Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100995**

ID профиля: **847224**

Вариант 20

Чистовик

1. $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_5 = \frac{2a_1 + 4b}{2} \cdot 5 = 5a_1 + 10b$

$$\begin{cases} a_6 \cdot a_{11} > S + 15 \\ a_8 \cdot a_9 < S + 39 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a_1+5b)(a_1+10b) > 5a_1 + 10b + 15 \\ (a_1+7b)(a_1+8b) < 5a_1 + 10b + 39 \end{cases}$$

$\Rightarrow (a_1+5b)(a_1+10b) + 5a_1 + 10b + 39 > (a_1+7b)(a_1+8b) + 5a_1 + 10b + 15$

$a_1^2 + 15a_1b + 50b^2 + 24 > a_1^2 + 15a_1b + 56b^2$

$6b^2 < 24 \Rightarrow b^2 < 4 \Rightarrow b = 1$, так как $b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a_1+5)(a_1+10) > 5a_1 + 10 + 15 \\ (a_1+7)(a_1+8) < 5a_1 + 10 + 39 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases}$$

~~$a_1 \in (-\infty; -5-5\sqrt{2}) \cup (-5+5\sqrt{2}; +\infty)$~~

~~$a_1 \in (-5-2\sqrt{2}; -5+2\sqrt{2})$~~

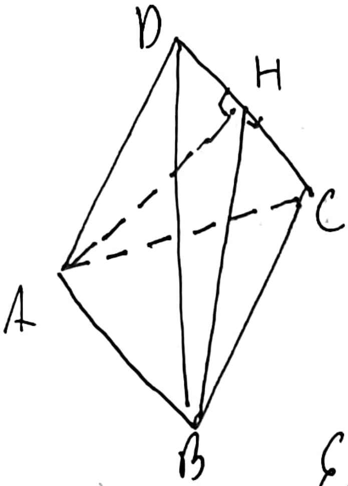
$$\begin{cases} a_1 \neq -5 \\ a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2}) \end{cases}$$

$4 < 3\sqrt{2} < 5 \Rightarrow a_1 \in [-9; -1] / \{-5\}$

Ответ: $a_1 \in [-9; -1] / \{-5\}$.

Чистовик

2.



$A, B, C, D \in$ боковой поверхности, $CD \parallel$ оси цилиндра

$AH \perp CD$; $BH \perp CD$ $\Rightarrow$ AH и BH параллельны основанию цилиндра. $\triangle ADC = \triangle BDC$ по трем сторонам $\Rightarrow AH = HB$

Если AH и BH параллельны основанию, то радиус окружности, описанной около $\triangle ABH$ равен радиусу цилиндра.

По th. sin $2R = \frac{AB}{\sin(\angle AHB)} \Rightarrow R = \frac{1}{\sin(\angle AHB)} \Rightarrow R$ - мин, когда $\angle AHB = 90^0 \Rightarrow AB^2 = AH^2 + BH^2 = 2AH^2 = 4 \Rightarrow AH = BH = \sqrt{2}$

$\Rightarrow DH = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{64 - 2} = \sqrt{62}$; $CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{49 - 2} = \sqrt{47}$

$\Rightarrow DC = DH + HC = \sqrt{62} + \sqrt{47}$

Ответ: $\sqrt{47} + \sqrt{62}$

$b^2 < 4 \Rightarrow b = 1 \ldots$

Чистовик

3. $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b,\,13)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 13\\ a^2+b^2\le -4a-6b\\ a^2+b^2\le 13\end{cases}$

$\begin{cases}\cancel{(a-x)^2+(b-y)^2\le 13}\\ \cancel{a^2+b^2\ (a+2)^2+(b+3)^2\le 13}\\ a^2+b^2\le 13\end{cases}$

~~- три окружности с центрами (0;0), (-2;-3), (x;y) и радиусом~~ $\cancel{\sqrt{13}}$

$\begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 13\\ \cancel{a^2+2a+b^2+3b} \quad a^2+2a+b^2+3b\le \frac{13}{2}\end{cases}$

