Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100967**

ID профиля: **872461**

Вариант 20

Чистовик 1 №1 [redacted]

$$S = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5 = \frac{a_1 + a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = 5a + 10d.$$

$$\begin{cases} a_6 \cdot a_{11} > S + 15 \\ a_8 \cdot a_9 < S + 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+5d)(a+10d) > 5a + 10d + 15 \\ (a+7d)(a+8d) < 5a + 10d + 39 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + 15ad + 50d^2 > 5a + 10d + 15 \quad (1) \\ a^2 + 15ad + 56d^2 < 5a + 10d + 39 \quad (2) \end{cases}$$

Переносим все с a на право;

$$\begin{cases} a^2 + 15ad - 5a > -50d^2 + 10d + 15 \\ a^2 + 15ad - 5a < -56d^2 + 10d + 39. \end{cases}$$

$$-50d^2 + 10d + 15 < -56d^2 + 10d + 39.$$

$$6d^2 < 24$$

$d^2 < 4$ $\quad d \in (-2;2)$ тк арифм прогрессия возраст и состоит из целых, нам подходит $d = 1$

Подставим $d=1$ в (1)

$$a^2 + 15a + 50 > 5a + 10 + 15$$

$$a^2 + 10a + 25 > 0$$

$(a+5)^2 > 0.$ $\quad a \neq -5$ $\quad$ Не подходит $a = -5$ тк тогда $(a+5)^2 = 0.$

Подставим во (2)

Гр 1

Чистовик 2

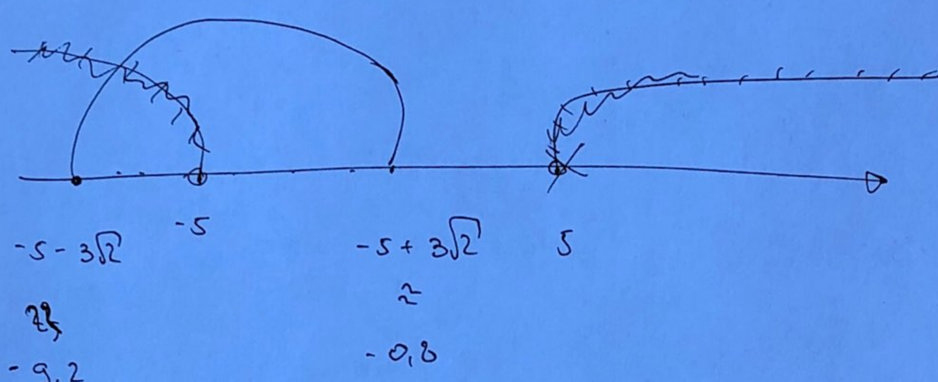
$a^2+15a+56 < 5a+10+39$

$a^2+10a+7<0$

$D = 100-28 = 72 = 3^2\cdot 2^2\cdot 2$

$a_{1,2} = -5 \pm 3\sqrt{2}$

Методом интервалов:



$3\sqrt{2} \sim 3\cdot 1,4 = 4,2.$

ТК $a \in \mathbb{Z}$, то нам подходят след a.

$a \in \{-9, -8, -7, -6, \cancel{-5}, -4, -3, -2, -1\}.$

Ответ: $a \in \{-9, -8, -7, -6, -4, -3, -2, -1\}$

Чистовик 3

№3

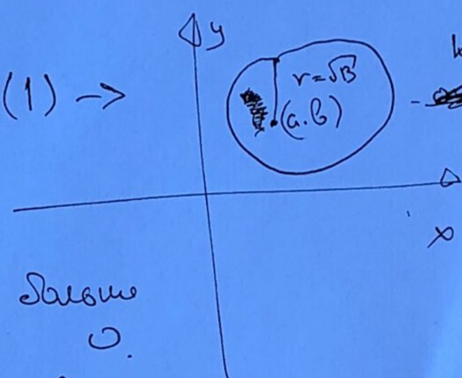
$a, b \in \mathbb{R}$ М- точки в (x, y)

