Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

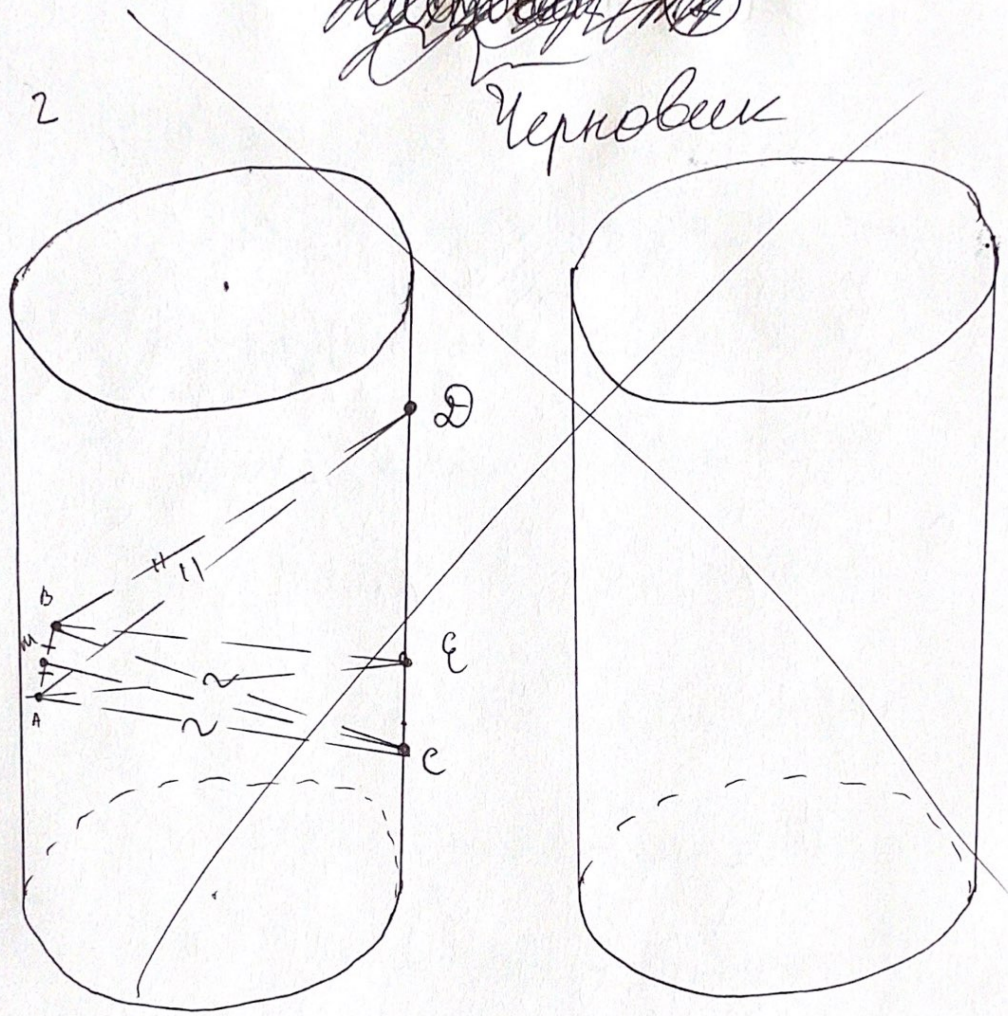
Шифр: **21100772**

ID профиля: **806546**

Вариант 20

№ 2

Черновик



Черновик

$$\cancel{\begin{cases}(t+5d)(t+6d) < 5t+39 \\ (t+3d)(t+8d) > t\cdot 5+39\end{cases}}$$

где $d \geq 1$

$$\begin{cases}(a_1+5d)(a_1+10d) > 5a_1+10d+15 \\ (a_1+7d)(a_1+8d) < 5a_1+10d+39\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+15a_1d+50d^2 > 5a_1+10d+15 \\ a_1^2+15a_1d+56d^2 < 5a_1+10d+39\end{cases}$$

$d>0$;

$$-\begin{cases}a_1^2+15a_1d+50d^2-5a_1-10d-15>0 \\ a_1^2+15a_1d+56d^2-5a_1-10d-39<0\end{cases}$$

; $a_1 d \in \mathbb{Z}$

$$\cancel{a_1(a_1-10)+10d+(5d-1)}$$

$6d^2 < 24$

$36\cdot 2$
$18\cdot 4$

$d^2 < 4 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow$ подставим в 1 ур.: $a_1^2+15a_1+50-5a_1-10-15>0$

$a_1^2+10a_1+25>0$

$(a_1+5)^2>0 \Rightarrow a \neq -5$

Черновик

Поставим $d=1$ в ур:

$a_1^2+15a_1+56-5a_1-10-39<0$

$a^2+10a_1+17<0$

$D=100-68=32$

$a_{1,2}=\frac{-10\pm\sqrt{32}}{2}=-5\pm\sqrt{8}$

$-5-\sqrt{8}$ $-5+\sqrt{8}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow a=-7,-6,-5,-4,-3$ –

$D=$ a^2+10a_1+7 ; -0

Черновик

3) Когда CD ~~ниже~~ выше $\triangle ABE$:

$CD = DE - CE$ ~~$ABCE$~~;

$ME = \cancel{AM}\ \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$MC = \sqrt{49-1} = \sqrt{48} \Rightarrow CE = 48 - 3 = \sqrt{45}$

~~$DE =$~~ $MD = \sqrt{64-1} = \sqrt{63} \Rightarrow DE = 63 - 3 = \sqrt{60}$

$\Rightarrow CD = \sqrt{60} - \sqrt{45} = \sqrt{12\cdot5} - \sqrt{9\cdot5} = 2\sqrt{15} - 3\sqrt{5} =$

$= \cancel{3\sqrt{5}(2\sqrt{3}-1)} = \sqrt{5}(2\sqrt{3} - 3)$

4) Когда ~~CD ниже $\triangle ABE$~~ $\triangle ABE$ между точками C и D:

$MD = \sqrt{63}$

$MC = \sqrt{48}$ $\Rightarrow DE = \sqrt{60}$, $EC = \sqrt{45}$ $\Rightarrow DC =$

$ME = \sqrt{3}$

$= \sqrt{60} + \sqrt{45} = \cancel{3\sqrt{5}}$

$= 2\sqrt{15} + 3\sqrt{5} = \sqrt{5}(2\sqrt{3} + 3)$

Ответ: $\sqrt{5}(2\sqrt{3} \pm 3)$

Черновик

№1

S - сумма $a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5$ в $\mathbb{Z}$;

a_1 - ?, все

$$\begin{cases} a_6 \cdot a_{11} > S + 15 \\ a_8 \cdot a_9 < S + 39 \end{cases}$$

$a_1 = -1$

d - разница последующ

1) ~~$d = 1 \Rightarrow S = \frac{1+11}{2} \cdot 11 = 66 \Rightarrow d = -1 \cdot S = \frac{-1-5}{2} \cdot 5 = -15 \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow a_6 \cdot a_{11} >$~~

~~т.к при $a_1 < 0$ и $d < 0$ арифмет. прогрессия уменьш., а~~

2) произвед. двух соед. членов прогр.

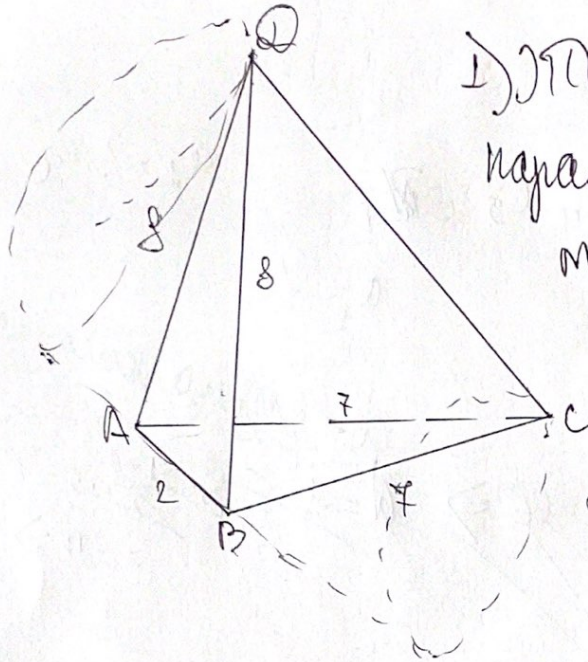
$$\begin{cases} (a_1 + 7d)(a_1 + 8d) < \frac{a_1 + a_1 + 4d}{2} \cdot 5 + 39 \\ (a_1 + 5d)(a_1 + 10d) > \frac{a_1 + a_1 + 4d}{2} \cdot 5 + 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1 + 7d)(a_1 + 8d) < (a_1 + 2d)5 + 39 \\ (a_1 + 5d)(a_1 + 10d) > (a_1 + 2d)5 + 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1 + 7d)(a_1 + 8d) < 5a_1 + 10d + 39 \\ (a_1 + 5d)(a_1 + 10d) > 5a_1 + 10d + 15 \end{cases}$$