$\begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 13\\ (a+1)^2+\left(b+\frac{3}{\sqrt2}\right)^2\le 12\end{cases}$

– Окружности с центрами $(x;y)$ и $\left(-1;-\frac{3}{\sqrt2}\right)$ и радиусами $\sqrt{13}$ и $2\sqrt3$

Система имеет решения если $(x+1)^2+\left(y+\frac{3}{\sqrt2}\right)^2\le 25$ (расстояние между центрами)

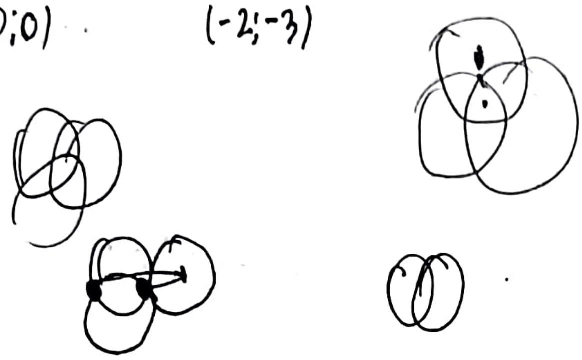
$\Rightarrow$ M – окружность с радиусом 5 $\Rightarrow S_M=\pi\cdot r^2=25\pi$

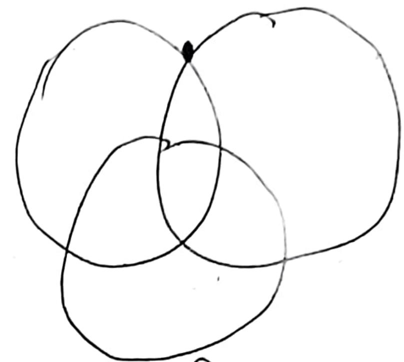
Ответ: 25π

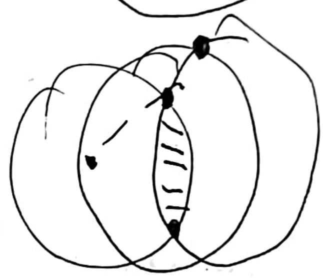
$(x;y)$ Черновик

$(0;0)$ $(-2;-3)$

Если $a \le \sqrt{13}$, то имеем [illegible]





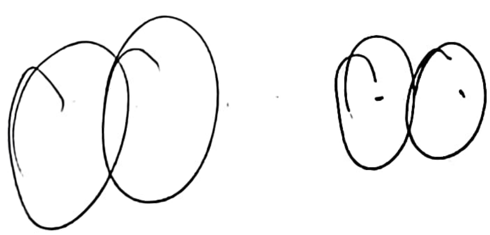


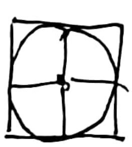
$$2a^2+2b^2+4a+6b \le 13$$

$$\cancel{2a^2+4a+2+2b^2+6b+2} \le 17$$

$\frac{13}{2}+\frac{9}{2}$

$$a^2+2a+1+b^2+3b+\frac{9}{2} \le 12$$





$\pi \cdot 1$ 3.14

4

Черновик

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 + b$

$a_3 = a_2 + 2b$

$a_n = a_1 + b(n-1)$

$S = a_1 + a_2 + \ldots a_5 = \frac{2a_1+4b}{2} \cdot 5 = (a_1+2b)\cdot 5 = 5a_1 + 10b$

$a_6 \cdot a_{11} = (a_1+5b)(a_1+10b) > S+15 = 5a_1+10b+15$

Док-ть $a_8 \cdot a_9 = (a_1+7b)(a_1+8b) < S+39 = 5a_1+10b+39$

$a_1^2 + 15b\cdot a_1 + 50b^2 > 5a_1 + 10b + 15$

$a_1^2 + a_1(3b-5) + 5(10b^2-2b-3)$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15ba_1 + 50b^2 > 5a_1 + 10b + 15 \\ a_1^2 + 15ba_1 + 56b^2 < 5a_1 + 10b + 39 \end{cases}$$