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 13 \quad (1) \\ a^2 + b^2 \le \min(-4a-6b\ ;\ 13) \end{cases}$$

~~Пусть~~

Пусть $-4a-6b < 13$, тогда

$(1) \to$



- круг

а $-4a-6b < 13$

но тк $a^2+b^2 \ge 0$, то

$-4a-6b$ должно быть больше 0.

$$\begin{cases} -4a-6b < 13 \\ -4a-6b > 0 \\ a^2+b^2 \le -4a-6b \end{cases}$$

$b < -\frac{13}{6} - \frac{2}{3}a \quad (1.1)$

$b > -\frac{2}{3}a. \quad (1.2)$

$\to$

$a^2+4a+4-4+b^2+6b+9-9 \le 0$

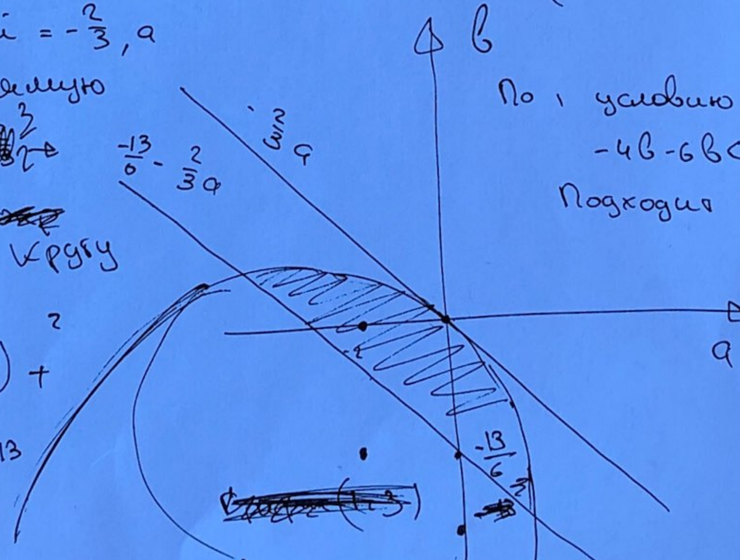
$(a+2)^2 + (b+3)^2 \le 13 \quad (1.3)$

~~Постр~~

тк k для прямой $= -\frac{2}{3}$, а

если проведем прямую из $k(0,0)$ из окр $k = \frac{3}{2}$

$b = -\frac{2}{3}a$ - кас к окружн. кругу



$(a+2)^2 +$

$+ (b+3)^2 \le 13$

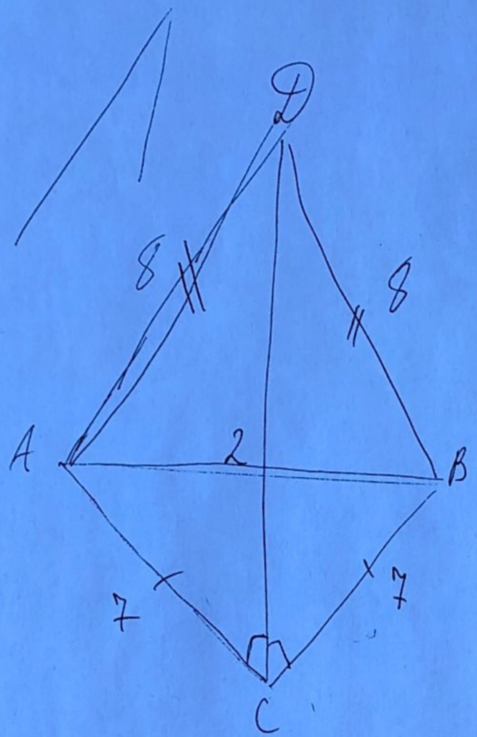
По 1 условию, где

$-4b-6b < 13$

Подходит заштрих обл

