Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101026**

ID профиля: **212088**

Вариант 20

Чистовик

Лист 1.

№1.

S - сумма 5 членов арифм. прогр. ↗

$a_i \in \mathbb{Z}$

$a_6 \cdot a_{11} > S + 15$ d - разность арифм. прогр.

$a_8 \cdot a_9 < S + 39$

$a_6 = a_1 + 5d \quad a_{11} = a_1 + 10d$

$S = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d + a_1 + 4d = 5a_1 + 10d$

$a_8 = a_1 + 7d \quad a_9 = a_1 + 8d$

$(a_1 + 5d)(a_1 + 10d) > \cancel{S+15}\ 5a_1 + 10d + 15$

$(a_1 + 7d)(a_1 + 8d) < \cancel{S}\ 5a_1 + 10d + 39$

$$\begin{cases} a_1^2 + \overset{15}{\cancel{5a_1}}d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15 \\ a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15 \\ 5a_1 + 10d + 39 > a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2 \end{cases} +$$

$\cancel{a_1^2} + \cancel{15a_1 d} + 50d^2 + \cancel{5a_1} + \cancel{10d} + 39 > \cancel{a_1^2} + \cancel{15a_1 d} + 56d^2 + \cancel{5a_1} + \cancel{10d} + 15$

$50d^2 + 39 > 56d^2 + 15$

$24 > 6d^2$

$4 > d^2 \iff d \in (-2; 2)$

т.к. арифм. прогр. состоит из целых чисел, то $d \in \mathbb{Z} \rightarrow$ подходящие целые $-1; 0; 1$

т.к. посл-ть возрастающая, то $d > 0 \Rightarrow$ подходит только $d = 1$.

$\Rightarrow d = 1$ - разность арифм. прогр.

Чистовик.

Лист 2.

$a_6 = a_1 + 5;\ a_{11} = a_1 + 10;\ a_8 = a_1 + 7;\ a_9 = a_1 + 8$

$S = 5a_1 + 10$

$$\begin{cases} (a_1+5)(a_1+10) > 5a_1 + 10 + 15 \\ (a_1+7)(a_1+8) < 5a_1 + \cancel{38}\ 10 + 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 + 50 > 5a_1 + 25 \\ a_1^2 + 15a_1 + 56 < 5a_1 + 49 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 \not< 0 \end{cases}$$

(1) $(a_1+5)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -5$

(2) $a_1^2 + 10a_1 + 7 \not< 0$ $\quad =0$

$D = 100 - 4 \cdot 7 = 72 = (6\sqrt{2})^2$

$a_1 = \frac{-10 \pm 6\sqrt{2}}{2} = \left[\begin{matrix} -5+3\sqrt{2} \\ -5-3\sqrt{2} \end{matrix}\right.$

$$\begin{cases} a_1 \in \mathbb{Z} \\ a_1 \neq -5 \\ a_1 \neq -5+3\sqrt{2} \\ a_1 \neq -5-3\sqrt{2} \end{cases}$$

$-5 < -5 + 3\sqrt{2}$

$-5 - 3\sqrt{2} > -5$ $\Rightarrow$ ~~-5 не лежит в $(-\infty; -5-3\sqrt{2}) \cup (-5+3\sqrt{2}; +\infty)$~~

$-5+3\sqrt{2} > -1$ $\quad$ $-5+3\sqrt{2} < 0$

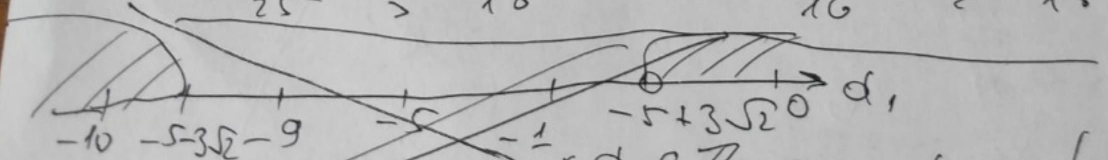
$3\sqrt{2} > 4$ $\quad$ $3\sqrt{2} < 5$

$18 > 16$ $\quad$ $18 < 25$

$-5-3\sqrt{2} > -10$ $\quad$ $-5-3\sqrt{2} < -9$

$5 > 3\sqrt{2}$ $\quad$ $4 < 3\sqrt{2}$

$25 > 18$ $\quad$ $16 < 18$



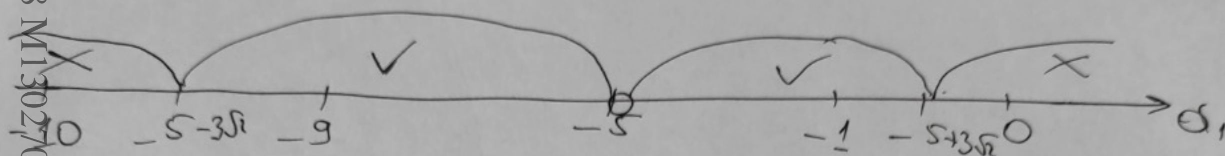
т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$, то подходят $(-\infty; 10] \cup [0; +\infty)$

Ответ: целые числа на множестве $(-\infty; 10] \cup [0; +\infty)$

Чистовик. Лист 3.

№ 1 (Продолжение)

$$\begin{cases} a_1 \in \mathbb{Z} \\ a_1 \neq -5 \\ \begin{cases} a_1 < -5+3\sqrt{2} \\ a_1 > -5-3\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

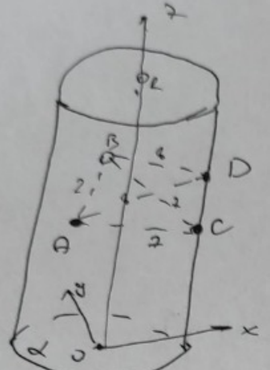


Т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$, то подходят: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$.

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$.

Чистовик.
Лист 4

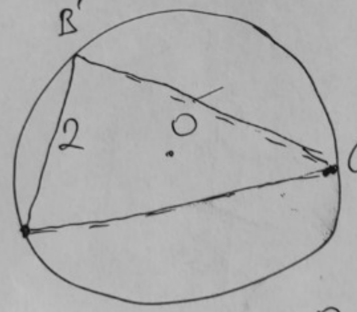
№2.



