Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101114**

ID профиля: **129528**

Вариант 20

Чистовик

стр. 1

#1 $5a + 10b = 5$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_1 = a \\ a_2 - a_1 = b \end{array}}$$

$(a+5b)(a+10b) > 5+15$

$(a+7b)(a+8b) < 5+39$ ← НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ЧЕРЕЗ a и b С УЧЁТОМ ТОГО ЧТО $a_i = a + b\cdot(i-1)$ и $0+1+2+3+4=10$

$\Updownarrow$

$a^2 + 15ab + 50b^2 > 5a + 10b + 15$

$a^2 + 15ab + 56b^2 < 5a + 10b + 39$

$\Updownarrow$

$6b^2 < 24$

$\Updownarrow$

$b^2 < 4$

прогрессия возрастающая из целых чисел, то $b > 0$ и b - целое, то b - натуральное, то поскольку $b^2 < 4 \Rightarrow b < 2 \Rightarrow b = 1$, то

$(a+5)(a+10) > 5a + 25$

$(a+7)(a+8) < 5a + 49$

$\Updownarrow$

$a^2 + 15a + 50 > 5a + 25$

$a^2 + 15a + 56 < 5a + 49$

$\Updownarrow$

$a^2 + 10a + 25 > 0$

$a^2 + 10a + 7 < 0$

Чистовик

стр. 2

$a^2+10a+25=(a+5)^2$, то при $a \neq -5$

$a^2+10a+25>0$

$a^2+10a+7<0 \Leftrightarrow$ а лежит между корнями $x^2+10x+7$

ищем через дискриминант:

$$\frac{-10 \pm \sqrt{100-28}}{2} = \frac{-10 \pm 6\sqrt{2}}{2} = -5 \pm 3\sqrt{2}$$

$(3\sqrt{2})^2 = 18$ $\quad 25>18>16$, то $5>3\sqrt{2}>4$,

то $0>a>-10$, то $a \in (-10;-5) \cup (-5;0)$,

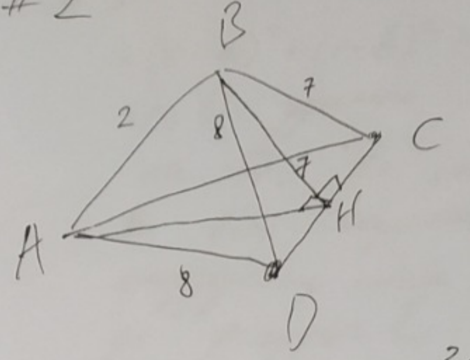
то $a \in \{-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1\}$

Ответ: а, может принимать значения $-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1$.

21101114 (U129528 M1304430)

Чистовик

#2



1. $\triangle BCD = \triangle ACD$ по трём сторонам, то высоты из A и B бьют CD в одном и том же отношении, то точка H — общее основание высот из A и B на CD

2. $(ABH) \perp CD$, ведь CD — перпендикуляр к BH и AH, то $AH \parallel$ плоскости основания цилиндра.

3. AB внутри цилиндра и $\parallel$ основанию, то $\frac{AB}{2} \leq R$ (R — радиус цилиндра), то $R \geq 1$.

4. Окружность ABH равна окружности основания, ведь ABH лежат на цилиндре и $ABH \parallel$ основанию, то факт AB — диаметр $\Longleftrightarrow R = 1$, то минимум достигается тогда и только тогда когда AB — диаметр окр. ABH, т. е. $\angle BHA = 90^\circ$

5. $\triangle BDC = \triangle ADC \Rightarrow BH = AH$, то при $\angle AHB = 90^\circ$ $\triangle ABH$ — прямоугольный равнобедренный, то $BH = AH = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

6. посчитаем CD: $CD = CH + HC$
по т. пифагора $DH = \sqrt{8^2 - \sqrt{2}^2} = \sqrt{62}$; $CH = \sqrt{7^2 - \sqrt{2}^2} = \sqrt{47}$, то $CD = \sqrt{47} + \sqrt{62}$

Ответ: $\sqrt{47} + \sqrt{62}$.