Стр 3

Черновик

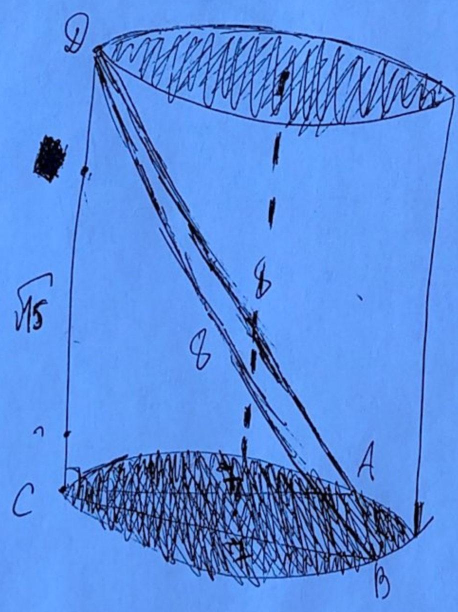


$$\begin{cases} a_6 a_{11} > S + 15 \\ a_8 \cdot a_9 < S + 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+4d)6\,(a_1+4d)11 > S+15 \\ (a_1+4d)8\,(a_1+4d)9 < S+39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+4d)^2\,66 > S+15 \\ (a_1+4d)^2\,72 < S+39 \end{cases}$$

(a_1+4d)



$$S = \frac{(a_1+a_5)}{2}\cdot 5 = \left(\frac{a_1+a_1+4d}{2}\right)5 = 5a_1+10d$$

$P_{ABC} = 16$

$S_{ABC} = \sqrt{8\cdot 1\cdot 1\cdot 6} = 4\sqrt{3}$

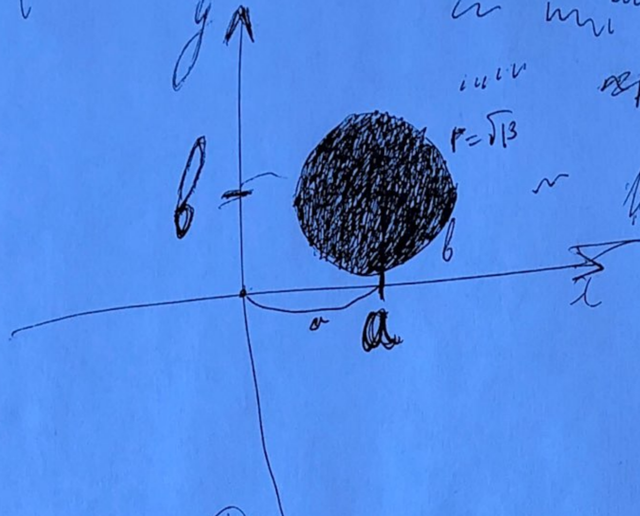
$4\sqrt{3} = \frac{98}{4R}$

$16\sqrt{3}R = 98$

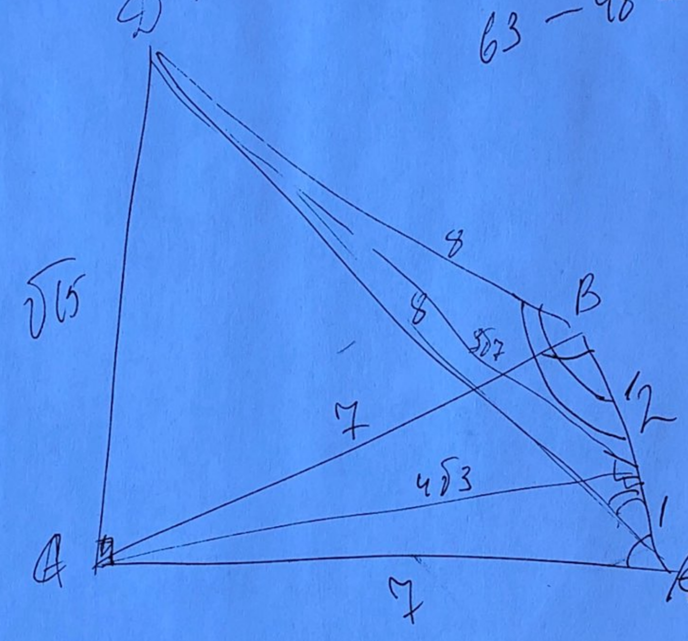
$R = \frac{49}{8\sqrt{3}}$

Черновик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13\\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b, 13)\end{cases}$$



