Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101110**

ID профиля: **354503**

Вариант 20

Вариант 20

Чистовик

$$S=\frac{a_1+a_5}{2}\cdot 5, \quad a_5=a_1+4d \quad S=\frac{2a_1+4d}{2}\cdot 5=(a_1+2d)5$$

$$a_6=a_1+5d, \quad a_{11}=a_1+10d \Rightarrow (a_1+5d)(a_1+10d)>5(a_1+2d)+15$$

$$a_8=a_1+7d, \quad a_9=a_1+8d \Rightarrow (a_1+7d)(a_1+8d)<5(a_1+2d)+39$$

$$\begin{cases} a_1^2+15a_1d+50d^2>5a_1+10d+15 \\ a_1^2+15a_1d+56d^2<5a_1+10d+39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+15a_1d+50d^2>5a_1+10d+15 \\ -a_1^2-15a_1d-56d^2>-5a_1-10d-39 \end{cases} \Big| +$$

$$-6d^2>-24$$

$$d^2<4$$

$$|d|<2$$

Последовательность возрастающая $\Rightarrow$ $d>0$. Кроме того, последовательность целиком состоит из целых чисел $\Rightarrow$ и a_1, и d - целые (В силу замкнутости мн-ва целых чисел относ. сложения и незамкнутости нецелых относительно этой операции

~~Из $d<2$~~ Таким образом, $d=1$

$$\begin{cases} (a_1+5)(a_1+10)>5a_1+25 \\ (a_1+8)(a_1+7)<5a_1+49 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+15a_1+50>5a_1+25 \\ a_1^2+15a_1+56<5a_1+49 \end{cases}$$

1

Чистовик

$$\begin{cases} a_1^2+10a_1+25>0 \\ a_1^2+10a_1+7\le 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a_1+5)^2>0 \Rightarrow a_1\ne -5 \\ (a_1-(-5+3\sqrt{2}))(a_1-(-5-3\sqrt{2}))\le 0 \end{cases}$$

$-5-3\sqrt{2}$ $\quad$ $-5+3\sqrt{2}$

$$\left.\begin{matrix} -5-3\sqrt{2}\approx -9{,}2 \\ -5+3\sqrt{2}\approx -0{,}8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a_1\ge -9 \\ a_1\le -1 \\ a_1\ne -5 \end{cases} \Rightarrow a_1=\{-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1\}$$

Ответ: $\{-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1\}$

N.3.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2\le 13 \\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b,\,13) \end{cases}$$

I. $\begin{cases} -4a-6b<13 \\ a^2+b^2\le -4a-6b \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2<13$

II. $\begin{cases} -4a-6b>13 \\ a^2+b^2\le 13 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 4a+6b<-13 \\ a^2+b^2\le 13 \end{cases}$ $\Leftrightarrow a^2+b^2+4a+6b<0$