#3

- $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \iff$ точка (x, y) удалена от (a, b) не более чем на $\sqrt{13}$. То давайте построим фигуру из всех возможных пар (a, b) а потом фигуру из точек, расстояние от которых до фигуры L (та что из всех возможных (a,b)) $\le \sqrt{13}$, эта фигура будет равна M

- строим фигуру из н-ва $a^2+b^2 \le \min(-4a-6b, 13)$.

- $a^2+b^2 \le 13 \iff$ (a, b) лежит внутри окружности радиуса $\sqrt{13}$, с центром в начале координат.

- $a^2+b^2 \le \min(-4a-6b, 13) \iff \begin{cases} a^2+b^2 \le -4a-6b \\ a^2+b^2 \le 13 \end{cases}$

- $a^2+b^2 \le -4a-6b \iff a(a+4)+b(b+6) \le 0 \iff$

$\iff ((a+2)-2)((a+2)+2) + ((b+3)-3)((b+3)+3) \le 0 \iff$

$\iff (a+2)^2-4+(b+3)^2-9 \le 0 \iff (a+2)^2+(b+3)^2 \le 13 \iff$

$\iff$ (a,b) лежит внутри окружности радиуса $\sqrt{13}$ с центром в $(-2; -3)$

- расстояние между $(-2; -3)$ и $(0; 0)$ $= \sqrt{(-2)^2+(-3)^2} = \sqrt{13}$, то L - пересечение двух окружностей, радиуса $\sqrt{13}$, где центры одной из них лежит на другой.

Чистовик стр. 5

• Рассмотрим точки $\in M$, но не $\in L$: Заметим что в левой половине ближайшая к произвольно выбранной точке X точка, принадлежащая ~~фигуре~~ L и лежит на дуге CAD.

• Внутри $\angle CBD$ эта точка лежит на BX, то все точки внутри $\angle CBD$, принадлежащие M — просто точки внутри окружности радиуса $\sqrt{13} + \sqrt{13} = 2\sqrt{13}$

• заметим, что для произв. X внутри части плоскости, отсекаемой лучами BC и AC ближайшая к Y точка, принадлежащая L — C, ведь угол между $\overline{BC}$ и $\overline{AC}$ — острый ($60°$ по построению), ведь $CB=AB$ и $CA=AB$), то внутри этой части плоскости M — сектор окружности радиуса $\sqrt{13}$ с центром в C

• то из симметрии S_M = (площадь сектора, радиуса $2\sqrt{13}$ и углом раствора $= \angle CBD$) +

+ (такой-же, с углом раствора $\angle CAD = \angle CBD$) +

+ (площадь сектора с углом раствора $60°$ и радиусом $\sqrt{13}$)$\cdot 2$ $- S_{ACBD} =$

за счет частей как в предыдущем пункте

$$= 2 \cdot \pi \cdot (2\sqrt{13})^2 \cdot \frac{120°}{360°} + 2 \cdot \pi \cdot (\sqrt{13})^2 \cdot \frac{60°}{360°} - 2 \cdot \frac{\sqrt{13}^2 \cdot \sqrt{3}/2}{2} =$$

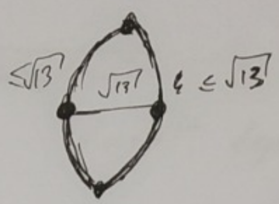
площадь пр-ного Δ со стороной $\sqrt{13}$

$$\boxed{\angle CBD = \angle CBA + \angle ABD = 2 \cdot 60° = 120°}$$

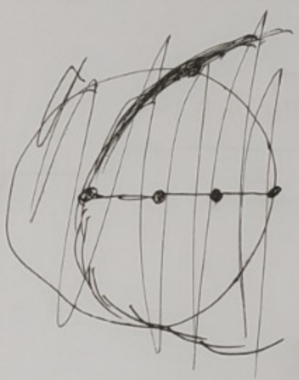
$$= \frac{8}{3}\pi \cdot 13 + \frac{1}{3}\pi \cdot 13 - \frac{13\sqrt{3}}{2} = 39\pi - \frac{13\sqrt{3}}{2}$$

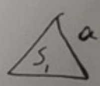
Ответ: $S_M = 39\pi - \frac{13\sqrt{3}}{2}$