$\Rightarrow a_1^2 + 15ba_1 + 50b^2 + 5a_1 + 10b + 39 > a_1^2 + 15ba_1 + 56b^2 + 5a_1 + \ldots + 15$

$24 > 6b^2$

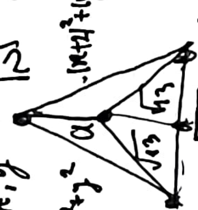
$4 > b^2$

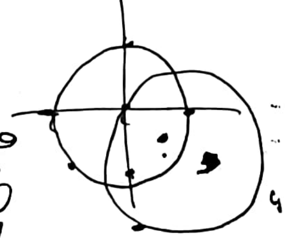
$b = 1; 2$

Если $b=1$: $a_1^2 + 15a_1 + 50 > 5a_1 + 10 + 15$

$\frac{-10 \pm 10\sqrt{2}}{2}$

$-5 \pm 5\sqrt{2}$



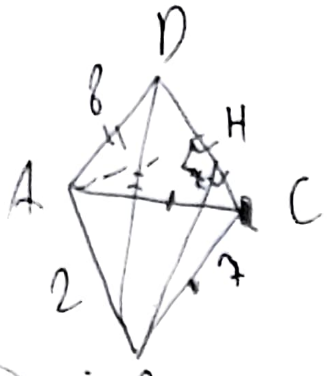


$\frac{-10 \pm 4\sqrt{2}}{2}$

$-5 \pm 2\sqrt{2}$

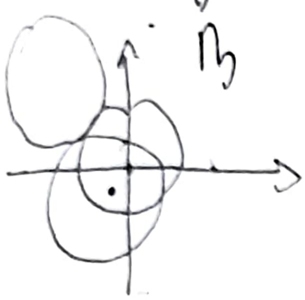
$3\sqrt{2} < 5$

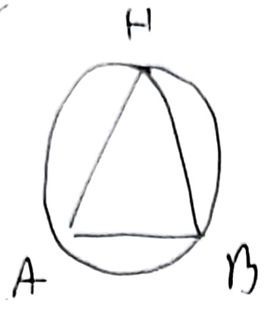
Черновик



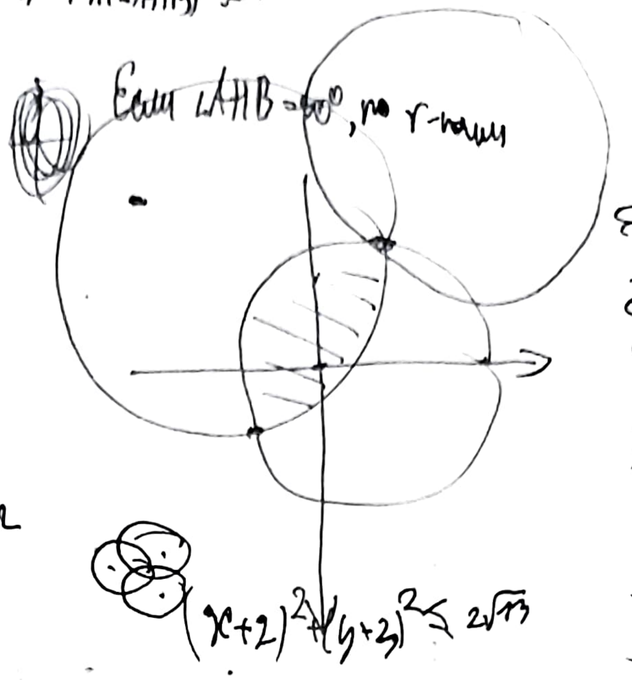
$2r = \frac{AB}{\sin(\angle AHB)} \Rightarrow r$ - мин,

когда $\sin(\angle AHB)$ - max.