$(a+2)^2+(b+3)^2<13$

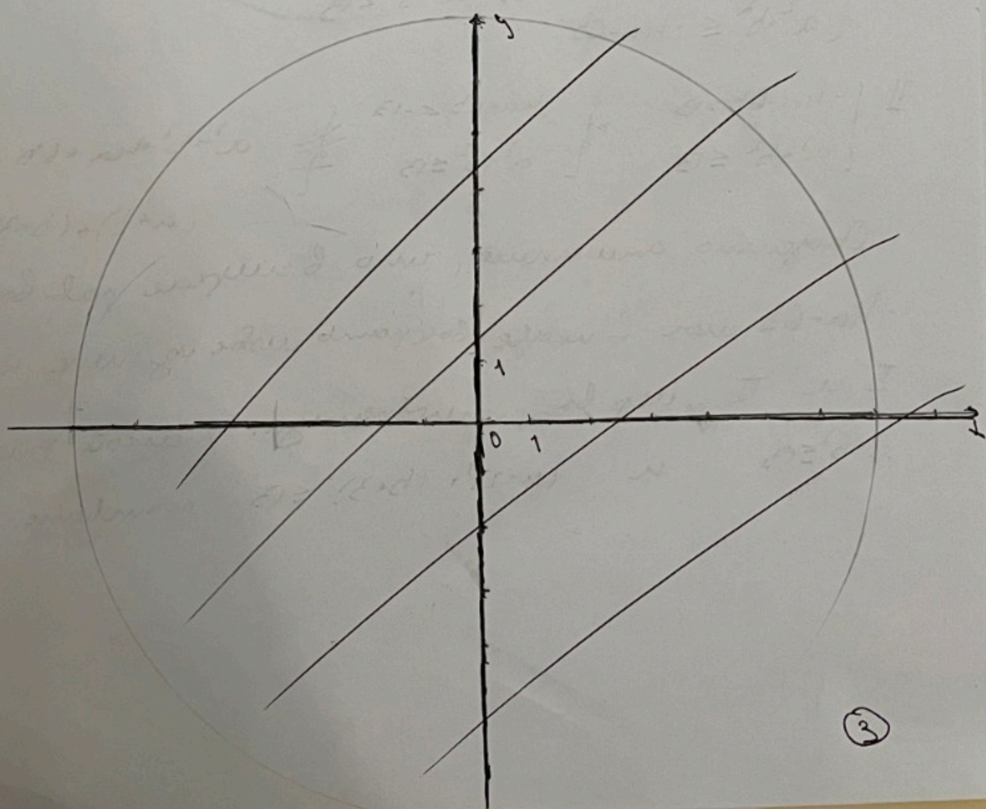
Отдельно отметим, что в случае рав-ва $-4a-6b$ мог в праве выбрать любое из них, тогда I и II нер-ва приобретут такой вид: $a^2+b^2\le 13$ и $(a+2)^2+(b+3)^2\le 13$ соответственно

Чистовик

Из этого следует, что a и b - точки окружности, таким образом, в нер-ве $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13$ коорд. центра фигуры, задаваемой этим нер-вом тоже изменяются по окружности.

Из I случая мы получим окружность, центр которой перемещается по ~~окр.~~ всем точкам круга с центром в нач. коорд. и радиусом $\sqrt{13}$. Таким образом, ~~самые наиболее удаленные точки~~ от центра

I случай дает ~~окружность в~~ = круг с центром в точке (0,0) и радиусом $2\sqrt{13}$. Проведя аналогичное рассуждение, можно понять, что II случай дает ~~окруж~~ круг с центром (-2;-3) и радиусом $2\sqrt{13}$. Изобразим это на плоскости:

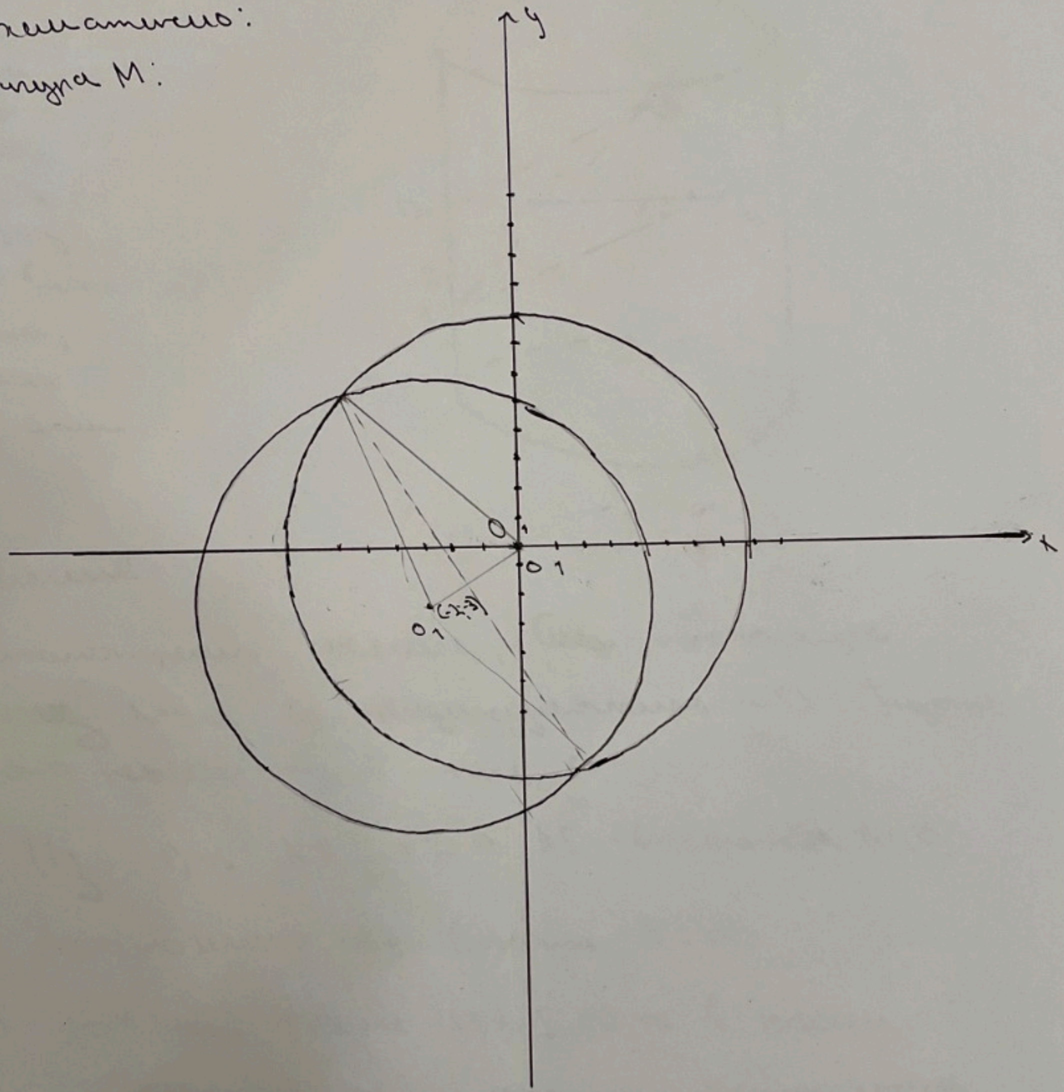


Иштович

Иштович

Схематично:

Фигура М:



Иминович

№8.

№2.

Дано

ABCD - тетраэдр

AC=CB=7

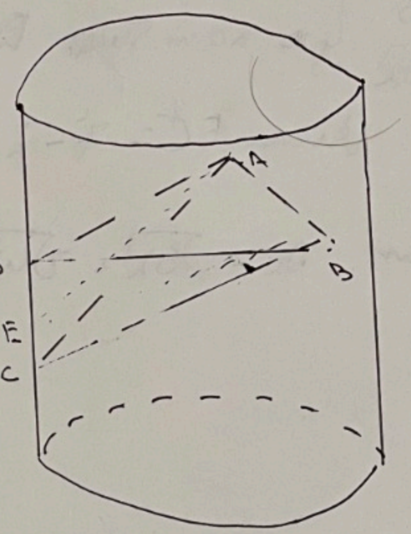
AD=DB=8

ABCD вписан в цилиндр,

CD ∥ оси

R цил. min

CD - ?



Решение:

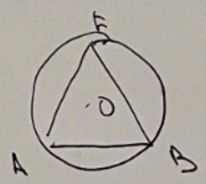
1) Рассмотрим сечение, proходящее через AB и перпендикулярное CD. Пусть оно пересек. CD в точке E

2) Из 1) ⇒ $AE \perp CD$ ⇒ AE - высота △ ACD

3) Аналогично BE - высота BCD

4) CD ∥ оси; сечение $AEB \perp CD$ ⇒ в сечении обязательно получится окружность, ~~равная по радиусу~~

5) По нер-ву △ AB ≤ диаметру окружности, а равно в том и только том случае, если ~~AB - диаметр~~ $\angle AEB = 90°$ ⇒ AB - диаметр ⇒ ч.т.д. и т.к. AD=DB ⇒ AE = BE ⇒ △ AEB - р/б



⇒ $AB = \sqrt{2}\, AE$

$2 = \sqrt{2}\, AE \Rightarrow AE = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

5

Ишамович

б) $\left.\begin{array}{l} AD = 8 \\ AE = \sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$ по т. Пиф $DE^2 = 64 - 2 = 62$; $DE = \sqrt{62}$