Черновик

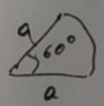


$\sqrt{26}$





$S_1 = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$



$S_2 = a^2 \cdot \pi/3$

$\frac{2\pi}{3} \cdot 26 \cdot 2 + \frac{\pi}{3} \cdot 2 \cdot 13 -$

$- 13\sqrt{3} =$

$=$

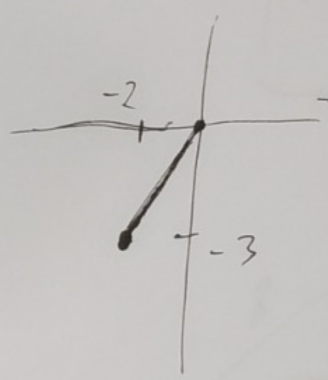
Черновик

$a^2+10a+25=(a+5)^2$

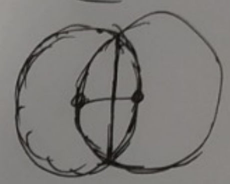
~~$a-10 \pm \sqrt{100}$~~

$(a+5)^2$ верно для любого $a \neq 5$

$a^2+10a+7=0$



$\frac{-10 \pm \sqrt{100-28}}{2} = \frac{-10 \pm 6\sqrt{2}}{2}$



$-5 \pm 3\sqrt{2}$

$b(b+6)+a(a+4) \le 0$

$5 > 3\sqrt{2} > 4$

$b(b+6)+a(a+4) \le 0$

$-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1;$

$(b+3)^2-9+$

$+(a+2)^2-4 \le 0$

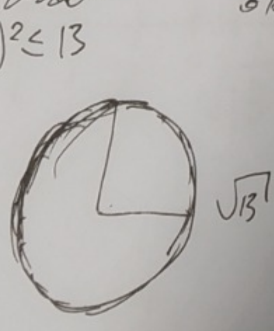
$\Updownarrow$

$(b+3)^2+(a+2)^2 \le 13$

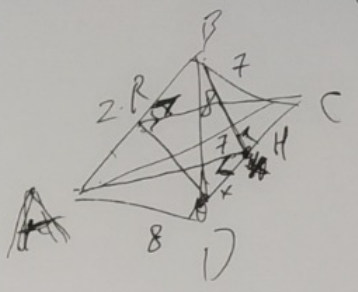
~~$(1; 2;)$~~ $3;$

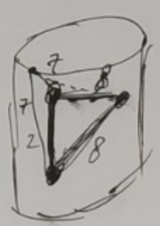
окружности радиуса $\sqrt{13}$ вокруг

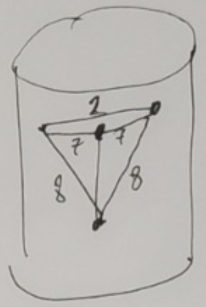
всех $\exists$ $(a; b)$



Черновик





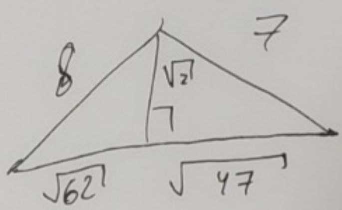


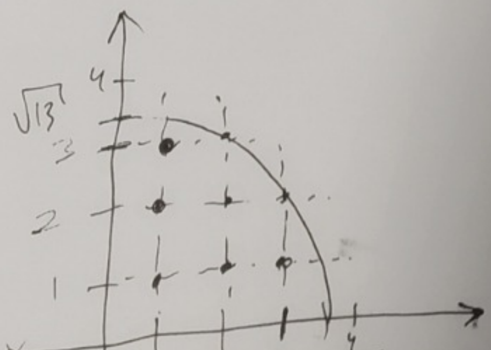
$R \geq 2$ $\angle BHA$

$R = 2$, что $\angle CBD = 90^\circ$

пот. Пифагора

$BH = AH$, то $BH = \sqrt{2}$





Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101114**

ID профиля: **129528**

Вариант 20

Чистовик ~~[illegible]~~

#4

· Заметим что каждое из этих чисел кратно десяти и имеет вид $2^i \cdot 5^j$, где i и j натуральные
· Поскольку и 2 и 5 в НОД входят в первой степени, то либо среди a, b, c есть 10, либо два из них соотв. представляют из себя числа вида $2 \cdot 5^n$ и $5 \cdot 2^m$, где n и m - натуральные, ≥ 1
· Есть число где 2 имеет 17 степень
· Есть число где 5 имеет 16 степень
· Чисел ~~больше~~ с бо́льшими степенями 2 и 5 нет