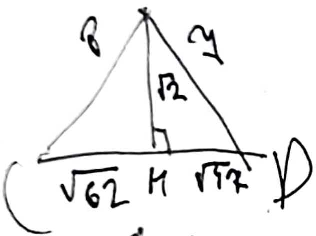
Если $\angle AHB = 90^\circ$, то r - мин



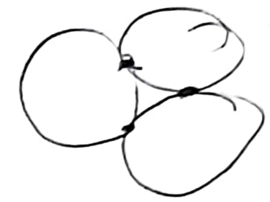
$AH = HB = \sqrt{2}$

$2x^2 = 4$

$AH = HB = \sqrt{7}$

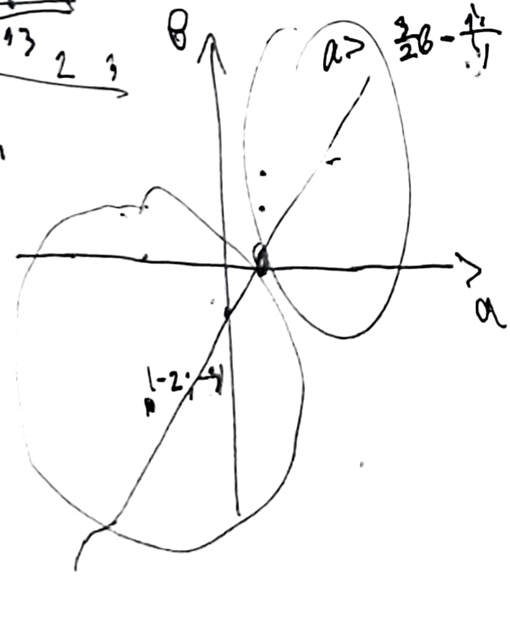


$(x+2)^2 + (y+3)^2 \le 2\sqrt{13}$



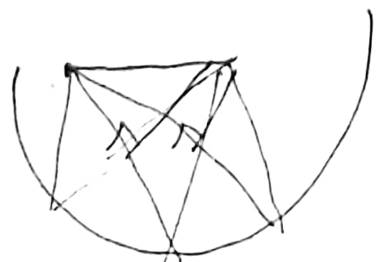
$(x-a)^2 + (y-b)^2 \le 13$

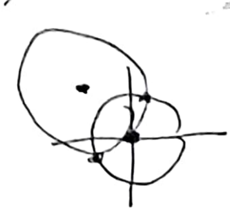
$a^2 + b^2 \le \min(-4a - 6b; 13)$



$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -4a - 6b < 13 \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 13 \\ a^2 + b^2 \le -4a - 6b \end{cases} \\ \begin{cases} -4a - 6b \ge 13 \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 13 \\ a^2 + b^2 \le 13 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -4a - 6b < 13 \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 13 \\ (a+2)^2 + (b+3)^2 \le 13 \end{cases} \\ \begin{cases} -4a - 6b \ge 13 \\ \end{cases} \end{array}\right.$$





$(x-a)^2 + (y-b)^2 \le 13$

$a^2 + b^2 \le \min(-4a - 6b, 13)$

$\begin{cases} a^2 + b^2 \le -4a - 6b \\ a^2 + b^2 \le 13 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 13 \\ (a+2)^2 + (b+3)^2 \le 13 \\ a^2 + b^2 \le 13 \end{cases}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100995**

ID профиля: **847224**

Вариант 20

Чистовик

4. $\begin{cases} НОД(a;b;c)=10 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$ $a=10a'$; $b=10b'$; $c=10c'$, тогда $\begin{cases} НОД(a';b';c')=1 \\ НОК(a';b';c')=2^{16}\cdot 5^{15} \end{cases}$

~~Если НОД(a~~ Так как $НОД(a';b';c')=1$, то хотя бы одно число должно не делится на 2 и хотя бы одно число не должно делится на 5

Пусть ~~тогда~~ $a' \not\vdots\, 2$; $a'=5^y$; $b' \not\vdots\, 5$; $b'=2^x$; $c=2^m\cdot 5^p$, тогда x или m равно 16 и y или $p = 15$, а другое меньше или равно 16 и 15 соотвественно, такие x, m, y, p можно выбрать $2\cdot 17\cdot 2\cdot 16=272$ способами

