Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101085**

ID профиля: **78414**

Вариант 20

Чистовик. Вариант 20

Задача 1

$a_6 \cdot a_{11} = (a_1+5d)(a_1+10d) = a_1^2 + 15a_1d + 50d$,

где и далее d – разность возр. арифм. прогрессии

Пусть $a_1 = a$

$a_8 \cdot a_9 = (a+7d)(a+8d) = a^2+15ad+56d$

$S_{15} = a+a_2+a_3+a_4+a_5 = \frac{a+a_5}{2}\cdot 5 = \frac{a+a+4d}{2}\cdot 5 = (a+2d)5$

Получим систему:

$$+\begin{cases} a^2+15ad+50d > 5a+10d+15 \\ 5a+10d+39 > a^2+15ad+56d \end{cases}$$

$a^2+15ad+50d+5a+10d+39 > a^2+15ad+56d+5a+10d+15$

$24 > 6d \Rightarrow 4 > d$

Т.к. арифм. прогр. сост. только из целых чисел и явл. возраст, то d может быть $+1; +2; +3$

При $d=1$

$$\begin{cases} a^2+15a+50-5a-10-15>0 \\ a^2+15a+56-5a-10-39<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-5)^2>0 \Leftrightarrow a\neq 5 \\ a^2+10a+7<0 \end{cases}$$

$a^2+10a+7<0$

$D = 100-28=72$

$a_1 = \frac{-10+6\sqrt{2}}{2} = -5+3\sqrt{2}$

$a_2 = -5-3\sqrt{2}$

$0 > -5+3\sqrt{2} > -1$

$-9 > -5-3\sqrt{2} > -10$

решение системы:

$-9\ -8\ -7\ -6\ -1$

$-5-3\sqrt{2}\qquad -5+3\sqrt{2}$

$a \in [-1;-9]$, $a \in \mathbb{Z}$

При $d=2$

$$\begin{cases} a^2+30a+50-5a-20-15>0 \\ a^2+30a+56-5a-20-39<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+25a+15>0 \ (1) \\ a^2+25a-3<0 \ (2) \end{cases}$$

(1) $D = 625-60=565$

$24 > \sqrt{565} > 23$

$a_1 = \frac{-25-\sqrt{565}}{2}$, $-24 > a_1 > -25$

$a_2 = \frac{-25+\sqrt{565}}{2}$, $0 > a_2 > -1$

(1) нер-ву уд. целые a от $-\infty$ до -25 и от 0 до $+\infty$

(2) $D = 625+12 = 637$

$26 > \sqrt{637} > 25$

$a_1 = \frac{-25+\sqrt{637}}{2}$, $1 > a_1 > 0$

$a_2 = \frac{-25-\sqrt{637}}{2}$, $-25 > a_2 > -26$

Системе уд. решения $a=0$ и $a=-25$

1

21101085 (U78414 M1302402)

Чистовик

При $d=3$

$$\begin{cases} a^2+45a+50-5a-30-15>0 & (1) \\ a^2+45a+56-5a-30-39<0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+40a+5>0 & (1) \\ a^2+40a-13<0 & (2) \end{cases}$$

(1) $\frac{D}{4} = 400-5 = 395$

$20 > \sqrt{395} > 19$

$a_1 = -20-\sqrt{395}$; $-39 > a_1 > -40$

$a_2 = -20+\sqrt{395}$; $0 > a_2 > -1$

(2) $\frac{D}{4} = 400+13 = 413$

$21 > \sqrt{413} > 20$

$a_1 = -20+\sqrt{413}$; $1 > a_1 > 0$

$a_2 = -20-\sqrt{413}$; $-40 > a_2 > -41$

Системе удовлетворяют $a=0$ и $a=-40$

Тогда объединяя полученные значения a при $d=1;2;3$, получаем, что $a = 0; -1; -2; -3; -4; -5; -6; -7; -8; -9; -25; -40$

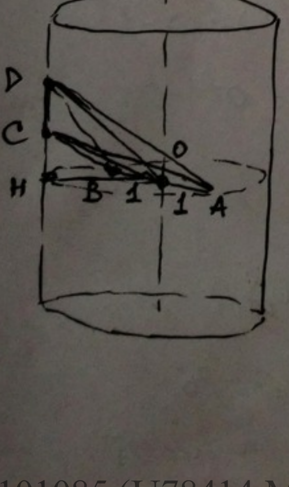
Ответ: $a \in \{-40\} \cup \{-25\} \cup [-9;0]$, $a \in \mathbb{Z}$, т.к. прогрессия состоит из целых чисел.