$\triangle ACD = \triangle BCD$ по 3 сторонам

~~CD общая сторона~~
$BD = AD$
$\angle ADC = \angle BDC$ $\Rightarrow$ координаты по z у т. A и т. B одинаковы
$\Rightarrow AB \parallel \alpha$, где α плоскость нижнего основания цилиндра

~~Постро~~ Рассмотрим проекцию тетраэдра на нижнее основание цилиндра:

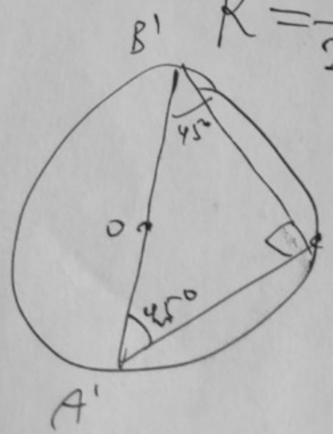


$A'C' = B'C'$, т. к. $AC = BD$
$A'B' = 2$, т.к. $AB = 2$ и $AB \parallel \alpha$

$R = \frac{A'B'}{2\sin\angle B'C'A'}$ (т. синусов)

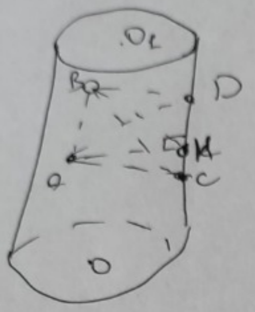
радиус - наименьший при наибольшем синусе, т.е. при $\sin\angle B'C'A' = 90°$

$R = \frac{A'B'}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$



~~A'D~~ $A'C' = B'C' = \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}\ \sqrt{2}$ по т. Пиф.

Чистовик
Лист 5
№2 (Продолжение)



Проведём AH до пересечения с ~~В~~ CD
такой, что $AH \parallel \alpha$

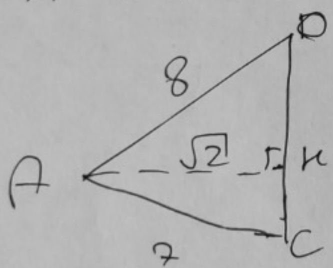
$\left.\begin{array}{l} CD \parallel OO_1 \\ OO_1 \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow$ ~~CD||~~ $CD \perp \alpha$

$\Rightarrow$ ~~CD~~ $CD \perp AH$

$AH = A'C' = \sqrt{2}$, т.к. $AH \parallel \alpha$, $A'C'$ – проекция AD на α

Рассмотрим 2 случая:

1) H ~~лежит~~ на отрезке CD:

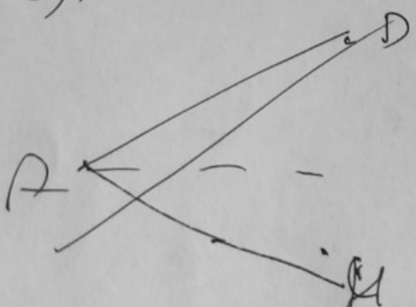


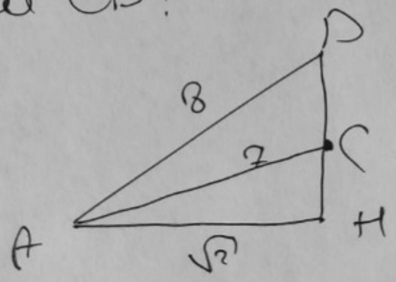
по т. Пифагора $DH = \sqrt{64-2} = \sqrt{62}$

$HC = \sqrt{49-2} = \sqrt{47}$

$CD = \sqrt{62} + \sqrt{47}$

2) H не лежит на CD:





$DH = \sqrt{62}$

$CH = \sqrt{47}$

$CD = \sqrt{62} - \sqrt{47}$

Ответ: $\sqrt{62} + \sqrt{47}$ или $\sqrt{62} - \sqrt{47}$

Чистовик.
Лист 6.
№ 3.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b;\ 13) \end{cases}$$

1) $a^2+b^2 \le 13$ при $-4a-6b \ge 13$

~~окр-ть~~ круг: центр $(0;0)$ $R=\sqrt{13}$

$\cancel{-4a-6b<13}$

2) $a^2+b^2 \le -4a-6b$ при $-4a-6b<13$

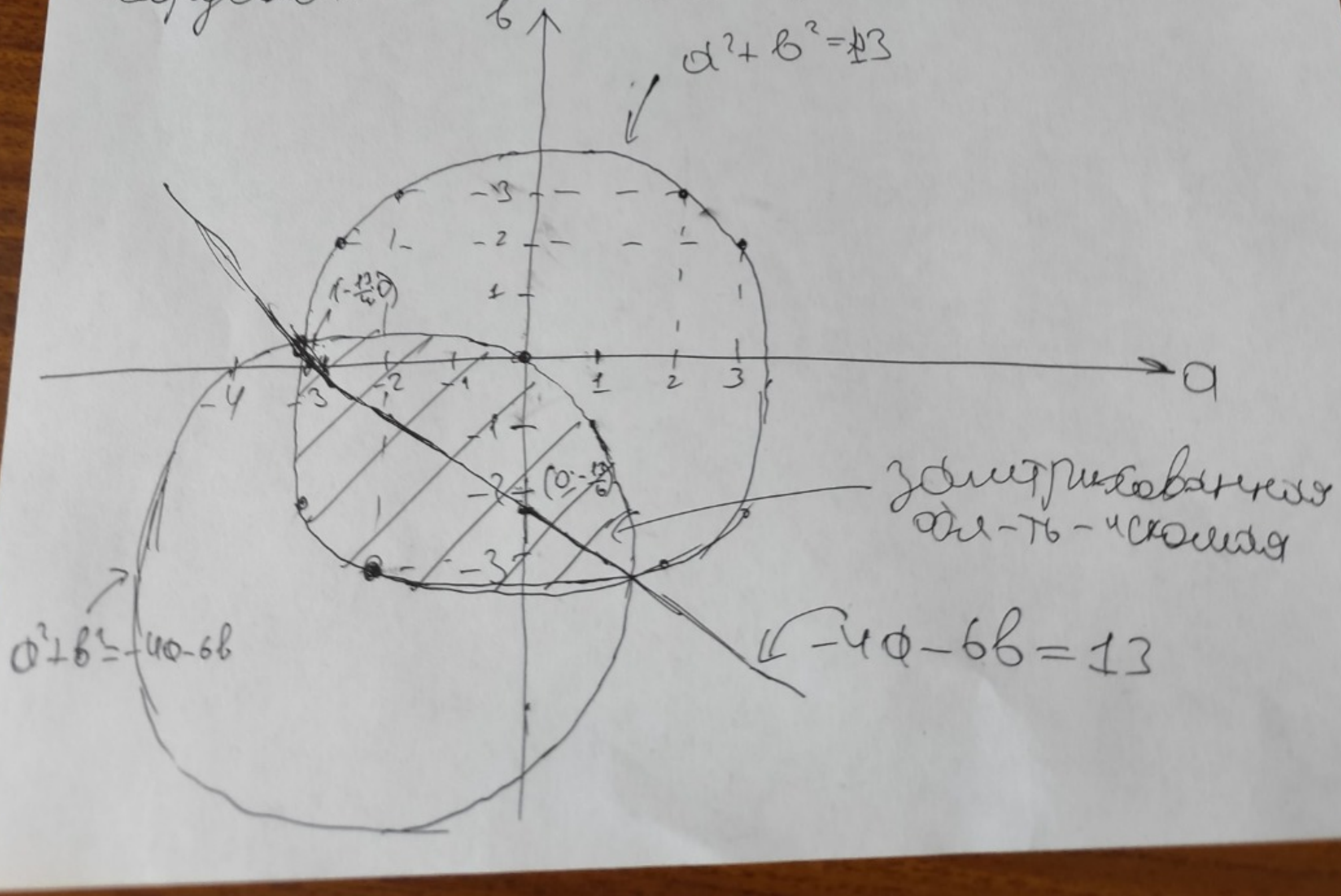
$a^2+4a+b^2+6b \le 0$

$a^2+4a+4+b^2+6b+9 \le 13$

$(a+2)^2+(b+3)^2 \le 13$

круг: центр $(-2;-3)$ $R=\sqrt{13}$

Изобразим круги и прямую $-4a-6b=13$ на координатной плоскости.