Анал. $EC^2 = 7^2 - 2 = 47 \Rightarrow EC = \sqrt{47}$

Ответ: $DC = \sqrt{62} + \sqrt{47}$

Черновик Черновик

$S_5 = \frac{a_1+a_5}{2}\cdot 5 = \frac{a_1+a_1+4d}{2}\cdot 5 = (a_1+2d\cdot 5)$

$a_6 = a_1+5d$

$a_{11} = a_1+10d$

$a_8 = a_1+7d$

$a_9 = a_1+8d$

① $(a_1+5d)(a_1+10d) > 5a_1+10d+15$

② $(a_1+7d)(a_1+8d) < 5a_1+10d+39$

① $a_1^2+15a_1d+50d^2 > 5a_1+10d+15$

$a_1^2+15a_1d+56d^2 < 5a_1+10d+35$

$-a_1^2-15a_1d-56d^2 > -5a_1-10d-39$

$-6d^2 > -24$

$d^2 < 4$

$d_1 > 0 \Rightarrow d_1 = a_1$ или $d_1 = 2$

~~$d = 100-78$~~

$\frac{D}{4} = 25-7 = 18 \Rightarrow \sqrt{\frac{D}{4}} = 3\sqrt{2}$

$\frac{-5\pm3\sqrt{2}}{}$ 4,2

$3\sqrt{2} = 3\cdot 1{,}4$

-9,2

⑦

Черновик

При $-4a-6b<13$

$a^2+b^2 \le -4a-6b$

$a^2+4a+b^2+6b \le 0$

$(a+2)^2+(b+3)^2-4-9 \le 13$

$(a+2)^2+(b+3)^2 \le 13$

$-4a-6b$

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le -4a-6b \\ -4a-6b<13 \end{cases}$$

$6b > -4a-13$

$b > -\frac{2}{3}a-\frac{13}{6}$

$a^2+b^2 \le 13$

$4a > -6b-13$

$a > -\frac{3}{2}b-\frac{13}{4}$

$a+2 > -\frac{3}{2}b-\frac{13}{4}+\frac{8}{4}$

$a+2 > -\frac{3}{2}b+\frac{5}{4}$

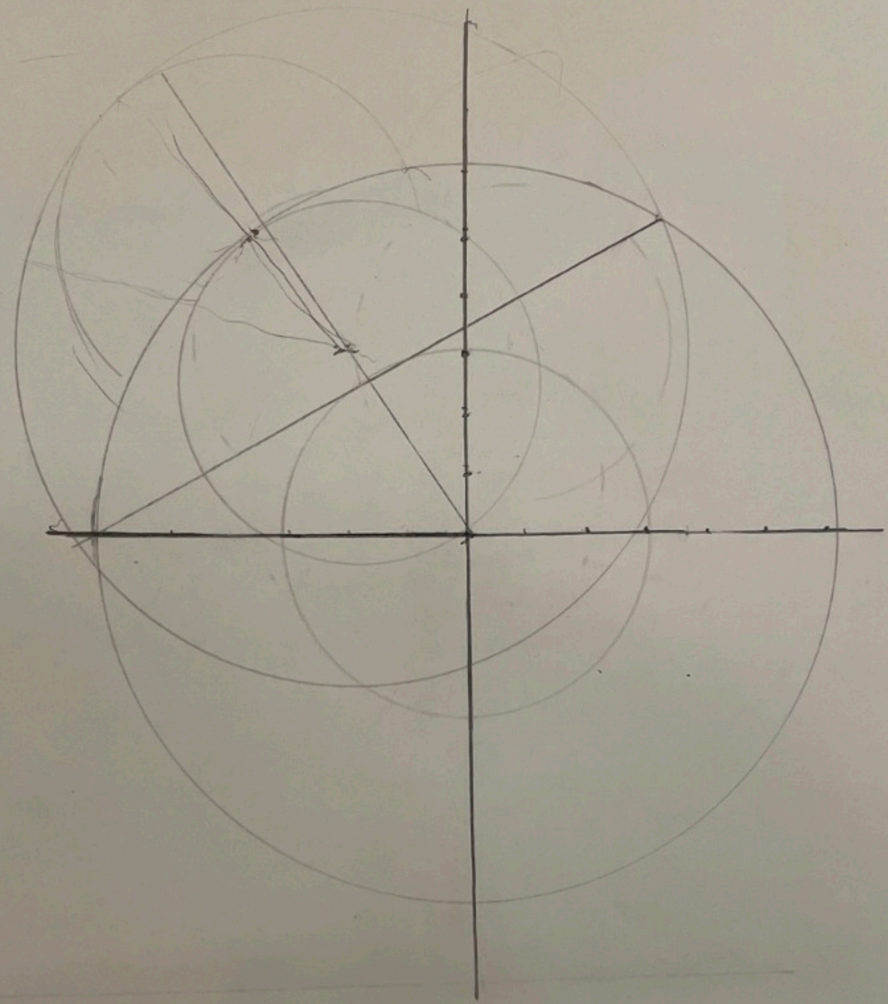
$a+2 > -\frac{3}{2}\left(-\frac{2}{3}a-\frac{13}{6}\right)-\frac{5}{4}$