Задача 2

Заметим, что треугольники ACD и BCD равны по 3 сторонам. Тогда AB — отрезок, параллельный основанию цилиндра, ведь CD параллельно оси цилиндра. Чтобы в цилиндре радиус был минимален, нужно, чтобы AB = диаметру основания цилиндра и $AB \parallel$ основанию цилиндра. Тогда радиус цилиндра будет равен 1

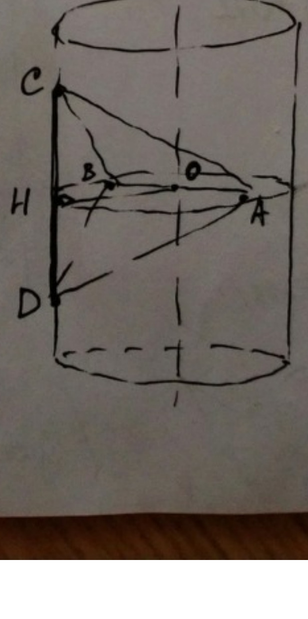
Имеем следующие ситуации: когда C и D лежат выше (или ниже) плоскости, параллельной основанию, через которую проходит AB, и когда C и D лежат по разные стороны от этой плоскости.

1)



и

2)



21101085 (U78414 M1302402)

Чистовик

Для обоих случаев O – ~~центр~~ середина AB, ~~т~~куда опущены высоты в равнобедренных треугольниках ABD и ACB с осн. AB оба. OH – радиус, проведённый к прямой, содержащей CD, ~~OH~~ и OH ⊥ CD

OH = OA = OB = 1. Найдём DH и CH, тогда возможные длины CD – либо DH + CH, либо DH – CH.

$CO^2 = 49 - 1 = 48$

$DO^2 = 64 - 1 = 63$

$CH^2 = 48 - 1 = 47$

$DH^2 = 63 - 1 = 62$

$CH = \sqrt{47}$

$DH = \sqrt{62}$

$CD = \sqrt{62} + \sqrt{47}$

или $CD = \sqrt{62} - \sqrt{47}$

Ответ: $\sqrt{62} + \sqrt{47}$ или $\sqrt{62} - \sqrt{47}$

$\boxed{\text{Задача 3}}$

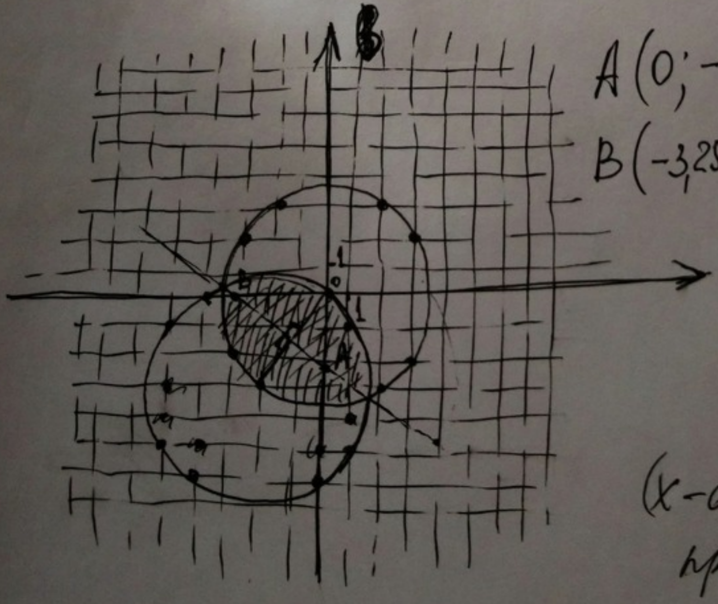
При $-4a - 6b \geq 13 \Leftrightarrow b \geq \frac{-13-4a}{6}$

$a^2 + b^2 \leq 13$

При $-4a - 6b < 13 \Leftrightarrow b < \frac{-13-4a}{6}$

$a^2 + 4a + 4 + b^2 + 6b + 9 \leq 13$

$(a+2)^2 + (b+3)^2 \leq 13$



$A\left(0; -\frac{13}{6}\right)$

$B(-3{,}25; 0)$

пары чисел, удовлетворяющие нер-ву $a^2 + b^2 \leq \min(-4a - 6b; 13)$, лежат в заштрихованной области