Чистовик.

Лист 7.

№3 (Продолжение)

~~Обратите вн~~

Заметим, что:

$$\underbrace{a^2+b^2=-4a-6b}_{\text{ур-ие 2-ой окр-ти}}\;\underbrace{-4a-6b=13}_{\text{ур-ие прямой}}\;\underbrace{13=a^2+b^2}_{\text{ур-ие 1-ой окр-ти}}$$

$\Rightarrow$ 2 окр-ти и прямая пересекаются во двух точках

$$\begin{cases} -4a-6b=13 \Rightarrow b=\frac{-4a-13}{6} \\ a^2+b^2=13 \end{cases}$$

$$a^2+\left(\frac{-4a-13}{6}\right)^2=13$$

$$36a^2+16a^2+2\cdot4\cdot13a+169=13\cdot36$$

$$\underset{13\cdot4}{52}a^2+2\cdot4\cdot13a+13^2=13\cdot36$$

$$4a^2+8a+13-36=0$$

$$4a^2+8a-23=0$$

$$D=64+16\cdot23=16(4+23)=16\cdot27=(12\sqrt{3})^2$$

$$a=\frac{-8\pm12\sqrt{3}}{8}=\left[\begin{array}{l} -1-\frac{3}{2}\sqrt{3} \Rightarrow b=\frac{4+6\sqrt{3}-13}{6}=\sqrt{3}-\frac{3}{2} \\ -1+\frac{3}{2}\sqrt{3} \Rightarrow b=\frac{4-6\sqrt{3}-13}{6}=-\sqrt{3}-\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

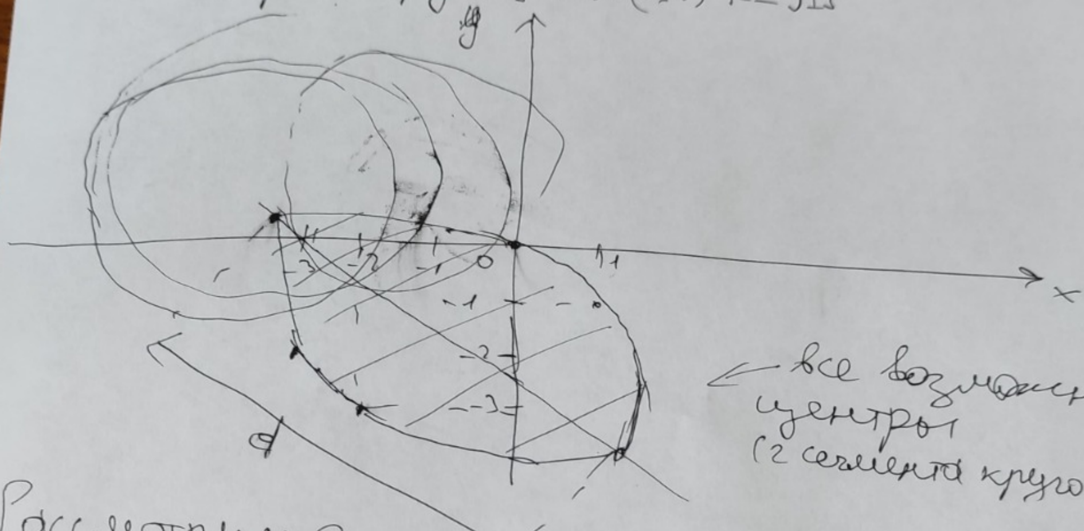
Точки пересечения: $\left(-1-\frac{3}{2}\sqrt{3};\ \sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)$

$\left(-1+\frac{3}{2}\sqrt{3};\ -\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)$

Чистовик. Лист 8.

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13$

~~окр-ть~~ круг: центр: $(a;b)$ $R=\sqrt{13}$



все возможные центры (2 сегмента круга)

Рассмотрим 2 сегмента: на ~~ви~~ от верхнего и от нижнего образуются совокупности окружностей, которые в сумме дают 2 полуокружности (т. е. окр-ть) с радиусом $\frac{\sqrt{13}+d}{2}$

$d=\sqrt{(\sqrt{3}-\frac{3}{2}+\sqrt{3}+\frac{3}{2})^2+(b-1-\frac{3}{2}\sqrt{3}+1-\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}=$

$=\sqrt{12+\frac{9}{4}\cdot 3}$

Ответ:

$S=\pi\left(d+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2=\pi\left(\sqrt{12+\frac{27}{4}}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2=$

$=\pi\left(\sqrt{\frac{36+27}{4}}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2=\pi\left(\frac{\sqrt{63}}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2=$

$=\pi\left(\frac{63+13}{2}+\sqrt{63\cdot 13}\right)=\pi\left(38+\sqrt{63\cdot 13}\right)$

21101026 (U212088 M1302702)

Черновик

№3.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b, 13) \end{cases}$$

1) $a^2+b^2 \le 13$:

$x^2+\cancel{a^2}-2xa+y^2+2ab+\le 0$

1) $\begin{cases} a^2+b^2 \le -4a-6b \\ -4a-6b \le 13 \end{cases}$

$a^2+4a+4+b^2+6b+9 \le 4+9$

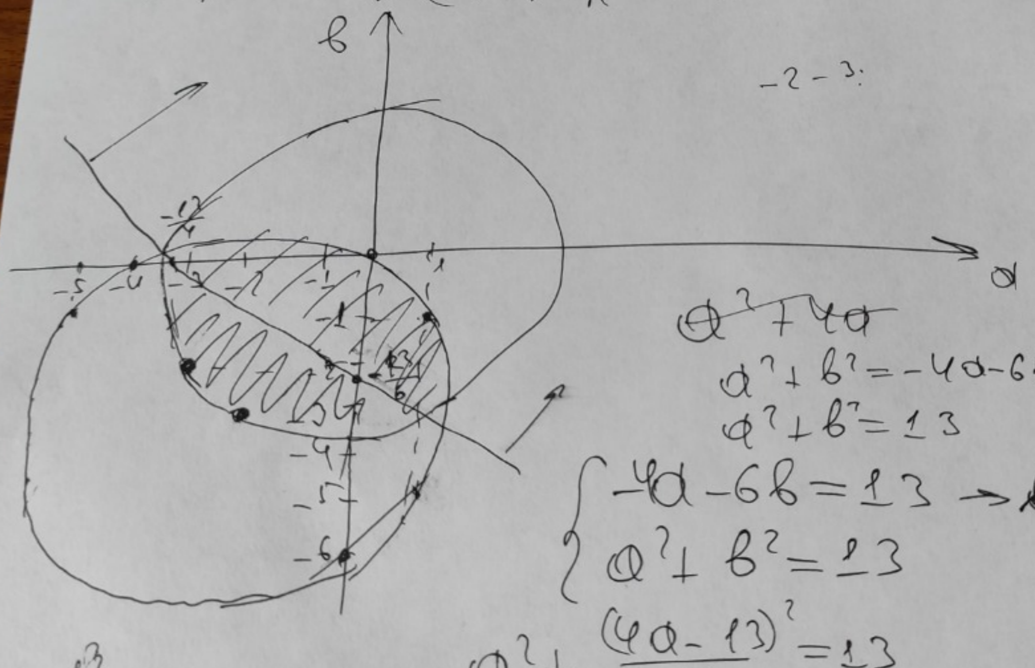
$(a+2)^2+(b+3)^2 \le 13$

окр-ть ц. $(-2;-3)$ $R=\sqrt{13}$

$a^2+b^2 \le 13$

$-4a-6b = 13$

$-2-3:$



$\cancel{a^2+4a}$

$a^2+b^2=-4a-6b$

$a^2+b^2=13$

$$\begin{cases} -4a-6b=13 \to b = \frac{4a-13}{6} \\ a^2+b^2=13 \end{cases}$$

$a^2+\frac{(4a-13)^2}{36}=13$

$36a^2+16a^2-2\cdot4\cdot13a+169=13\cdot36$

$52a^2-104a-299=0$

$4a^2-8a-23=0$

$D=64+16\cdot23=16(4+23)=16\cdot27=(12\sqrt{3})^2$

$a=\frac{8\pm12\sqrt{3}}{8}=1\pm\frac{3}{2}\sqrt{3}$

$13 \times 8 = 104$

$36 \times 13 = 108 + 36 = 468$

$468 - 169 = 299$

$299 : 13 = 23$; -26, 39

21101026 (U212088 M1302702)

~~Чистовик~~ Черновик.

~~Лист~~

№ 7.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 4 \le 13 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b,\ 13) \end{cases}$$

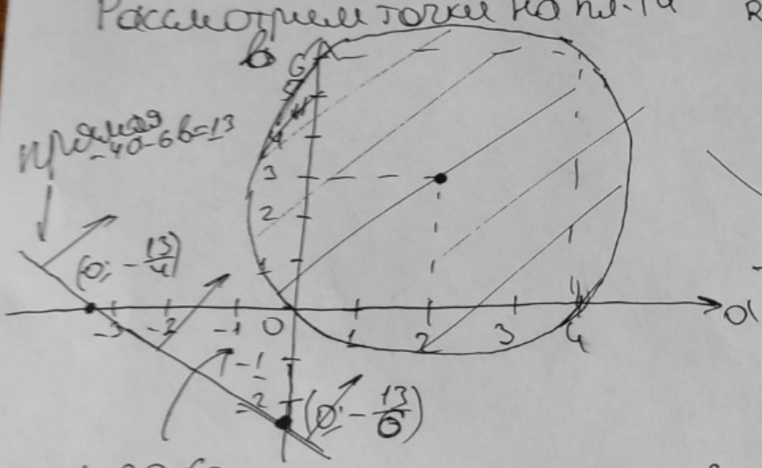
1). $-4a-6b < 13$

$a^2+b^2+4a+6b \le 0$

$a^2+4a+4+b^2+6b+9 \le 13$

$(a-2)^2+(b-3)^2 \le 13$ – круг – центр $(2;3)$ $R=\sqrt{13}$

Рассмотрим точки на пл-ти



проходит через центр, т.к. $2^2+3^2=13$

Нет пересечений с прямой $-4a-6b=13$

более того, она находится под окр-тью

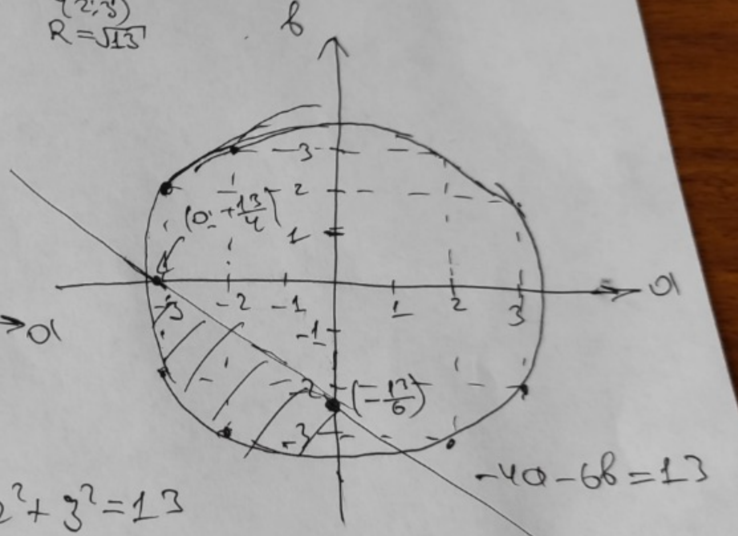
$\Rightarrow$ ~~Нет решений~~ весь круг

Решение – ~~вся окр-ть~~

2) $-4a-6b \ge 13$

$a^2+b^2 \le 13$

круг с центром $(0;0)$ $R=\sqrt{13}$



Решение – нижняя часть круга

Черновик

$b = \frac{4a-13}{6} = \frac{4 \pm 6\sqrt{3}-13}{6} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{3}$

$(x+7)^2$

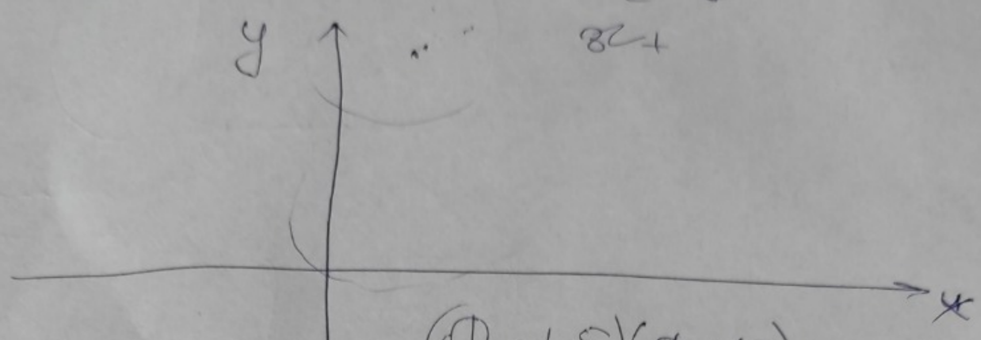
$a^2 + b^2 = -4a - 6b$

$1 + \frac{9}{4} \cdot 3 + \cancel{8 \cdot 3} \cancel{2 \cdot 3\, 3\sqrt{3}} + 3 + \frac{9}{4} - \cancel{3\sqrt{3}} = 4 + 4 - \cancel{6\sqrt{3}} + \frac{12}{2} + \cancel{6\sqrt{3}}$

$4 + 9 = 13 \Rightarrow$

Черновик.