Также тройки упорядоченные, следовательно ~~всего~~ $6\cdot 272=1632$ способа взять такие тройки, если одно из чисел не делится на 4, а другое — на 25

Но может быть, что a' ~~одно из чисел~~ не делится ни на 2, ни на 5, тогда $a'=1$; $b'=2^x\cdot 5^y$; $c'=2^m\cdot 5^p$, получаем еще $3\cdot 2\cdot 17\cdot 2\cdot 16=$ ~~272 способов, также учитывая, что тройки~~ $272\cdot 3=816$ способов. Тогда всего $816+1632=2448$ троек.

Ответ: 2448 троек.

Чистовик

5 Пусть $\log_{(x-4)^2}(5x-26)=a$; $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=b$,

тогда $a\cdot b=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot \log_{x-4}(5x-26)\cdot \log_{5x-26}(2x-8)=$

$=\log_{x-4}2x-8=\dfrac{1}{\log_{\sqrt{2x-8}}x-4}$, тогда $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=\dfrac{2}{ab}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b \\ \frac{2}{ab}=a+1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\frac{2}{ab} \\ b=a+1 \end{cases} \\ \begin{cases} b=\frac{2}{ab} \\ a=b+1 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{2}{a^2}=a+1 \\ a=b \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{2}{a^2}=a+1 \\ b=\frac{2}{a^2} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{2}{b^2}=b+1 \\ a=\frac{2}{b^2} \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^3+a^2-2=0=(a^2+2a)(a-1) \\ a=b \end{cases} \\ \begin{cases} a^3+a^2-2=0=(a^2+2a)(a-1) \\ b=\frac{2}{a^2} \end{cases} \\ \begin{cases} b^3+b^2-2=0=(b^2+2b)(b-1) \\ a=\frac{2}{b^2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-2;\ 1 \\ b=-2;\ 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-2;\ 1 \\ b=\frac{1}{2};\ 2 \end{cases} \\ \begin{cases} b=-2;\ 1 \\ a=\frac{1}{2};\ 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$a\neq 0;\ b\neq 0$ т.к $5x-26\neq 1;\ 2x-8\neq 1$.

~~$\log_{(x-4)^2}(5x-26)=1$ при $(x-4)^2=(5x-26)$, $x=6;7$~~

~~$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=1$ при $4(x-4)^2=5x-26$, $x=\varnothing$~~

~~$\log_{(x-4)^2}(5x-26)=\frac{1}{2}$ при $5x-26=x-4$, $x=\frac{11}{2}$~~

~~$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=\frac{1}{2}$ при~~

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=$

$=\frac{1}{2};\ 2;\ -2;\ 1$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\log_2(x-4)=\frac{1}{2}\log_2(x-4)+\frac{1}{2} \\ 2\log_2(x-4)=2\log_2(x-4)+2 \\ 2\log_2(x-4)=-2\log_2(x-4)+2 \\ 2\log_2(x-4)=\log_2(x-4)+1 \end{array}\right. \Rightarrow \log_2(x-4)=-\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ 1$$

$\Rightarrow x=\sqrt[3]{2}+4;\ \frac{1}{\sqrt{2}}+4;\ 6$, но $x>\frac{26}{5}\Rightarrow x=6$

Ответ: 6

~~Чистовик~~ Черновик.