~~· Если среди чисел есть 10,~~
~~то ~~эт~~ тройка может быть двух типов:~~
~~· есть число $2^{17} \cdot 5^{16}$, то:~~
~~(I) $10;\ 2^{17} \cdot 5^{16};\ 2^m 5^n$, где $m \in [1;17]$, $n \in [1;16]$~~
~~· нет числа $2^{17} \cdot 5^{16}$:~~
~~(II) $10;\ 2^{17} \cdot 5^m;\ 2^n \cdot 5^{16}$, где $m \in [1;15]$, $n \in [1;16]$~~
~~Чисел I-ого типа всего $17 \cdot 16$, а второго - $16 \cdot 15$~~

· Заметим что распределение степеней двоек и пятёрок по этим трём числам независимо посчитаем отдельно способы расставить степени двоек и способы ... пятёрок и перемножим, ведь к любому можно выбрать любой

· Обозначим за n макс. возможную степень (для 2-ек - 17, для 5-ок - 16)

· Есть степень 1 и степень n, если третья степень не один и не n, то выбрать её $n-2$ способов, ~~а упорядочит~~ а порядок степеней выбрать - 6 способов, иначе выбрать её - 2 способа, а порядок - 3, т.е. всего $6(n-1)$ способов выбора степеней

21101114 (U129528 M1304431)

Чистовик

стр. 2

По способов выбрать расстановки степеней и три двойками и три пятерками

$6^2 \cdot (17-1)(16-1) = 36 \cdot 16 \cdot 15 =$

$= 8640$

ОТВЕТ: ТАКИХ ЧИСЕЛ 8640

~~#3~~

~~Пусть равны логарифмы равны 2a, тогда логарифмы равны 2a; 2a; 2a+1, но $\log_m n^2 = 2\log_m n$, что заменим на их корни и числа в log из условия, получим a; a; a + 1/2, заметим что числа~~

#5

$\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)\cdot\log_{(x-4)^2}(5x-26)\cdot\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) =$

$= \log_{(2x-8)}(x-4)^2\cdot\log_{(x-4)^2}(5x-26)\log_{(5x-26)}(2x-8) = 1$

обозначим равные ~~log~~ их a, то

$a^3 + a^2 - 2 = 0$

$(a-1)(a^2+2a+2) = 0$

↑ дискриминант < 0

$a = 1$, то ~~два из этих~~ log чисел ~~...~~ имеют значения

1, 1 и 2

~~Черновик~~ Черновик

~~Чистовик~~

$$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)\cdot\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) =$$

$$= \log_{\sqrt{5x-26}}(x-4) = \log_{(5x-26)}(x-4)^2 = \frac{1}{\log_{(x-4)^2}(5x-26)}$$

то

$$a^2(a+1) = 1$$

$$a^3+a^2-1=0$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{1+5\sqrt{5}+3\sqrt{5}+15}{8} = 2+\sqrt{5}$$

$$\frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} = 1,5+0,5\sqrt{5}$$

$$-\frac{2\sqrt{}}{4} = \frac{n+3\sqrt{}}{8}$$

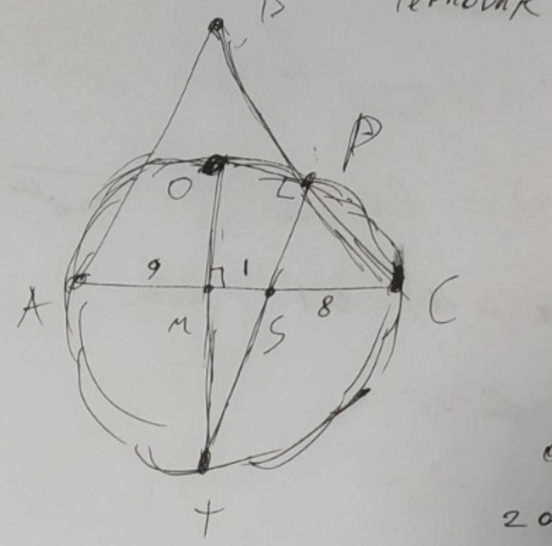
$$-16 = 4u+12$$

$$u = 1$$

$$4n = -$$

21101114 (U129528 M1304431)