$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 13$

представляет собой круг с центром в $(a; b)$ и радиусом $\sqrt{13}$

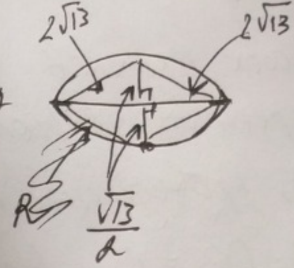
Фигура M будет образована совокупностью кругов, центр которых будет принадлежать закрашенной области, перенесенной на XY-ко-

$\boxed{3}$

1101085 (U78414 M1302402)

Чистовик

ординатную плоскость. М - 2 сегмента



4

21101085 (U78414 M1302402)

Черновик

$a_1 \cdot d^5 = a_6$

$a_6 \cdot a_{11} \geq S+15$

$a_1 \cdot d^{10} = a_{11}$

$a_8 a_9 < S+39$

$a_1 \cdot d^7 = a_8$

$a_1 \cdot d^8 = a_9$

$\cancel{S+15 < a_1^2 \cdot d^{15} < S+39}$ | $\cancel{a_1(d^5-1) < a_1^2 \cdot d^{15}(d-1) < a_1(d^5-1)+(d-1) \cdot 24}$

$\cancel{S = \frac{a_1(d^5-1)}{d-1}}$

$$S = \frac{a_1+a_5}{2} \cdot 5 = \frac{2a_1+4d}{2} \cdot 5 = (a_1+2d)5$$

$$(a_1+5d)(a_1+10d) = a_1^2+15a_1d+50d$$

$$(a_1+7d)(a_1+8d) = a_1^2+15a_1d+56d$$

$$\begin{cases} a_1^2+15a_1d+50d > 5a_1+10d+15 \\ 5a_1+10d+39 > a_1^2+15a_1d+56d \end{cases}$$

$$\cancel{a_1^2}+\cancel{15a_1d}+50d+\cancel{5a_1}+\cancel{10d}+39 > \cancel{a_1^2}+\cancel{15a_1d}+56d+\cancel{5a_1}+\cancel{10d}+15$$

$24 > 6d \qquad 4 > d$

d может быть 1, 2 или 3

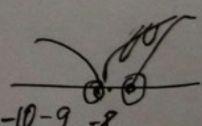
При $d=1$

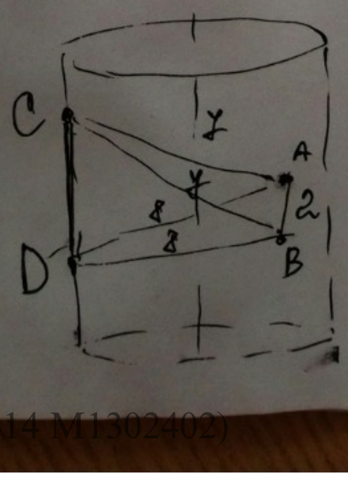
$$a_1^2+15a_1+50-5a_1-10-15>0$$

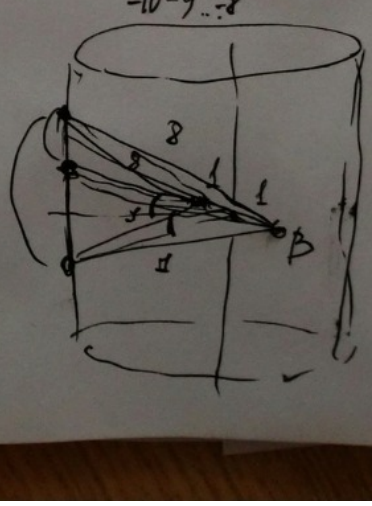
$\cancel{a^2+10a+35>0}$

$D = 100-60 = 40$

$a_1 = \frac{-10 \pm 2\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \cancel{\frac{10 \pm 2\sqrt{10}}{2}} \quad -5 \pm \sqrt{10}$