$a+2 > a+\frac{13}{4}+\frac{5}{4}$

$a-1$

8

Черновик



$(x-c)^2+(y-$

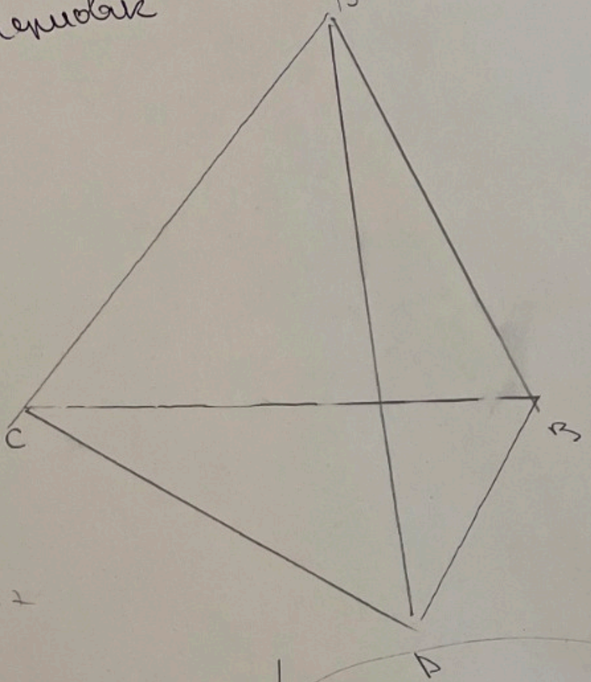
$(x+2)^2+(y+3)^2 = x^2+y^2$

$2+y+$ ~~$x+y$~~ $4x+6y=-13$

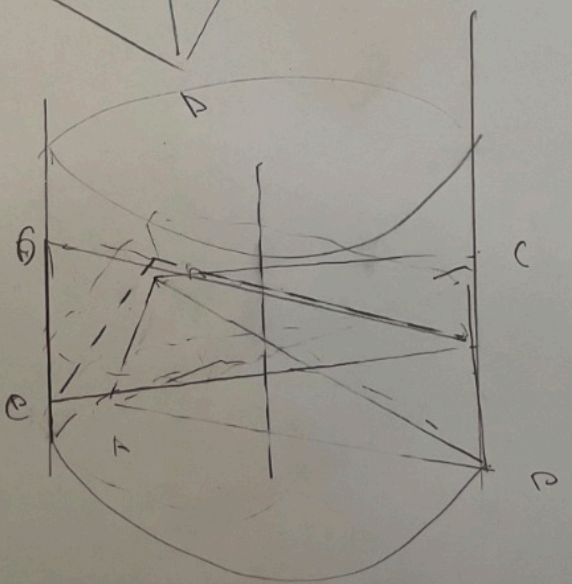
$-2\ ;-3$

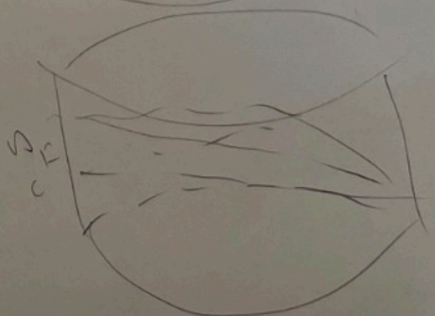
9

Черновик



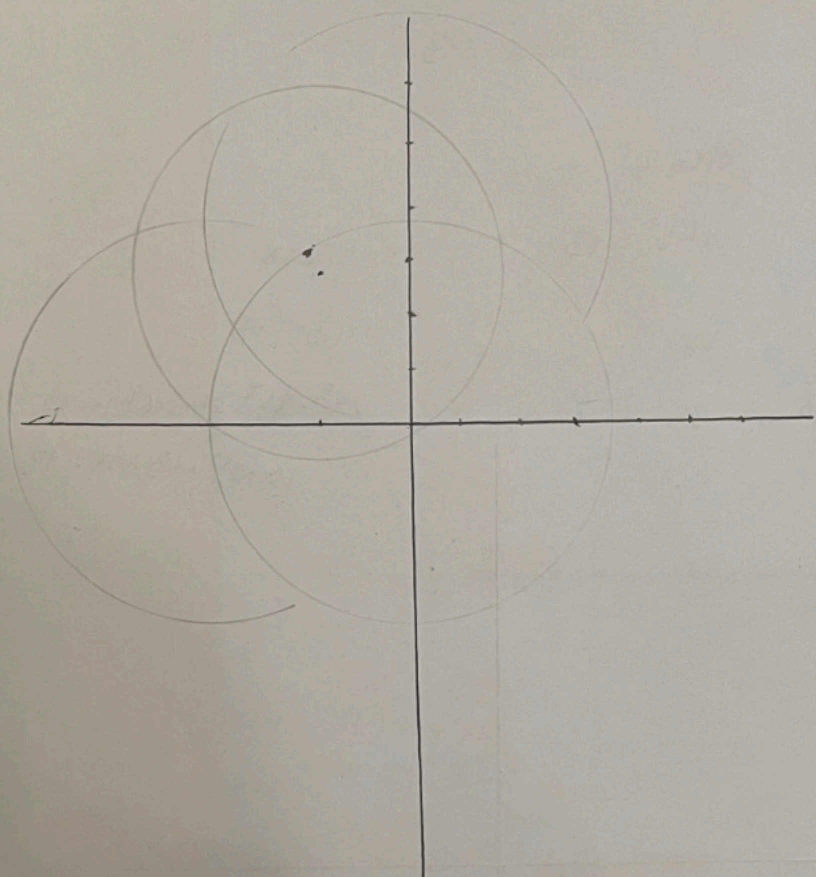
$2R = \frac{AB}{\sin\gamma}$





10

Черновик



П

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101110**

ID профиля: **354503**

Вариант 20

Миановски ; Вариант 20

№4.

НОД $(a;b;c)=10$ => есть хотя бы 1 число, в котором 2 присутствует только в 1 степени и хотя бы 1 число, где 5 тоже в 1 степени.

НОК $(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16}$ => аналогично есть хотя бы 1 число, где есть 2^{17} и 1 число, где есть 5^{16}

~~Возможны варианты~~.

Причем из вышесказанного следует, что в числах присутствуют только 2 и 5.

Т.е. если все группы из чего составлены a,b,c : $2^x\ 2^1\ 2^{17}$

$5^y\ 5^1\ 5^{16}$

~~Рассмотрим случаи, где $x\in[2;16]$~~
~~$y\in[2;15]$~~

~~Тогда 3 числа можно собрать 6 способами, а т.к. x и $y\in[2;16]$ и $y\in[2;15]$ => всего $6\cdot15\cdot14$ способов $=1260$. А т.к. тройки упорядоченные => еще необходимо умножить кол-во вариантов на~~

Тогда x и y ~~не более 17 и~~ $x\in[1;16]$ (иначе НОК был бы больше)

и $y\in[1;15]$ => всего

1

~~рассмотрим случай, где $x=1$, $y \in [2;15]$~~ Шинтовикс

$2^1 \quad 2^1 \quad 2^{17}$

$5^4 \quad 5^1 \quad 5^{16} \Rightarrow 3.$

$3 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 15 = 1440$ способа составить [illegible]. А так как ~~[illegible]~~ тройки упорядоченные ⇒ необходимо ещё кол-во способов умножить на 6, т.е всего $1440 \cdot 6 = 8640$ вариантов

Ответ: 8640

Черновик

N.5.