1) $a^2+b^2 \leq 13$



$(a_1+5)(a_1+10) > 5a_1+20$

$(a_1+7)(a_1+8) < 5a_1+$

$5 \cdot 10 >$

$7 \cdot 8 <$

$S_5 = 1+2+3+4 = 10$

$S+39 = 49$

$a_1 = 0$

$a_6 = 5$

$a_{11} = 10$

$a_8 = 7$

$a_9 = 8$

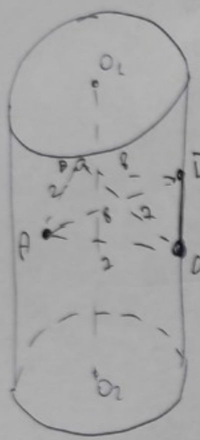
$S = 1+2+3+4 = 10$

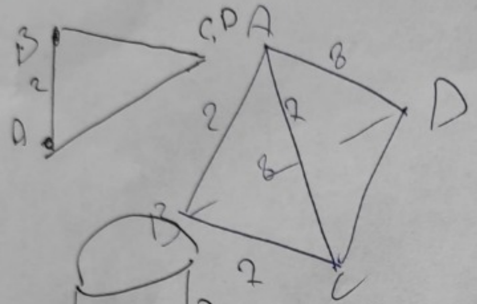
$(a_1+7)(a_1+8) < 5a_1+10+39$

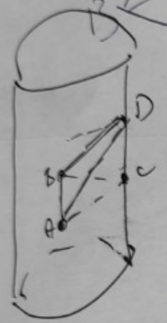
$a_1^2 + 15a_1 + 56 < 5a_1 + 49$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

21101026 (U212088 M1302702)



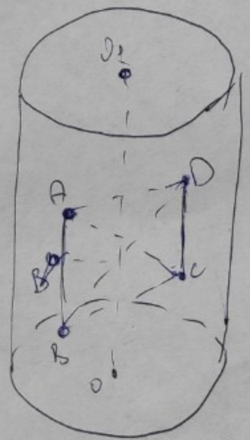


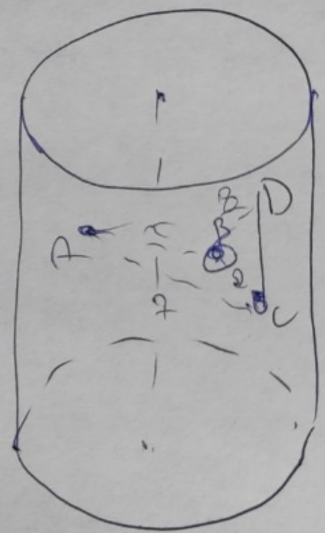


$AB = 2$

$AC = CB = 7$

$AD = DB = 8$





Черновик

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101026**

ID профиля: **212088**

Вариант 20

Чистовик

Лист 1

№ 4.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 10 \Rightarrow a, b, c \vdots 10 \\ НОК(a;b;c) = 2^{17} \cdot 5^{16} \end{cases}$$

Если бы какое-то из чисел a, b, c имело бы делитель k, не кратный 2 или 5, то НОК делилось бы на k. Но НОК делится только на числа, кратные 2 или 5

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2} \\ b = 2^{\beta_1} \cdot 5^{\beta_2} \\ c = 2^{\gamma_1} \cdot 5^{\gamma_2} \end{cases} \quad \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{N}$$

$$НОК(a, b, c) = 2^{\max(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)} \cdot 5^{\max(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)}$$

$\Rightarrow$ (1) одно из чисел A делится на 2^{17} – одно из трёх (случай выбора)

(2) одно из чисел B делится на 5^{16} – одно из трёх

$$НОД(a, b, c) = 2^{\min(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)} \cdot 5^{\min(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)}$$

$\Rightarrow$ (3) одно из чисел C делится на 2^1, но ~~но~~ не дел. на $2^2, 2^3$... – одно из двух оставш.

(4) одно из чисел D делится на 5^1, но не дел. на $5^2, 5^3$...

I. ~~Третье число~~ какое-то число какое-то имеет степень 2 от 2 до 16 и степень 5 от 2 до 15:

$$3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 15 \cdot 14$$

(1) (3) (2) (4) (не C, A)

II. ~~Третье~~ Какое-то число имеет степень 2 1 или 17, какое-то имеет степень 5 от 2 до 15:

$$\frac{3 \cdot 2}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 14$$

Чистовик.
Лист 2.
№ 4.

III. Какое-то число (не D) имеет степень 2 от 2 до 16 и степень в 5 от: 1 или 16

$3\cdot 2\cdot \frac{3\cdot 2}{2}\cdot 15$

IV. Какое-то число (не D и не B) имеет степень двойки 1 или 17 и степень пятёрки 1 или 16:

$\frac{3\cdot 2}{2}\cdot \frac{3\cdot 2}{2}$.

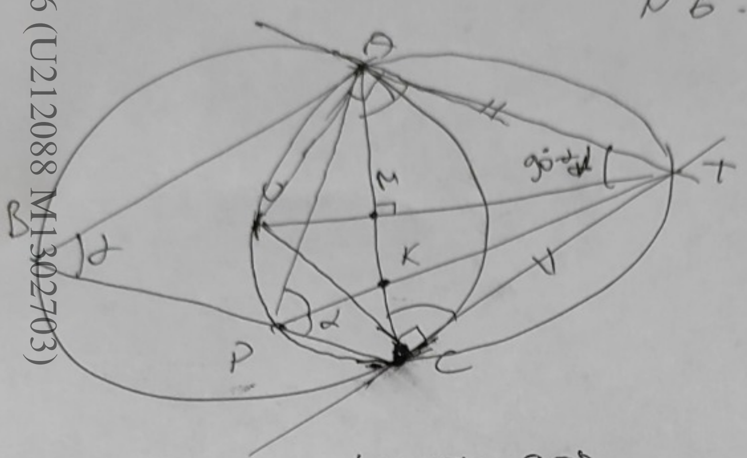
Ответ: $3\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 15\cdot 14+\frac{3\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}}\cdot 3\cdot 2\cdot 14+3\cdot 2\cdot \frac{3\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}}\cdot 15+\frac{3\cdot \cancel{2}\cdot 3\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}\cdot \cancel{2}}=$

$=9(60\cdot 14+28+30+1)=9\cdot 899=8100-9=\underline{8091}$

$14 \times 60 = 840$
$840 + 59 = 899$

Чистовик лист 3.

№6.