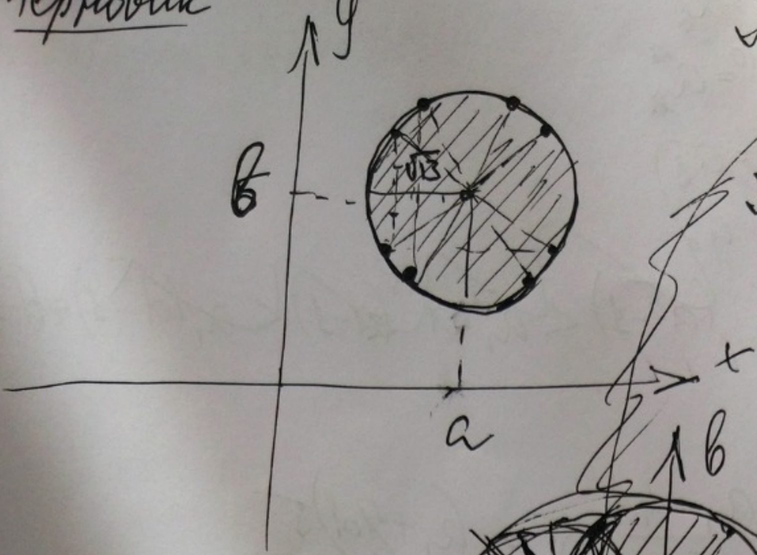




21101085 (U78414 M1302402)

4
—
9

Черновик



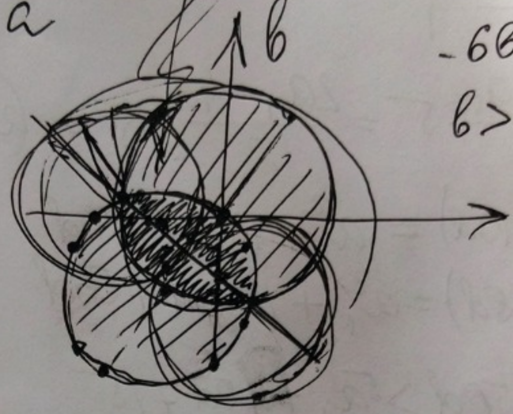
При $-4a-6b>13$

$a^2+b^2\le 13$

При $-4a-6b<13$

$a^2+b^2+4a+4+6b+9\le 13$

$(a+2)^2+(b+3)^2\le 13$



$-6b>13+4a$

$b>\dfrac{-13-4a}{6}$

a

21101085 (U78414 M1302402)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

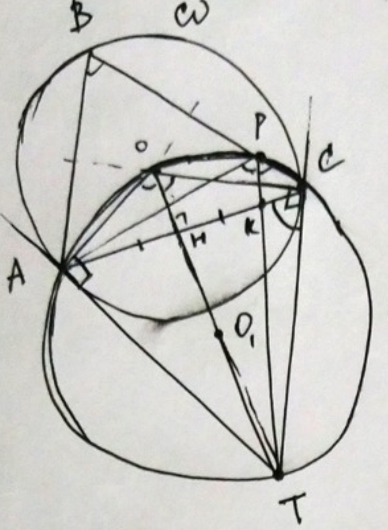
Шифр: **21101085**

ID профиля: **78414**

Вариант 20

Чистовик. Вариант 20

Задача 6



1) ◦ Т.к. AOC вписан в другую окружность ω_1, то OH – сер.пер. к AC

◦ $OC \perp CT$ и $OA \perp AT$, но $\angle OCT = \angle OAT = 90°$ и являются вписанными $\Rightarrow$ OT – диаметр.

$OH \in OT$, т.к. $OH \perp AC$ и $AH = AC$

~~$\Rightarrow AO = OC$ как радиусы, $\angle OCT = \angle OAT = 90°$,~~

~~$AT = CT \Rightarrow \triangle OAT = \triangle OCT \Rightarrow$~~

2) $AT = CT \Rightarrow \cup AT = \cup CT \Rightarrow \angle APT = \angle TPC = \alpha$

Тогда PK – бисс-са в $\triangle APC$, $\frac{AP}{AK} = \frac{PC}{KC}$.

3) $\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{AP \cdot PK \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha}{CP \cdot PK \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha} = \frac{10}{8} = \frac{AP}{CP} = \frac{AK}{KC} \Rightarrow AK = 10y$; $CK = 8y$

4) в $\triangle AOT$ и $\triangle COT$ $\angle AOT = \angle COT = \alpha$, т.к. опираются на те же дуги, что и $\angle APT$ и $\angle CPT$. Тогда центральный угол $AOC = 2\alpha \Rightarrow \angle B = \alpha$.