$63-48=15$



Чистовик 5

$$\frac{AB}{2} = b$$

$$\frac{CD}{2} = a$$

S элипса $= \pi \cdot a \cdot b.$

$Q\left(\frac{6\sqrt{30}-14}{13} ; \frac{-21-4\sqrt{13}}{13} \right)$

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{\left(\frac{12\sqrt{30}}{13}\right)^2 + \left(\frac{8\sqrt{30}}{13}\right)^2}$$

считаем и подстав.

$$S = \pi \cdot a \cdot b$$

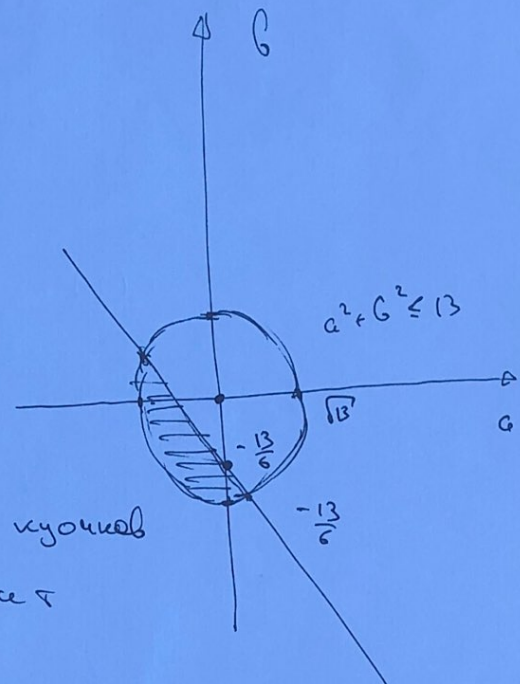
$$a = \frac{1}{2} \cdot |\overline{PQ}| = \cancel{\ldots} + \sqrt{13}.$$

$$b = \sqrt{13} + \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Ответ: $S = \frac{\pi}{2}$. $\sqrt{\frac{208 \cdot 30}{13 \cdot 2}} \cdot \left(\frac{3\sqrt{13}}{2} \right) \cdot \pi$

Пусть $-4a-6b \geq 13$ Чистовик 4.

$$\begin{cases} -4a-6b \geq 13 \ (1) \\ a^2+b^2 \leq 13 \ (2) \end{cases} \qquad b = -\frac{13}{6} - \frac{2}{3}a$$



Значит a, b может лежать внутри этих кусочков заштрихованных, значит центры ~~окр~~ кругов

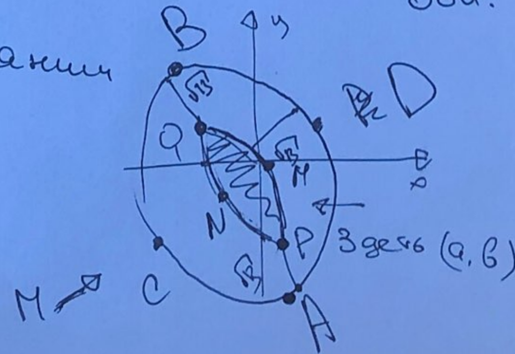
$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 13$ будут лежать в этой обл.

тк функция $\min(-4a-6b; 13)$ - непрерывна, то заштрихованная обл.

$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 13$ - круг у которого центры (a,b) лежат в обл.

Значит M - область на расстоянии $\sqrt{13}$ от обл для (a,b)

Получим эллипс



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100967**

ID профиля: **872461**

Вариант 20

№ 4 Чистовик 1

НОД $= 10 = 2^1 \cdot 5^1$

НОК $= 2^{17} \cdot 5^{16}$

2 Условия для a, b, c

1) a, b, c не содержит одновременно и 2 и 5ку, т.к тогда НОД будет не 10, а 2 или 5 соответств.