~~АD~~ $= \angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$

в сумме они дают 180° $\Rightarrow$ в ◯ATC можно
около

описать окр-ть $\Rightarrow$ T лежит на окр-ти окол $\triangle$ OAT

$AT = CT$ (касат.) $\Rightarrow \triangle CAT$ – р/б

$\angle CAT = \angle ACT = \alpha$

$\angle TPC = \alpha$ (опир. на одну дугу)

$\angle APT = \alpha$ (опир. на одну дугу)

$\Rightarrow PK$ – бис. в $\triangle APC$

$\dfrac{AK}{KC} = \dfrac{S_{APK}}{S_{CPC}} = \dfrac{5}{4}$

$\Rightarrow \dfrac{AP}{PC} = \dfrac{AK}{KC} = \dfrac{5}{4}$

$AK = 5x$ $\quad AP = 5y$

$KC = 4x$ $\quad PC = 4y$

$\triangle APK \sim \triangle KCT$ $\quad PK \cdot KT = AK \cdot KC = 20x^2$

~~$AO = OC$ (радиус)~~

~~$AT = TC$~~

~~$\angle AOC = 2\alpha$~~

~~$\Rightarrow AC \perp OT$~~

~~AO~~

Чистовик. Лист 4.

№6 (Продолжение)

$\angle CAT = \angle CBA$ (угол между кас. и сек.)

$\angle C$ - общий у $\triangle PKC$ и $\triangle ABC$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KPC$

$\frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = k^2 = \left(\frac{AC}{KC}\right)^2 = \left(\frac{9x}{4x}\right)^2 = \frac{81}{16}$

$S_{ABC} = \frac{81}{16} \cdot S_{KPC} = \frac{81}{2}$

б) $\angle ABC = \alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$

$\angle ATC = 180° - 2\alpha$ (сумма углов $\triangle$)

$ATCO$ - вписанный $\Rightarrow \angle AOC = 180° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha$

по т. синусов для $\triangle ABC$: ~~по т. синусов~~

$\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow R = \frac{AC}{2\sin\alpha}$

по т. косинусов для $\triangle OAC$:

$R^2 + R^2 - 2R^2\cos 2\alpha = AC^2$

$R^2(2 - 2\cos 2\alpha) = AC^2$

$AC = R\sqrt{2 - 2\cos 2\alpha}$

$R = \frac{AC}{\sqrt{2 - 2\cos 2\alpha}}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad | \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\frac{5}{4} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$S = \frac{abc}{4R} = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$

Чистовик. Лист 5.

№6 (Продолжение)

$\sin 2\alpha = 2\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$

$\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$

OT - диаметр окр-ти №2 (опир. на прямой угол)

$OT \cap AC = M$

$R_2 = \frac{AC}{2\sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{AC}{2\sin 2\alpha}$

$(\frac{1}{2}AC)^2 = AM \cdot MC = OM \cdot MT$

$\angle ATM$ - бис. $\angle ATC$

~~Ответ: а)~~ $\frac{81}{2}$ $\cancel{\frac{1}{2}ACAM =}$

4 $\cancel{\angle}$ $\triangle AMT$:

$\cancel{\frac{\frac{1}{2}AC}{MT} = tg\,\alpha}$

$\frac{MT}{AM} = tg\,\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow MT = \frac{1}{4}AC$

~~MT~~ $OM = R_2 - MT = R_2 - \frac{1}{4}AC$

$\left(\frac{AC}{2\sin 2\alpha} \cancel{2R} - \frac{1}{4}AC\right) \cdot \frac{1}{4}AC = \frac{1}{4}AC^2$

$\frac{AC}{2\sin 2\alpha} - \frac{1}{4}AC = 1\,AC$

Ответ: а) $\frac{81}{2}$

Чистовик. лист 6.

№5

$x-4=a$ $\qquad (x-4)^2=a^2$

$2x-8=2a$

$\sqrt{2x-8}=\sqrt{2a}$

$5x-26=5a-6$

$5x-26=\sqrt{5a-6}$

$a\neq 1$

$a>0$

$5a-6>0$

$5a-6\neq 1$

$\log_{\sqrt{2a}} a$; $\log_{a^2} 5a-6$ $\quad \log_{\sqrt{5a-6}} 2a$

$2\log_{2a} a \quad \frac{1}{2}\log_a(5a-6) \quad 2\log_{5a-6} 2a$

$2\cdot\log_{2a} a\cdot \cancel{\frac{1}{2}}\log_a(5a-6)\cdot\cancel{2}\log_{5a-6} 2a=$

$=2\log_{2a} a\cdot\log_a 2a=2\log_{2a}2a=2$

~~Все числа в сумме~~ Произведение чисел равно 2

$\left.\begin{matrix} bcd=2 \\ b=c=d-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} b=1 \\ c=1 \\ d=2 \end{matrix}$

Рассмотрим 3 случая:

~~1~~ I) $\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=1 \\ \log_{(x-4)^2}(5x-26)=1 \\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=2 \end{cases}$

(1) $\sqrt{2x-8}=x-4$ и $x-4>0$ и $x-4\neq 1$

$\begin{cases} 2x-8=x^2-8x+16 \\ x-4\geq 0 \end{cases}$ $\qquad x^2-10x+24=0$

$\left[\begin{matrix} x=4 \\ x=6 \end{matrix}\right.$ - подставим в (2) и (3)

Чистовик. Лист 7.
№5 (Продолжение)

6:

(2) $\log_{(6-4)^2}(6\cdot5-26)=\log_4 4=1$ - верно

(3) $\log_{\sqrt{5\cdot6-26}}(2\cdot6-8)=\log_2 4=2$ - верно $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 6 - подходит

4: $\log_{(4-4)^2}(25-26)$

$\underset{0}{}$ $\Rightarrow$ неверно $\Rightarrow$ 4 не подходит

II. $\begin{cases}\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=6 \end{array}\right. \\ \log_{(x-4)^2}(5x-26)=2 \\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=1\end{cases}$

$x=4$ → не подходит при подстановке в №(2)

$x=6$ → подходит из (I)

III. $\begin{cases}\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=2 \\ \log_{(x-4)^2}(5x-26)=1 \\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=1\end{cases}$

(1) $(x-4)^2=5x-26$

$x^2-8x+16=5x-26$

$x^2-13x+42=0$

$D=169-42\cdot4=1$

$x=\frac{+13\pm1}{2}=\left[\begin{array}{l} \cancel{4}\,7 \\ 6 \end{array}\right.$ - подходит из (I)

~~7?~~ 7: (1) $\log_{\sqrt{2\cdot\cancel{14}-8}}(7-4)=\log_{\sqrt{20}}3\neq2$ - не подходит

Ответ: $x=6$.

~~Чистовик.~~

№5.