5. $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 2\dfrac{\log_2(x-4)}{\log_2(x-4)+1}$, $x>4;\ x\neq \frac{9}{2}$, $x>\frac{26}{5};\ x\neq\frac{27}{5}$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26) = \dfrac{\log_2(5x-26)}{2\log_2(x-4)}$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = \dfrac{2(\log_2(x-4)+1)}{\log_2(5x-26)}$

$\dfrac{\log_2(5x-26)}{2\log_2(x-4)} \cdot \dfrac{2(\log_2(x-4)+1)}{\log_2(5x-26)} =$

НОД$(a;b;c) = 10$

НОК$(a;b;c) = 2^{17}\cdot 5^{16}$

НОД$(a';b';c') = 1$

НОК$(a';b';c') = 2^{16}\cdot 5^{15}$

a или b или c = 1 иначе НОД $\neq 1$

$\Rightarrow$ Пусть $a' = 1$, $b' = 2^c$ либо $b \vdots 5^{15}$ либо $c \vdots 5^{15}$ и либо $c \vdots 2^{16}$ либо $b \vdots 2^{16}$

~~Если одно~~. Тогда другое число имеет

Если $x = 15$

2^x 2^y

$2^x\cdot 5^y$, $2^z\cdot 5^p$

2^{16}, 5^{15},

$\frac{16}{112}$

$16 \cdot 4 \quad 16 \quad 8$

$9 \quad 16 \quad 2$

$a \cdot b \cdot c = 10 \cdot 2^{17} \cdot 5^{16}$ $a \vdots 10; b \vdots 10; c \vdots 10$

2 3 6

$a \cdot b \cdot c = 2^{18} \cdot 5^{17}$

2 3 6 1; 6

$НОД(a; b; c) = 10 \Rightarrow a = 10 \cdot a_1; b = 10 \cdot b_1; c = 10 \cdot c_1$

$НОД(a_1; b_1; c_1) = 1$

4 6 12

$a = 2^{a_1} \cdot 5^{a_2}$ $a = 10a_1$

$b = 2^{b_1} \cdot 5^{b_1}$ $b = 10b_1$ $НОК(a_1; b_1; c_1) = 2^{16} \cdot 5$

$c = 2^{c_1} \cdot 5^{c_1}$ $c = 10c_1$

8 12 2, 1

~~$a \vdots 10; b \vdots 10; c \vdots 10$~~

$\frac{a}{a+1}; \frac{b}{2a}; \frac{2(a+1)}{b}$ $a = 10a'; b = 10b'; c = 10c'$

$НОД(a'; b'; c') = 1$

~~Если а~~

x y

$НОК(a'; b'; c') = 2^{16} \cdot 5^{15}$

$\frac{x}{y};$

~~Если все числа~~

$a' = 1; b' = 2^{16}; c' = 5^{?}$

$\begin{cases} \frac{x}{y} = x \\ \frac{x}{y} + 1 = y \end{cases}$

~~Одно число~~ $a' = 1$

иначе $НОД \neq 1$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$

$\Rightarrow 2^{16} \cdot$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 16$

$\log_{5x-26}(2x-8)$

Пусть $5x-26 = a$; $x-4 = b$

$\log_{\sqrt{2b}}(b) = 2\log_{2b} b = 2\frac{1}{\log_b 2+}$

$2\frac{\ln(x-4)}{\ln(2x-8)} \cdot \frac{\ln(5x-26)}{}$

$\log_{b^2} a$

$\log_{\sqrt{a}} 2b$

$\begin{cases} x = xy \\ x+y = y^2 \end{cases}$ $y = 1$

$x+1 = 1$

~~Черновик~~ Чистовик Черновик.

5. Пусть $\log_{(x-4)^2}(5x-26)=a$; $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=b$,

тогда $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=\dfrac{\log_{5x-26}(x-4)}{2\log_{5x-26}(2x-8)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)\cdot\log_{(x-4)^2}(5x-26)}$

$=\dfrac{1}{2ab}$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=b\\ a+1=\dfrac{1}{2ab}\end{cases}\\ \begin{cases}a=\dfrac{1}{2ab}\\ b=\dfrac{1}{2ab}+1\end{cases}\\ \begin{cases}b=\dfrac{1}{2ab}\\ a=\dfrac{1}{2ab}+1\end{cases}\end{array}\right.$$