2) a, b, c не содержит делителей отличных от $2^a \cdot 5^d$, т.к тогда и нод и нок будет содержать еще что-то

1 тип, который нам подходит:

2^{d_1} или 5^{d_1} что бы НОК был $2^{17} \cdot 5^{16}$

2^{d_2} $\quad 5^{d_4}$ $\quad d_1 = 17$ $\quad d_2 \in (0, 17)$

5^{d_3} $\quad 5^{d_3}$ $\quad d_3 = 16$

$d_4 \in (0, 16)$

и тк нам нужны тройки возмем $3! = 6$ перестановок.

те подходит: $6 \cdot 15 + 6 \cdot 16 - 1$ тип $= 186$

2 тип

$2^{d_1} = 2^{d_2} = 2^{17}$ или $2^{d_1} = 2^{17}$

$5^{d_3} = 5^{16}$ $\quad 5^{d_1} = 5^{d_4} = 5^{16}$ таких вариантов по 1 штуке и их перестоновок: 3

$3 + 3$ - 2 тип $= 6$.

Чистовик 2.

3 тип

2^{α_1}

$2^{\alpha_2}5^{\alpha_3}$

5^{α_4}

~~α_4 или α_3~~

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\alpha_4 = 16\\ \alpha_3 = \in [0:16]\end{cases}\\ \begin{cases}\alpha_3 = 16\\ \alpha_3 = \in [0:16]\end{cases}\end{array}\right.$$

1 выбор

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\alpha_1 = 17\\ \alpha_2 \in (0:17]\end{cases}\\ \begin{cases}\alpha_2 = 17\\ \alpha_1 \in (0:17]\end{cases}\end{array}\right.$$

2 выбор

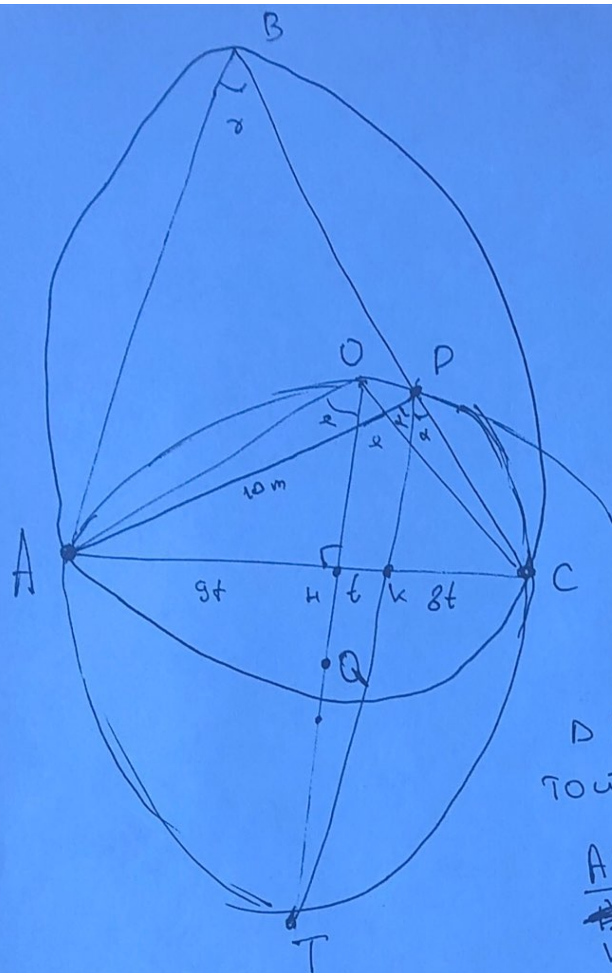
Мы делаем 2 выбора, из 2 состояний системы, тк они симметричные, то всего случаев 4; тут a, b, c - различны, значит ~~каждый~~ их перестановок в 3 ках - $3! = 6$