$x-4=a\geq 0$

$\sqrt{5x-26}=b\geq 0$

$\log_{\sqrt{2a}} \cancel{a}$ $\quad \log_{a^2} b^2 \quad \log_b 2a$

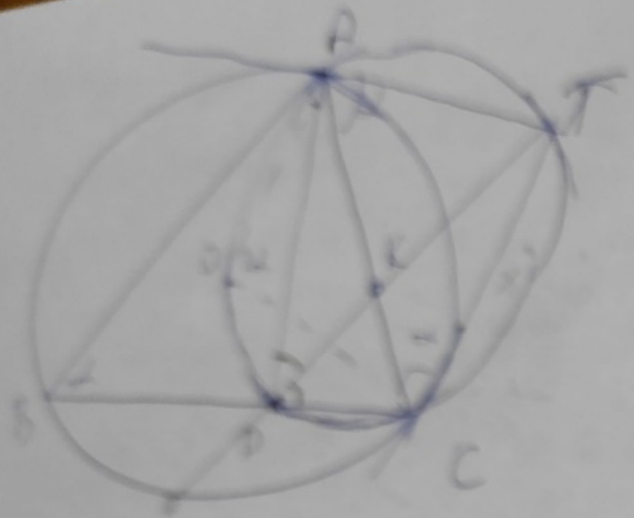
$2\log_{2a} a \quad \log_a b \quad \log_b 2a$

1) $\cancel{2\log_2}\ \log_a b = \log_b 2a$

$\cancel{1 = \frac{\log_b 2a}{\log_a b}}$

$2\log_{2a} a = 2\frac{1}{\log_a 2a} = 2\frac{1}{\cancel{\log}\ 1+\log_2 a}$

угол между хор и кас



№5.

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$ $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$ $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$\sqrt{2x-8}=a$ $x-4=b$ $\sqrt{5x-26}=c$

$\log_a b$ $\log_{b^2} c^2$ $\log_c 2b$

$\log_b c$

$\left.\begin{matrix} a>0 \\ a\neq 1 \\ b>0 \\ b\neq\pm 1 \\ c>0 \\ c\neq 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} a>0 \\ a\neq 1 \\ b>0 \\ b\neq 1 \\ c>0 \\ c\neq 1 \end{matrix} \Rightarrow$

1) $\cancel{\log_a b}$ $\log_b c = \log_c 2b$

$\cancel{\log_b c = \log_c 2 + \log}$

$\frac{\log_b c}{\log_c 2b}$ $\frac{\log_c 2b}{\log_b c} =$

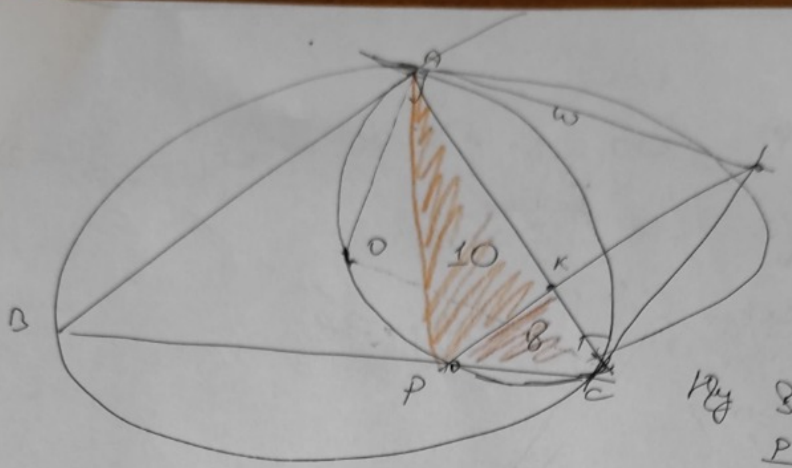
$b\neq 1$ $c\neq 1$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$\log_c 2b\neq 0$ $\log_b c\neq 0$

$\Uparrow$

разделим на него



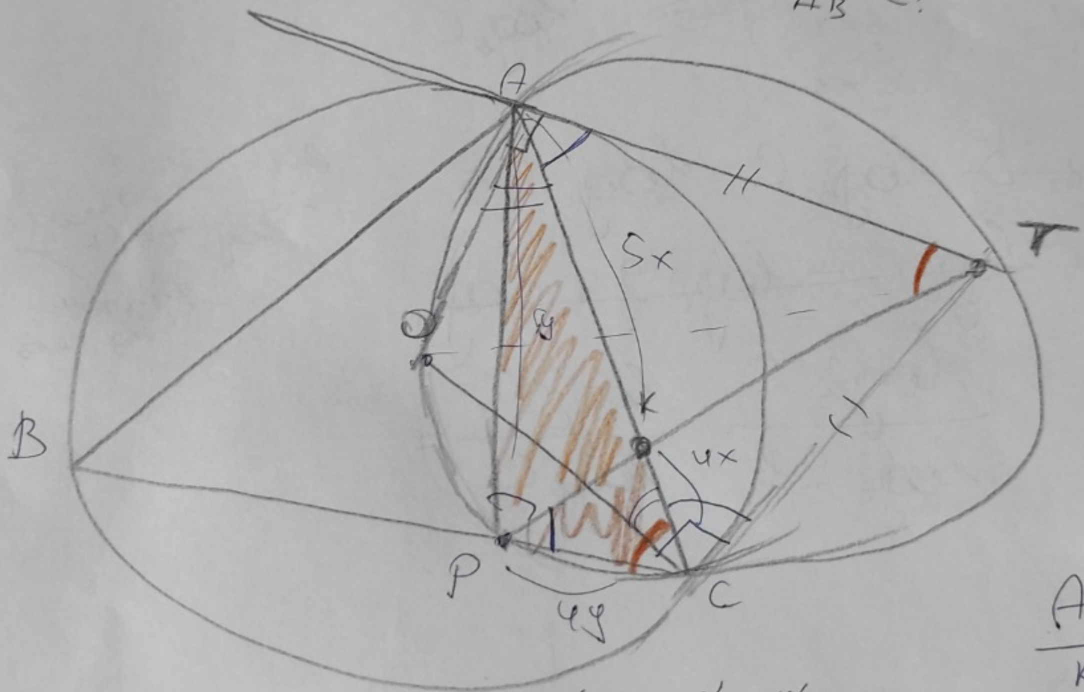
$S_{APK} = 10$

$S_{CPK} = 8$

$+P$

Ну $S_{ABC} = ?$

$\frac{PC}{AB} = ?$



$\frac{AK}{KC} = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{5}{4}$

PK - бис. $\triangle APC$

$\frac{AK}{KC} = \frac{AP}{PC} = \frac{5}{4}$

НОД$(a, b) =$

$= 2^{\min(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)} \cdot 5^{\min(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)}$

НОК $= 2^{\max}$

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2}$

$b = 2^{\beta_1} \cdot 5^{\beta_2}$

$c = 2^{\gamma_1} \cdot 5^{\gamma_2}$

№ 5.