1. случай:

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26) & (1) \\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) - \cancel{\quad} \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 1 & (2) \end{cases}$$

в (1)

$$4\log_{2x-8}(x-4) = \log_{(x-4)}(5x-26)$$

$$\frac{4\log_2(x-4)}{\log_2(2x-8)} = \frac{\log_2(5x-26)}{\log_2(x-4)}$$

$\log_2(2x-8) = \log_2 2 + \log_2 x-4$ Замена: $\log_2(x-4) = t$

~~$\log_2(5x-26) = \log_2 5x$~~

$\log_2(5x-26) = l$

$\underline{\cancel{4t}}$

(2) $\log_{5x-26}(2x-8) - \log_{(2x-8)}(x-4) = 1$

в $\dfrac{\log_2(2x-8)}{\log_2(5x-26)} - \dfrac{\log(x-4)}{\log_2 + \log_2(x-4)} = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{4t}{1+t} = \dfrac{l}{t} \\ \dfrac{\cancel{2}\cdot 1+t}{l}\cancel{l} - \dfrac{t}{1+t} = 1 \end{cases} \quad \Big| \cdot 4$$

(3)

(5д) Чистовик

$$\begin{cases} \dfrac{4t}{1+t} = \dfrac{b}{t} \\ \dfrac{4(1+t)}{b} - \dfrac{4}{1+t} = 4 \end{cases}$$

$$\frac{4(1+t)}{b} = 4 + \frac{b}{t}$$

$$4t(1+t) = 4bt + b^2$$

$$4t + 4t^2 = 4bt + b^2$$

$$b^2 + b(4b - 4t) - 4t^2 = 0$$

(2) Уравнение равносильно:

$$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) - \log_{(x-4)^2}(5x-26) = 1$$

$$4\frac{\log_2(2x-8)}{\log_2 5x-26} - \frac{\log(5x-26)}{\log(x-4)} = 2$$

$$\begin{cases} \dfrac{4t}{t+1} = \dfrac{b}{t} \\ \dfrac{4(t+1)}{b} - \dfrac{b}{t} = 2 \end{cases}$$

$$b = \frac{4t^2}{t+1}$$

$$\frac{4(t+1)^2}{t^2} - \frac{4t}{t+1} = 2$$

(4)

Черновик

$4(t+1)^3 - 4t^3 = 2t^2(t+1)$

$2(t+1)^3 - 2t^3 = t^2(t+1)$ $\quad : \quad t(t+1)$

~~$2(t+1-t$~~

$2((t+1)^3 - t^3) = t^2(t+1)$

$2(t+1-t)((t+1)^2 + t(t+1) + t^2) = t^3 + t^2$

$2($

Черновик
принимает вид:

Черновик

1. $\log_{\sqrt{2t+8}}(t-4) = \log_{(t-4)^2}(5t-26)$

$\log_{\sqrt{5t-26}}(2t+8) - \log_{(t-4)}(5t-26) = 1$

$\log_{(2t-8)^{\frac{1}{2}}}(t-4) = \log$

$\sqrt{(2t-8)}^{\log_{(t-4)^2}(5t-26)} = (t-4)$

$t^{\log_{(t-4)^2}(5t-26)} = \frac{t^2}{2}$

$2\log_{(2t-8)}(t-4) = \frac{1}{2}\log_{(t-4)}(5t-26)$

$\frac{1}{4}\log_{2t}t = \frac{1}{2}\log_t 5t-6$

3.2.16.15

6 $\quad 90 \cdot 16 = 540 + 90 = 1440$

8640

$\log_{(t-4)}(5t-26) - \frac{4}{\log_{(t-4)}2\sqrt{2t-8}}$

$\frac{\log t-4}{\log\sqrt{2t-8}} = \frac{\log t-4}{}$

$1440 \cdot 6 = 8640$

6t

$15 \cdot 6 = 90$

$90 \cdot 14 = 360 + 90 = 1260$

$\log_4 2 = \log_2 4$

$5t-26 = 4$

$2t-8 = 4$

$t-4 = 2^4$

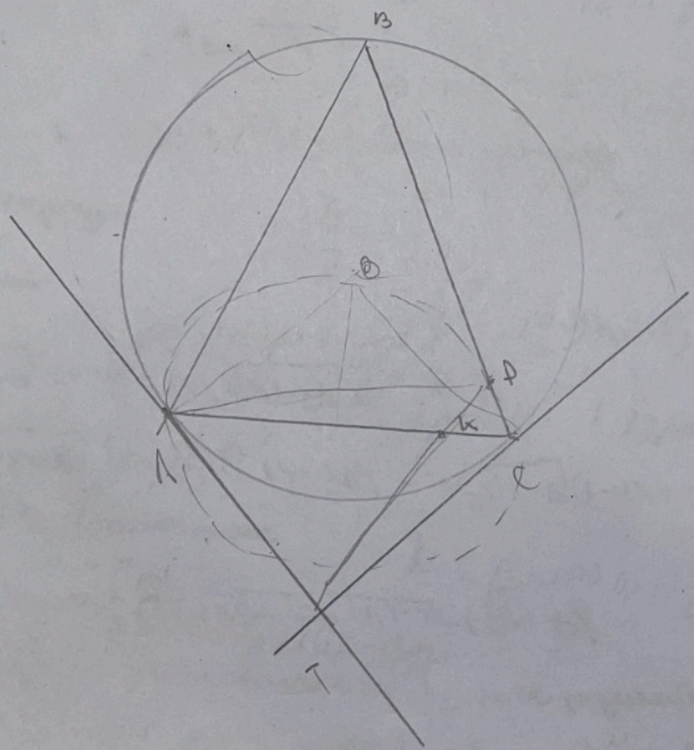
$\log_{(t-4)^2}(5t-26) = \log_{\sqrt{5t-26}}(2t-8)$

~~4log~~ $\log_{(t-4)}(5t-26) = 4\log_{(5t-26)}(2t-8)$

21101110 (U354503 M1302679)

Черновик

2·2·3



~~Чистовик~~ Черновик

принимает вид:,

$$\log_{\sqrt{4}} 4 - \log_{\sqrt{4}} 2 = 1$$

$2 - 1 = 1$, т.е выполняется => ~~[illegible]~~

$x = 6$ подходит

II. случай

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) \\ \log_{(x-4)^2}(5x-26) - \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 1 \end{cases}$$

ОДЗ аналогичное

$$\log_{(2x-8)}(x-4) = \log_{(5x-26)}(2x-8)$$

Проводя аналогичные I рассуждения получим, что ур.е имеет не более одного корня. ~~Они были бы по log~~

$\cancel{\frac{1}{\log_{(2x-8)}(x-4)}}$ Основание и показатель

первого

[illegible]

Вариант 20 ~~Цыганков~~ Цепкович

N.5.

I случай:

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=\log_{(x-4)^2}(5x-26) \text{ (1)} \\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)\cdot\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=1 \text{ (2)} \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x-8>0 \\ 2x-8\neq 1 \\ x-4>0 \\ x-4\neq 1 \\ 5x-26>0 \\ 5x-26\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>4 \\ x\neq 4{,}5 \\ x\neq 5 \\ x>\frac{26}{5} \\ x\neq \frac{27}{5} \end{cases}$

(1)

$$\cancel{\frac{\lg(x-4)}{\lg\sqrt{2x-8}}}$$

$$4\log_{\cancel{(2x-8)}}\cancel{(x-4)}=\cancel{\log_{(x-4)}(5x-26)}$$

$$\frac{4\lg(x-4)}{\cancel{\lg(2x-8)}}=\cancel{\frac{\lg(5x-26)}{\lg(x-4)}}$$

Из ОДЗ $\Rightarrow x>5 \Rightarrow \sqrt{2x-8}>\sqrt{2}>1{,}4 \Rightarrow$ $x-4>1$. Тогда:

$$4\log_{(2x-8)}(x-4)=\log_{(x-4)}(5x-26)$$

~~[illegible]~~ $$\frac{4}{\log_{(x-4)}(2x-8)}=\log_{(x-4)}(5x-26)$$

~~$\log(x-4)$ - монотонно в~~ При $x>5$ $\log_{(x-4)}(5x-26)$ - монотонно возраст. функция, а $\frac{4}{\log_{(x-4)}(2x+8)}$ - монотонно убывающая $\Rightarrow$ Они имеют не более одного корня. Подбором находим, что $x=6$: $\frac{4}{\log_2 4}=\log_2 4=2$

При $x=6$ верное рав-во