ЧЕРНОВИК



$2a \quad 2a \quad 2a+1$

$a^2 (a + 1/2) = 1$

$a^3 + \frac{a^2}{2} = 1$

$2a^3+a^2-1=0$

$AC = 4R\cdot\sin(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}) = \frac{4\sqrt{3}}{3}R$

$PC \cdot PA \cdot \sin$

$a \quad a \quad 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$ $\cancel{\log_{(x-1)^2}}$

$\frac{a^4}{2}=1$

$a=\sqrt[4]{2}$

$\log_a b^2 \quad \log_b c^2 \quad \log_c a^2$

$\parallel$

$2\log_a b$

$2\log_a b \quad 2\log_b c \quad 2\log_c a$

$\log_a b = \log_b c$

$(\log_a b)^2 = \log_c a$

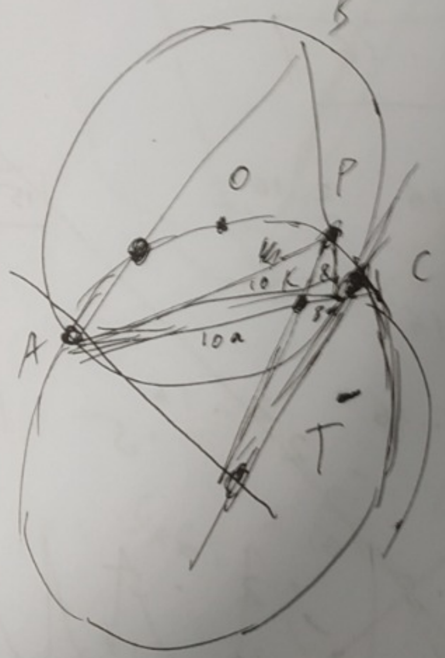
Черновик

0 1 2

2...n-1 n

$$\begin{array}{r} \times\ 36 \\ 16 \\ \hline 36 \\ 360 \\ 180 \\ 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 576 \\ 15 \\ \hline 5760 \\ +\ 2880 \\ 8640 \end{array}$$



Черновик

$10; 2^{17}\cdot 5^{(0;17)}; 5^{16}\cdot 2^{(0;16)}$

16 17

16·17

$10; 2^{17}\cdot 5^{16}; 2$

$10; 2^{17}\cdot 5^{1,2\ldots 15}; 5^{16}\cdot 2^{1,2\ldots 16}$

$\boxed{15\cdot 16}$

$10; 2^{17}\cdot 5^{16}; 2^{1,2\ldots 17}\cdot 5^{1,2\ldots 16}$

$\boxed{17\cdot 16}$

$2\cdot 5^{2\ldots 15}; 2^{17}\cdot 5^{16}; 2\cdot 5^{2\ldots 16}$ $\boxed{15\cdot 14}$

15·16

$2\cdot 5^{16}; 2^{17}\cdot 5^{1\ldots 16}; 2^{2\ldots 16}\cdot 5$ $\boxed{15\cdot 16}$