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)\ \log_{(x-4)^2}(5x-26)\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$a=\sqrt{2x-8}$

$b=x-4$

$c=\sqrt{5x-26}$

$\log_a b\ ;\ \log_{b^2} c^2\ ;\ \log_c 2b$

$\log_{b^2} c^2 = \log_b c$

$a>0$

$a\neq 1$

$b>0$

$b\neq 1$

$c>0$

$c\neq 1$

Рассмотрим: $\log_b c = \log_c 2b$

~~$\log_b c = \log$~~

$\dfrac{1}{\log_c b} = \log_c b + \cancel{\log}\ \log_c 2$

$\log_b c + 1 = \log_c 2b$

$\log_b c + 1 = \log_c b + \log_c 2$

$\log_a b = \log_b c \cancel{+1}$

$\log_a b + 1 = \log_c 2b \Rightarrow \log_a b + 1 = \frac{1}{\log_b c} + \log_c 2$

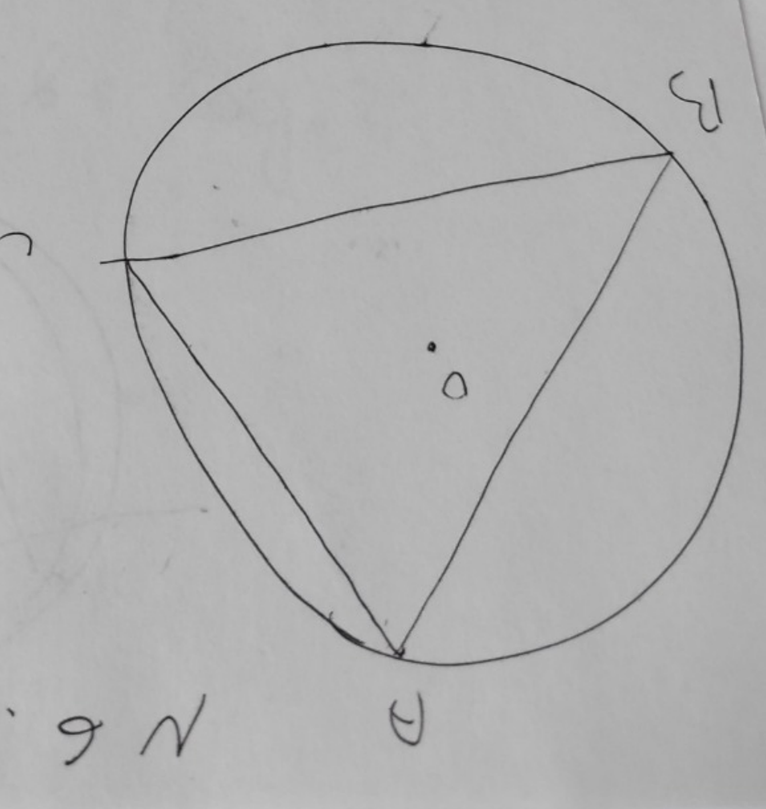
$\log_b c + 1 = \log_c 2b$

$t + 1 = \frac{1}{t} + \log$

$\log_a b = \log_b c = t$

$t + 1 = \frac{1}{\cancel{t}} + \log_c 2$

$\log_c 2 = \frac{t^2 + t + 1}{t}$



N 6.

$\log_a b \,;\, \log_b c \,;\, \log_c 2b$

$\log_a b = \log_b c$

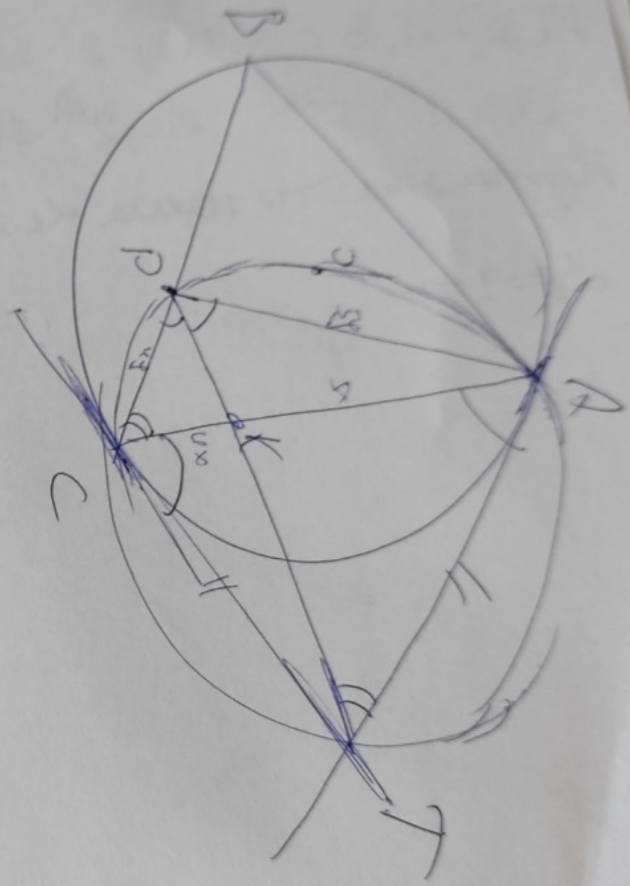
$\dfrac{\log_a b}{\log_b c} = 1$

$\log_a b \cdot \log_c b = 1$

$\log_a b =$

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

$\log_c b = \log_a b \log_b c$



~~Чистовик~~ Черновик

Лист 1.

№4.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=10 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot5^{16} \end{cases} \Rightarrow abc = НОД\cdot НОК = 2^{17}\cdot 5^{17}$$

$НОД(a;b;c)=10=2^1\cdot5^1 \Rightarrow a, b, c \vdots 10$

$a=2^{\alpha_1}\cdot5^{\alpha_2}$ $\quad b=2^{\beta_1}\cdot5^{\beta_2}$ $\quad c=2^{18-\alpha_1-\beta_1}\cdot5^{17-\alpha_2-\beta_2}$

Нужно найти такие $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}$: $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, 18-\alpha_1-\beta_1, 17-\alpha_2-\beta_2 \geq 1$

$\alpha_1=1 \Rightarrow$

~~Черновик~~ Черновик

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 5^{\gamma_1} \cdot a_0$

$b = 2^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_2} \cdot b_0$

$c = 2^{\gamma_1} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot b_0$

$a, b,$ НОД

НОД$(a; b; c) = 2^{\min(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)} \cdot 5^{(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)}, a_0$

~~НОК (a, b, c~~

Если бы a, b, c имели бы дел. не 2 и 5, то НОК делился бы и на них

т.к. НОК$(a, b, c) = \max 2^{\max(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)} \cdot 5^{(\max(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)}$, то

(1) одно из чисел $\vdots$ на 2^{17}

(2) одно из чисел $\vdots$ на 5^{16}

НОК $= 2^{\min}$

(3) одно из чисел имеет 2^1

(4) — " — имеет 2^5

(1) – 1 из трёх

(3) 2 из трёх

} $3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot$ ~~...~~ $\cdot 15 \cdot 16$

3-е число имеет степень от 2 до 16

(2) 1 – из трёх

(3) 1 – из трёх

} степень от 2 до 15

$3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 2 \cdot 3 \cdot$ 2 степень

Если 2 из них имеет степень 1:

1) 5^1

2) 5

$\log_a b = \log_{b^2} bc^2 \quad \log_c 2b$

$\log_a b \quad \log_b c \quad \log_c 2b$

$\log_a b = \log_b c + \log_b b$

$\log_a b = \log_b bc$

$1 = \log_b bc -$