те

3 тип $= 17 \cdot 16 \cdot 4 \cdot 6 = 6528$

Ответ: $6528 + 186 + 6 = 6720$

Чистовик 3



Дано:

$$\frac{S_{AKP}}{S_{PKC}} = \cancel{8}\,\frac{10}{8}$$

CO - ~~...~~ опис около ABC

Решение

1) Т.к отношение площадей $\triangle AKP$ и $\triangle PKC$ с общ высотой из P на AC $\Rightarrow$ $\frac{AK}{KC} = \frac{10}{8}$; Пусть $AK = 10t$ $KC = 8t$

2) т.к O-центр окр $\Rightarrow$ O лежит на серединном перпендикуляре. Пусть $OH \perp AC$

3) тк касат в точке A и точке C $\Rightarrow$ AO и OC - радиусы $\perp$ касат $\Rightarrow$ $\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$ $\Rightarrow$ AT и CT пересек окр в точках образующих диаметр с точкой O.

тк AT и TC - отрезки касат $\Rightarrow$ они равны $\to$ $T \in$ серед. перпендикуляр OH.

4) Значит $T \in$ окр опис около AOC

5) $OH \perp AC$ и AOC - равнобедр $\Rightarrow$ $HA = HC = 9t \to HK = t$

6) Пусть $\angle ABC = \alpha \to \cup AC$ окр около ABC $= 2\alpha \to \angle AOC = 2\alpha$

Чистовик 4

тк $\angle AOC$ - центральный $\to$ $\cup AT = \cup TC = 2\alpha$ тк $\angle AOC$ -

впис во 2 окр, тк ~~ОТ~~ - биссиктр

и ОН - биссиктр

7) Впис ~~углы~~ $\angle APT$ и $\angle CPT$ - опираються на $\cup AT$ и $\cup CT$ $\Rightarrow$ $\angle APT = \angle CPT = \alpha$

Значит $AB \parallel PT$ (соответств углы $\angle ABC = \angle TPC = \alpha$)

8) ~~тогда~~ ~~$AB \parallel$~~ тогда $\triangle KCP \sim \triangle ABC$ ($\angle C$ - общ,

$\frac{BC}{PC} = \frac{AC}{KC} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$)) тк $S_{KPC} = 8 \Rightarrow \frac{S_{KPC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$

$\frac{16}{81} = \frac{8}{S_{ABC}} \Rightarrow S_{ABC} = 40{,}5$

Пункт б

$\operatorname{arcctg} ABC = \frac{1}{2} \to \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ $\alpha < 45$.

$\operatorname{tg}^2 + 1 = \frac{5}{4} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{4}{5}$ $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \to \sin 2\alpha = \frac{4}{5}$

тк $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \alpha < 45^0 \Rightarrow 2\alpha < 90^0$

$S_{ABC} = 18 = \frac{1}{2} AP \cdot PC \cdot \sin 2\alpha =$ $\frac{AP}{PC} = \frac{10}{8}$ те PT-бисс

$\angle APC$ из пункта а.

Чистовик 5

$\Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{10}^{2} m \cdot 8m \cdot \frac{4}{\cancel{5}} = 16$

$m^2 = \frac{16}{2 \cdot 16} = \frac{9}{16} \Rightarrow m = \frac{3}{4}.$

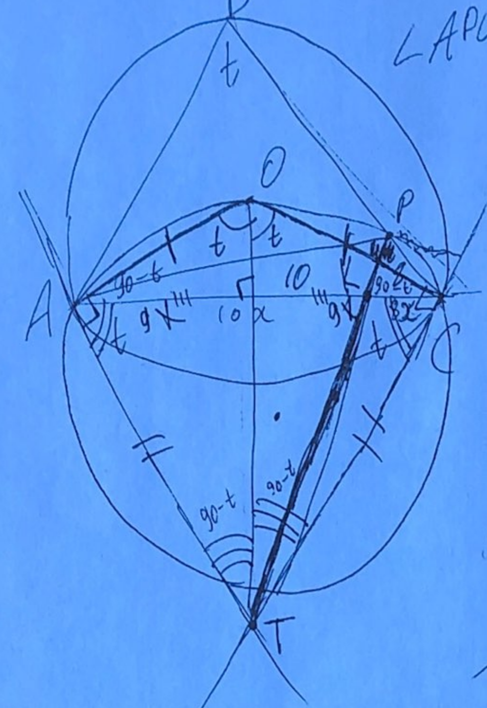
По т. ~~cos~~ косинусов $\triangle ADC$ $(AC)^2 = (10m)^2 + (8m)^2 - 2 \cdot 10m \cdot 8m \cdot \frac{3}{5}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow AC^2 = 164m^2 - 66m^2 = 68m^2$

