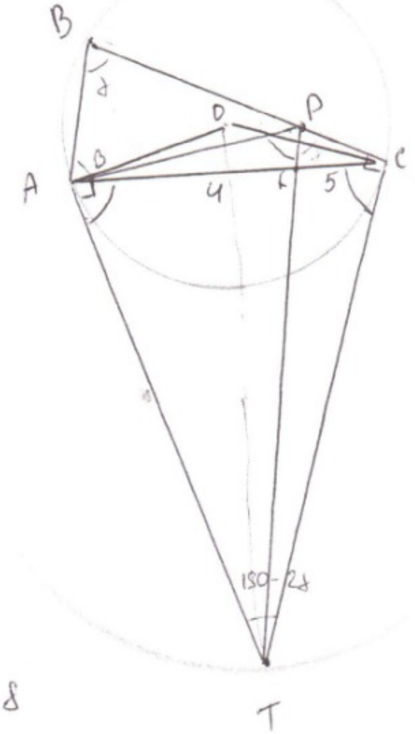
Черновик





21101145 (U190039 M1301645)

Черновик



3840
2688
6528

5 · 72 · 16

10 · 72 · 8

24 · 15 · 16

5 2
384
17
2688

32 · 4

560
5760

~~4233~~3 ·

128 · 3

24 · 16
21101145 (U190039 M1301645)
3 · 5 · 16

5 · 9 · 128

300 600 24

Черновик

$2\log_{2x-8}(x-4)+1$

$\log_{2x-8}(x^2-8x+16)(2x-8)$

$$\frac{2\log_2(x-4)}{\log_2 x-4+1}+1 = 2\log_2(x-4)+\log_2(x-4)$$

$\log_{2x-8}(x-4)^3\cdot 2$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)+1 = \log_{2x-8}(x-4)^2 + 1 = \log_{2x-8}(x-4)^3\cdot 2$

$\log_{2x-8}(x-4)^3\cdot 2 = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$\log_{2x-8}(x-4)^3 + \log_{2x-8}(2) = \log_{(x-4)}$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26) = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) - 1$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26) = \log_{(5x-26)}\left(\frac{2x-8}{5x-26}\right)^2$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26)+1$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26)(x-4)^2 = \log_{\sqrt{5x-26}} 2x-8$

$\log_{a^2} ba^2 = \log_{\sqrt{b}} 2a$

$\log_{a^2} ba^2 =$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$

Черновик

$\log_{2x-8}(x-4)^2 = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$\frac{1}{\log_{(x-4)^2} 2x-8} = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$1 - \log_{(x-4)^2}(5x-26)\log_{(x-4)^2}(2x-8) = 0$

$1 - \log_{(x-4)^2}(2x-8)\left(\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) - 1\right)$

$1 - \log$

$\frac{\log_{5x-26} x-4}{\log_{5x-26}\sqrt{2x-8}} = \frac{1}{\log_{5x-26}(x-4)^2}$ $\quad \frac{1}{\log_{5x-26}\sqrt{2x-8}} = \frac{1}{2\log^2_{5x-26} x-4}$

$\log$ $\quad \log$ $\quad \frac{4\log_{5x-26} x-4}{\log_{\sqrt{5x-26}} 2x-8} = \frac{1}{\log_{5x-26}(x-4)^2}$

$\log_{5x-26}\sqrt{2x-8} = 2\log^2_{5x-26} x-4$

21101145 (U190039 M1301645)

Черновик

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26) \\ \log_{(x-4)^2} + 1 = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) \end{cases}$$

~~2log~~

21101145 (U190039 M1301645)

$$4\log_{2x-8}(x-4) = \log_{x-4}(5x-26)$$

$$\log_{(x-4)^2}(5x-26) + \log_{(x-4)^2}(x-4)^2 = \log$$

$\cancel{\log_{\sqrt{a}} b = \log_{b^2} c}$

$\cancel{\log_{\sqrt{c}} a =}$

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2a}} a = \log_{a^2} b \\ \log_{\sqrt{b}} 2a = \log_{a^2} b + 1 \end{cases}$$

$\cancel{2\log_{2a} a = 1}$

$\cancel{4\log_{2a} a = \log_a b}$

$\cancel{\frac{4}{\log_a 2a} = \log_a b}$

$\log_{\sqrt{2a}} a + 1 = \log_{\sqrt{b}} 2a$

$\log_{2a} 2a^3 = \log_5$

Черновик

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$x-4>0$

$2x-8>0$

$5x-26>0$

$\cancel{\log}\ \cancel{2\log_{2x-8}(x-4)}$

$\frac{\ln(x-4)}{\ln\sqrt{2x-8}} = \frac{\ln 5x-26}{\ln(x-4)^2}$

$\frac{\log_2 x-4}{\log_2\sqrt{2x-8}} = \frac{\log_2 5x-26}{\log_2(x-4)^2}$

$\ln(x-4)\cdot\ln(x-4)^2 = \ln 5x-26\cdot\ln\sqrt{2x-8}$

$4\log_2^2 x-4 = \log_2 5x-26\cdot\log_2 2\cdot(x-4)$

$4\ln^2(x-4) = \ln 5x-26\cdot\ln\sqrt{2x-8}$

$4\log_2^2 x-4 = \log_2 5x-26(1+$

$\log_a b = \log_{b^2} c$

$\frac{1}{\log_b a} = \frac{1}{2}\log_b c$

$\frac{2}{\log_b a} = \log_b c$

$\cancel{\frac{1}{2}}\log$

$2\log_{2x-8}(x-4)$

$\log_b c\cdot\log_b a = 2$

$2\frac{\log_2 x-4}{\log_2 2x-8} = \frac{2\log_2 x-4}{\log_2 x-4+1}$

$\frac{2\log_2 x-4}{\log_2 x-4+1} = \frac{\log_2 5x-26}{2\log_2 x-4}$

Черновик

$$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)+1=\log_{(x-4)^2}(5x-26)$$