$2\cdot 5^{2\ldots 15}; 2^{1\ldots 17}\cdot 5^{16}; 2^{17}\cdot 5$

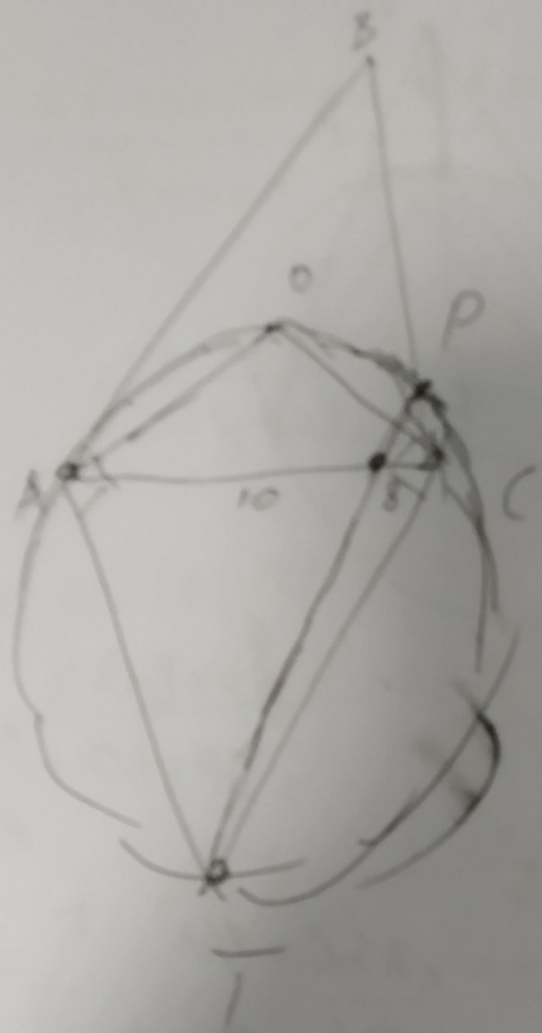
$2\cdot 5^{16}; 2^{2\ldots 17}\cdot 5; 2^{2\ldots 16}\cdot 2^{17}\cdot 5$ $\boxed{15\cdot 16}$

$2\cdot 5^{2\ldots 15}; 2^{1\ldots 17}\cdot 5^{16}; 2^{17}\cdot 5$ $\boxed{17\cdot 14}$

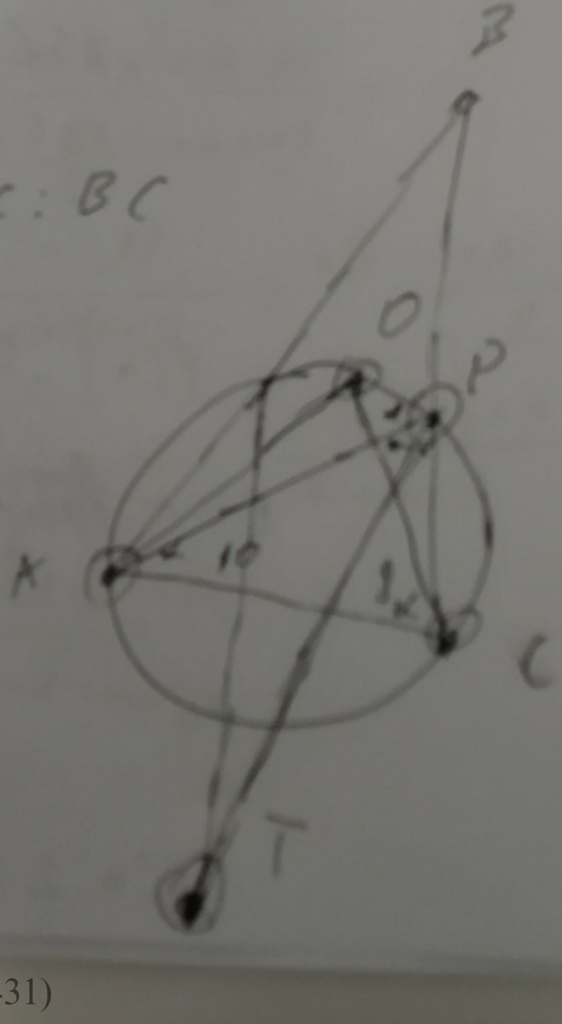
$2\cdot 5^{16}; 2^{1\ldots 17}\cdot 5^{1\ldots 16}; 5\cdot 2^{17}$

21101114 (U129528 M1304431)