$\left[\ a+1=\dfrac{1}{2a^2}\right.$

$a\cdot b=\log_{x-1}\dfrac{2x-8}{}=$

$=\dfrac{2}{b}$

$2a^2$

$\dfrac{2}{a^2}$

$(a-1)(a^2+2a)$

$(a^2+a)(a-1)$

$=a^3-a^2+2a^2$

$a^3+2a^2-a^2$

$\dfrac{2}{ab}$; a; b

$\dfrac{2}{ab}=a+1$

$2=a^3+a^2$

$a=1$

$a^3+a^2-2=0$

$a^3+a^2-2\ |\ a-1$

$a^3-a^2\quad a^2$

$2a$

$5x-26>0$

$1\sqrt{2}$

~~$\log_2(x-4)$~~

$\dfrac{2a}{a+1}$; $\dfrac{2b}{a}$; $\dfrac{2(a+1)}{b}$

$x-4=2$

x y $\dfrac{4}{xy}$

$(a-1)(a^2+2)=$

$=a^3-a^2+2a-2$

$x=22$

$x=y$

$\dfrac{2a}{a+1}=xy$

$x+1=\dfrac{4}{xy}$

x; y; $\dfrac{4}{xy}$

$x^3+x^2=4$

$x^3+x^2-4=0$

$\dfrac{2b}{a+1}\cdot\dfrac{2(a+1)}{b}=\dfrac{2a}{b}=\dfrac{4}{\frac{2b}{a}}$

a ~~b~~ c $a\cdot c=\dfrac{4}{b}$

$x^2-27x+92=0$

$x^2-32x+64=5x-26$

$x^2-13x+42=0$

$x^2-8x+16=5x-26$

$\log_2(x-4)+1$

$\log_2(x-4)=\dfrac{1}{4};\ -\dfrac{1}{2};\ 1$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-1) = \log_{(x-1)^2}(5x-26)$

$2x-8=1$

$2x=9$

$\frac{\log_2(x-1)}{2\cdot\log_2(x-1)+1} = \frac{\log_2(5x-26)}{2\log_2(x-1)}$

$5x-26>0$

$5x-26=1$

$2\log_{\sqrt{2a}} a\ ;\ \frac{1}{2}\log_a b\ ;\ 2\log_{\sqrt{b}} 2a$

$b = 2\sqrt{a(a+1)}$

$b = \frac{(a+1)^2}{a}$

$b = \frac{4a^2}{a+1}$

$2a^3+2a^2-1=0$

$2a^3+2a^2=1$

$2a(a+1)=1$

$2\log_{2a}a + 2\log_{2a}2 = 2\log_{2a}2a = 2$

$\frac{2a}{a+1} = \frac{\sqrt{a(a+1)}}{a}$

$2\log_{2a} = 2-2\log_{2a}2$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-1) = \log_{(x-1)^2}$

$\frac{\log_2 a}{2\log_2 a+1}\ ;\ \frac{1}{2}\frac{\log_2 b}{\log_2 a}\ ;\ \frac{2\log_2 a+2}{\log_2 b}$

$\log_{\sqrt{2a}} a = \log_{a^2} b$

$2\log_{2a} a = \frac{1}{2}\log_a b$

$\frac{2a}{a+1}\ ;\ \frac{b}{2a}\ ;\ \frac{2(a+1)}{b}$

$\frac{2a}{a+1} = \frac{b}{2a}$

$1+\frac{b}{2a} = \frac{2(a+1)}{b}$

$2a^2 = b(a+1)$

$b = \frac{4a^2}{a+1}$

$a+1 = \frac{1}{2a^2}$

$2a^3+2a^2=1$

$2a^3+2a^2-1=0$

$1+\frac{2a}{a+1} = \frac{2(a+1)^2}{4a^2}$

$\frac{2(a+1)^2}{4a^2}$

$2x^2 = \frac{1}{x}+1$

$\frac{\log_2 a+1}{\log_2 b}$

$\frac{1}{\log_b a+\log_b 2}$

$\frac{\log_2 a}{1+\log_2 a}$

$\frac{1}{\log_2 a+1}$