$$\cancel{\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)} \quad 2\log_{2x-8}(x-4)+1$$

$$\frac{2\log_2 x-4}{\log_2 x-4+1}+1 \qquad \frac{3\log_2 x-4 \ +1}{\log_2 x-4+1}$$

$$\frac{2\log_2 x-4+\log_2 x-4+1}{\log_2 x-4+1}$$

Черновик

НОД$(a;b;c)=10$

НОК$(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16}$

$\cancel{a=2^{k_1}5^{k_1}}$ $a=2^{x_1}5^{y_1}$

$b=2^{x_2}\cdot 5^{y_2}$

$c=2^{x_3}\cdot 5^{y_3}$

$a \quad b \quad c$

a		b		c	
2	5	2	5	2	5

9

$2-2 \quad 2-5$

$2^{16}\ 5^{15}$

$2^{17}\ 5$

$2\ 5^{18}$

$2\cdot 5^{18}$

$\frac{2^{16}}{1} \quad \frac{16\cdot 15}{1} \quad \frac{5^{15}}{1}$

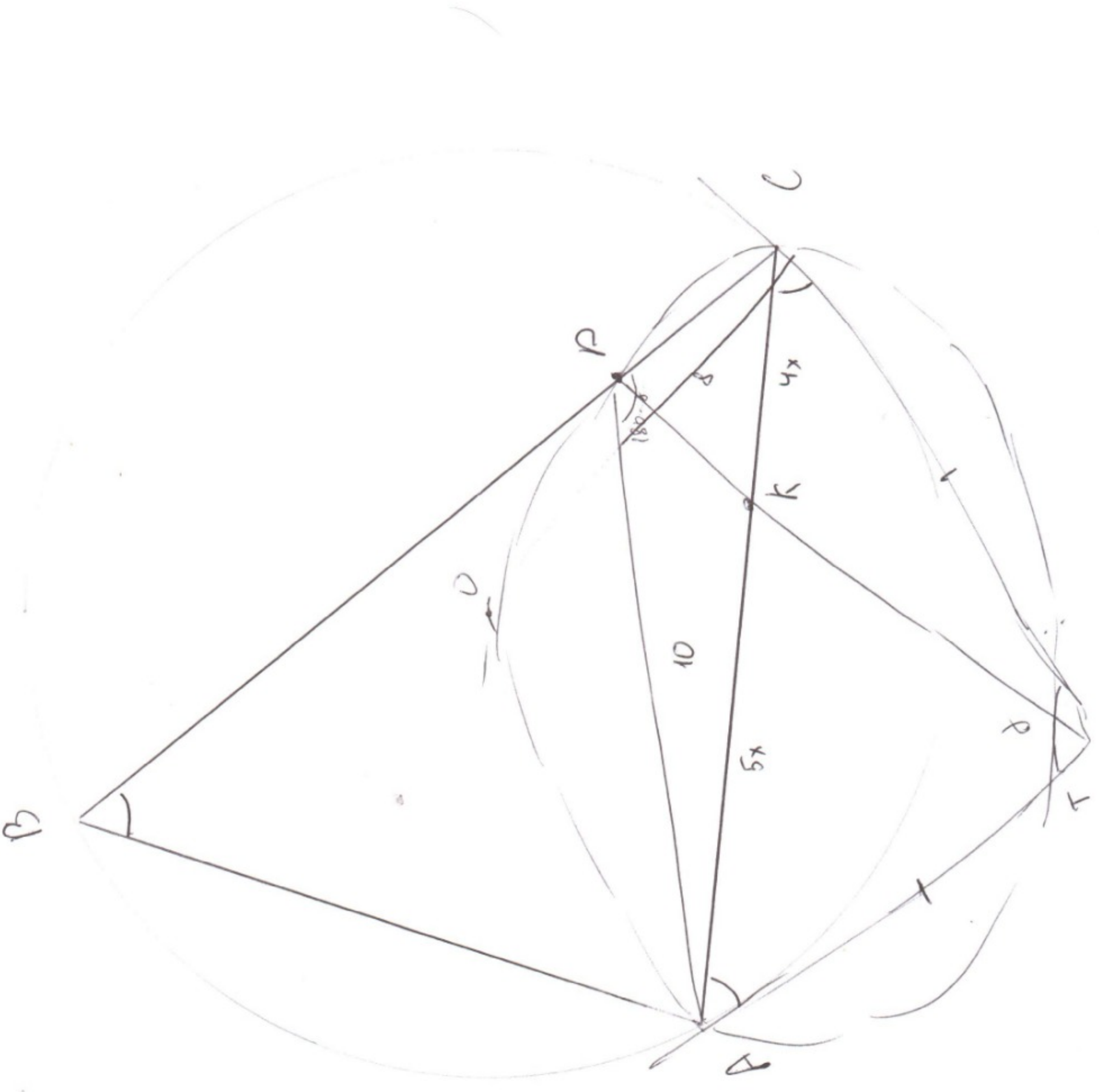
$2^{16} \quad 2^{15}5^{15} \quad \cancel{x}$

25

$2^{16} \quad 2^x\cdot 5^y \quad 5^{15}$

$4\cdot 6\cdot 16\cdot 15$

Черновик



21101145 (U190039 M1301645)