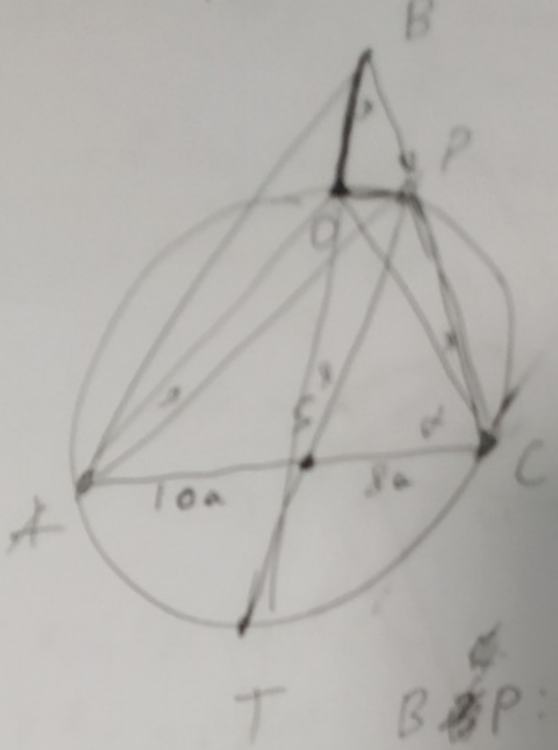
Черновик



$18 : S_{ABC} = PC : BC$



Чемовак



$B P : BC =$

$= BP : BO \cdot BO : BC =$

$18a^2$

$=$ $PO : CT$

$\angle ASC = 4\alpha$

$\frac{AOC}{2} = 90 - \alpha$

$90 + 3\alpha$

$(BC - PC_n) : OC$

$OC = \cancel{\ldots}$

$OC = 2R \sin\alpha$

$\cancel{PO} = \sin\beta$ $PO = 2R\sin\beta$

$PC = 2R\sin(\alpha - \beta)$

$BC = 2\,CO \sin\beta$

ЧЕРНОВИК

$(4R\sin\alpha\cos\beta - 2R\sin\alpha\cos\beta + 2R\cos\alpha\sin\beta)\,2R\sin\beta$

$$\frac{2R\sin(\alpha+\beta)\cdot 2R\sin\beta}{2R\sin\alpha\cdot 4R\sin\alpha\cos\beta} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin\beta}{2\sin^2\alpha\cos\beta}$$

$BP : BC = (BC - PC) : BC =$

$$= \frac{2R\sin(\alpha+\beta)}{4R\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha\sin\beta} =$$

$$= \frac{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha}{2}$$

$$PC : BC = \frac{2R\sin(\alpha-\beta)}{4R\sin\alpha\sin\beta} =$$

$\operatorname{ctg}\beta =$

$= \tan PT:PO$

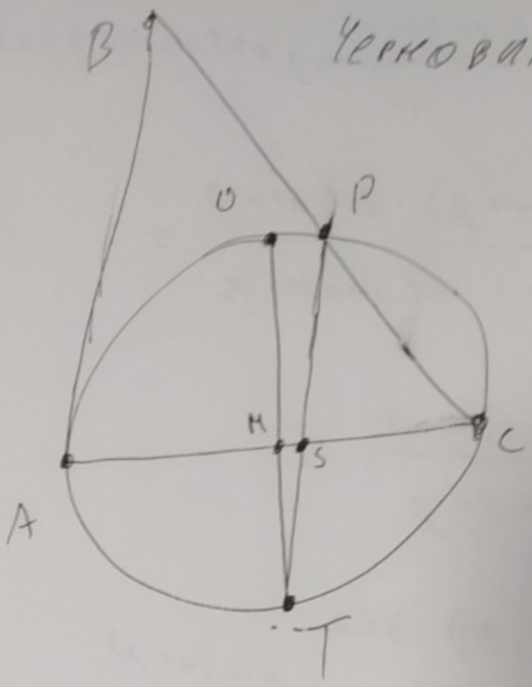
$\operatorname{ctg}\alpha = AT:AO$

$$= \frac{\sin(\alpha-\beta)}{2\sin(\alpha)\sin(\beta)} = \frac{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}{2}$$

$$\frac{36}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha} = \frac{36\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha-\beta} =$$

$$= \frac{36\ CO\cdot PO}{PC}$$

Черновик



$SC : SA = 8 : 10$

$TP^2 = \frac{320}{18^2} AC^2$

$TP = \frac{8\sqrt{5}}{18} AC$

$\frac{AP \cdot PC \cdot AC}{4R} = 18$

$PS \cdot ST =$

$\cancel{TO} \cdot ST$

$TM \cdot TP = TS \cdot MO$

$OM \cdot MT = AM^2$

$\frac{AC^2}{4} = OM \cdot MT$

$\frac{AC^2}{4} \cdot TP = TS \cdot MO$

$\frac{AC^2 \cdot TP^2}{4} = \frac{80}{18^2} AC^2$