$AC = m\sqrt{68} = \frac{3}{4}\sqrt{68}.$

Ответ: 40,5; $\frac{3}{4}\sqrt{68}$

ЧЕРНОВИК



$\angle APC = 2t$

$S_{\triangle APK} = 10$

$S_{\triangle CPK} = 8$ $\Rightarrow S_{\triangle APC} = 18$

$AT = CT$

Вокруг AOCT можно описать окр.

$\sin t = \frac{9x}{R_1}$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$; $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$; $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$\sqrt{2x-8} = t$, $t \geq 0$, $x \geq 4$, $t^2 = 2x-8 \Rightarrow \frac{t^2}{2} = x-4$

$x - 4 = y \Rightarrow y \geq 0$

$\sqrt{5x-26} = m$, $m \geq 0$

$\log_{t^2} y$ $\log_{y^2} m^2$ $\log_m t^2$

$$\begin{cases} \log_{t^2} y = \log_{y^2} m^2 \\ \log_m t^2 = \log_{y^2} m^2 + 1 = \log_{y^2}(y^2 m^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (t^2 - y^2 - 1)(y - m^2) = 0 \\ (m - y^2 - 1)(t^2 - m^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

$t^2 = y^2 + 1 \Rightarrow y = \sqrt{t^2 - 1}$

$y = m^2$

$m = y^2 + 1$

$m = \sqrt{t^2 - 1}$ $\Rightarrow$ $y^2 + 1 = \sqrt{t^2 - 1}$

$y^4 + 2y^2 + 2 = t^2$

$\frac{t^2}{2} = y$

$t^2 = 2y$

$y + 1 = \sqrt{2y - 1}$

$y^2 + 2y + 1 = 4y^2 - 4y + 1$

$3y^2 - 6y = 0$

$y = 0$

$y = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x - 4 = 2$

$x = 6$

ЧЕРНОВИК

$$\begin{cases} \log_{t^2} y = \log_m t^2 \\ \log_{y^2} m^2 = \log_{t^2} y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (t^2 - m - 1)(y - t^2) = 0 \\ (y - t^2 - 1)(m^2 - yt^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} t^2 = m + 1 \\ y = t^2 \end{matrix}$$

$x - 4 = 2x - 8$

$x = 4$ $\varnothing$

$2x - 8 = \sqrt{5x - 26} + 1$

$2x - 9 = \sqrt{5x - 26}$

$4x^2 - 36x + 81 = 5x - 26$

$4x^2 - 41x + 107 = 0$

$D = 41 \cdot 41 - 16 \cdot 107 < 0$

$\varnothing$

41×41: $41 + 164 = 1681$

107×16: $642 + 107 = 1712$

$$\begin{cases} \log_{y^2} m^2 = \log_m t^2 \\ \log_{y^2} m^2 = \log_{t^2} y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y^2 - 1 - m)(m^2 - t^2) = 0 \\ (y^2 - t^2 - 1)(m^2 - y - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{matrix} m^2 = t^2 \\ y^2 = m + 1 \end{matrix}\right.$$

$5x - 26 = 2x - 8$

$3x = 18$

$x = 6$

$x^2 - 8x + 16 = \sqrt{5x - 26} + 1$

$36 - 48 + 16 = 2 + 1$

$4 = 3$

$\varnothing$

$2^{17} \cdot 5^{16} = 10^{16} \cdot 2$