Тогда $\angle B = \angle KPC$, они соответственные $\Rightarrow AB \parallel PK \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KPC$. $\frac{S_{ABC}}{S_{CPK}} = \left(\frac{AC}{CK}\right)^2 = \left(\frac{CK + AK}{CK}\right)^2 = \left(\frac{18y}{8y}\right)^2 = \frac{81}{16} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{81 \cdot 8}{16} = 40{,}5$

5) Пусть $\overset{\circ}{A}\overset{\circ}{C} = 2x$, $\overset{\circ}{A}O = R$, $\angle ABC = \alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\cos = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$

$\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$

$\frac{2x}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow 2x = \frac{2R}{\sqrt{5}}$

…104085 (U78414 M1302403)

Черновик

$$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c) = 10 \\ \text{НОК}(a,b,c) = 2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$$

$2^{18}\cdot 5^{17} = abc$

$\text{НОД}\left(\frac{a}{10};\frac{b}{10};\frac{c}{10}\right) = 1$

$\text{НОК}\left(\frac{a}{10};\frac{b}{10};\frac{c}{10}\right) = \frac{abc}{1000} = 2^{15}\cdot 5^{14}$

$\frac{\text{I}\ r}{10} - 2^{n}$

$\frac{\text{II}\ r}{10} - 5^{m}$

$\frac{\text{III}\ r}{10} - 2^{(15-n)}\cdot 5^{(14-m)}$

n от 1 до 15

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$\log_2(5x-26) = c$

$\log_2(x-4) = a$

$\log_2(2x-8) = b$

$a+1=b$

$$\begin{cases} x > 5\frac{1}{5} \\ x \neq 5\frac{2}{5} \end{cases}$$

$2\log_{(2x-8)}(x-4)$

$\frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)$

$2\log_{(5x-26)}(2x-8)$

$\frac{1}{2\log_{(5x-26)}(x-4)}$

$\frac{2a}{b};\ \frac{c}{2a};\ \frac{2b}{c}$

$\frac{\lg(2x-8)}{\lg(5x-26)} = \frac{\lg(x-4)}{\lg(2x-8)}$

$$\begin{cases} \frac{2a}{a+1} = \frac{2(a+1)}{c} \\ \frac{c}{2a} = \frac{2a}{a+1} + 1 \end{cases}$$

$\lg^2(2x-8) = \lg(x-4)\cdot\lg(5x-26)$

$\frac{\lg(5x-26)}{\lg(x-4)^2} - 1 = \frac{\lg(x-4)}{\lg(2x-8)} - 1$

$$\begin{cases} ac = a^2+2a+1 \\ ac+c = 6a^2+2a \end{cases}$$

$\lg(5x-26)\cdot\lg(2x-8) = \lg^2(x-4)^2 - \lg(2x-8)\cdot\lg(x-4)^2 =$

$= \lg(x-4)^2\left(\lg\frac{1}{2}\right)$

$c = 5a^2-1$

$\log_2(5x-26)\log_2(2x-8) = -2\log_2(x-4)$

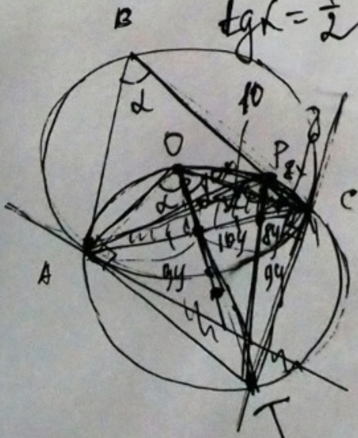
$a(5a^2-1) = a^2+2a+1$

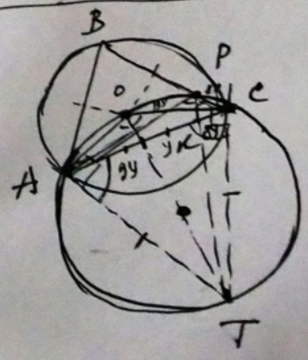
$5a^3-a^2-3a-1=0$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$

$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt5}$

$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt5}$





21101085 (U78414 M1302403)

Черновик

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R} = 40{,}5 \qquad \frac{AC}{4R} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2\sqrt{5}} = 40{,}5$$

$AC\sqrt{5} = 2R$

$$AC^2 = R^2 + R^2 - \frac{3}{5} \cdot \cancel{2} R^2$$

$$\frac{4{,}5y \cdot 9y \cdot 2}{2} \quad 2 \cdot 40{,}5 y^2 =$$

$$AC^2 = \frac{4R^2}{5}$$

$$AC^2 = \frac{4}{5}R^2$$

$40{,}5$

$$R^2 = AC^2 + \frac{1}{4}AC^2$$

$$\cancel{\ldots}^2 = \frac{4}{5}R^2$$

21101085 (U78414 M1302403)