Черновик 2

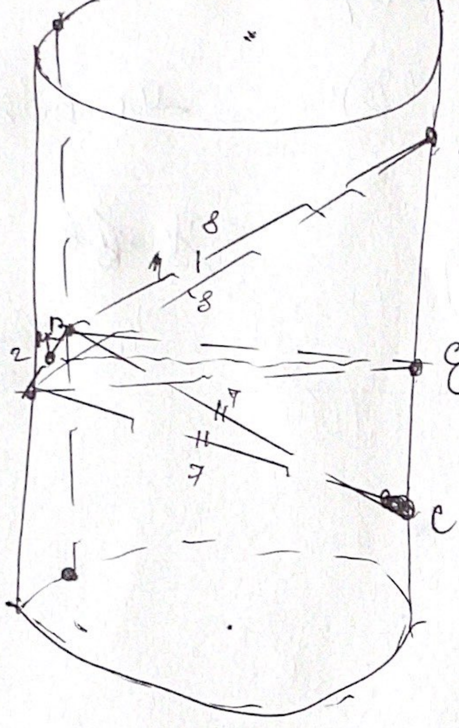
№2

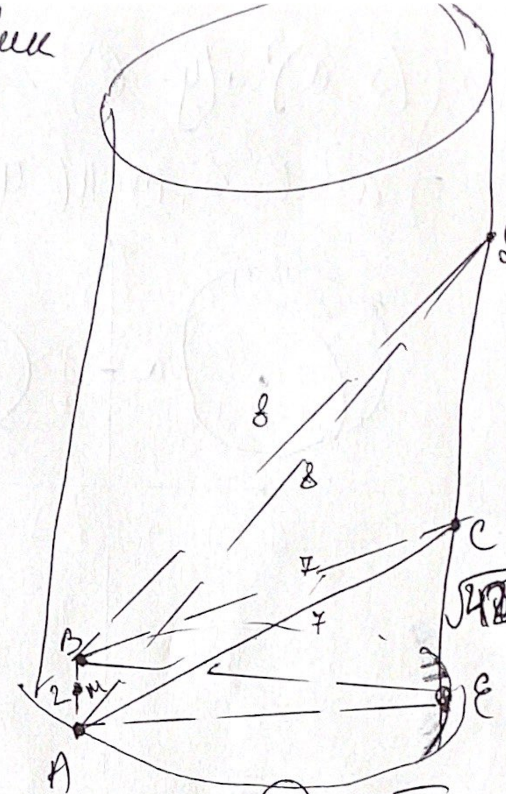


1) Т.к. ребро CD ~~лежит~~ паралл. оси цилиндра, а точки C и D лежат на бок. пов. => CD лежит на бок. пов.

2)

Черновик





$CD = \sqrt{47} + \sqrt{62}$

1) Проведем плоскость $ABE \parallel$ основан. цил.
$\Rightarrow$ радиус цилиндра будет наименьш., когда $\triangle ABE$ – равносторон. $\Rightarrow$ т.к.
$AB = 2$, тогда в $\triangle ABC$: $R = \frac{2\cdot 2\cdot 2}{4\cdot\frac{4\sqrt{3}}{4}} = \frac{8}{4\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

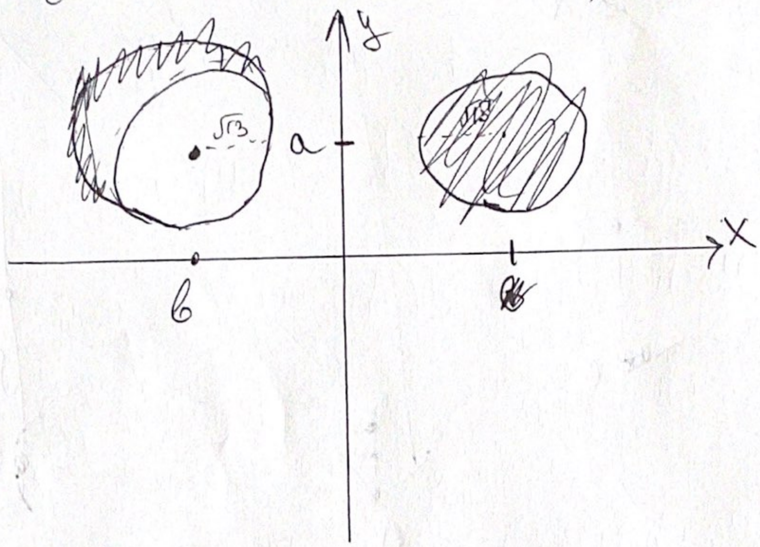
2) Т.к. расстояние до точек C и D одинак. от A и B $\Rightarrow$ сер AB – точка M является точкой падения высоты в $\triangle ABD$ и $\triangle ABC$ (т.к. $\triangle ABD$ и $\triangle ABC$ – равнобедр.)

3) ~~Т.к.~~ Длина CD будет иметь два вар; когда $\triangle ABE$ ниже точек C и D, и когда между
нижне

Черновик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b, 13)\end{cases}$$

$-4a-6b \geq 0$



$\cancel{4a+6b}$

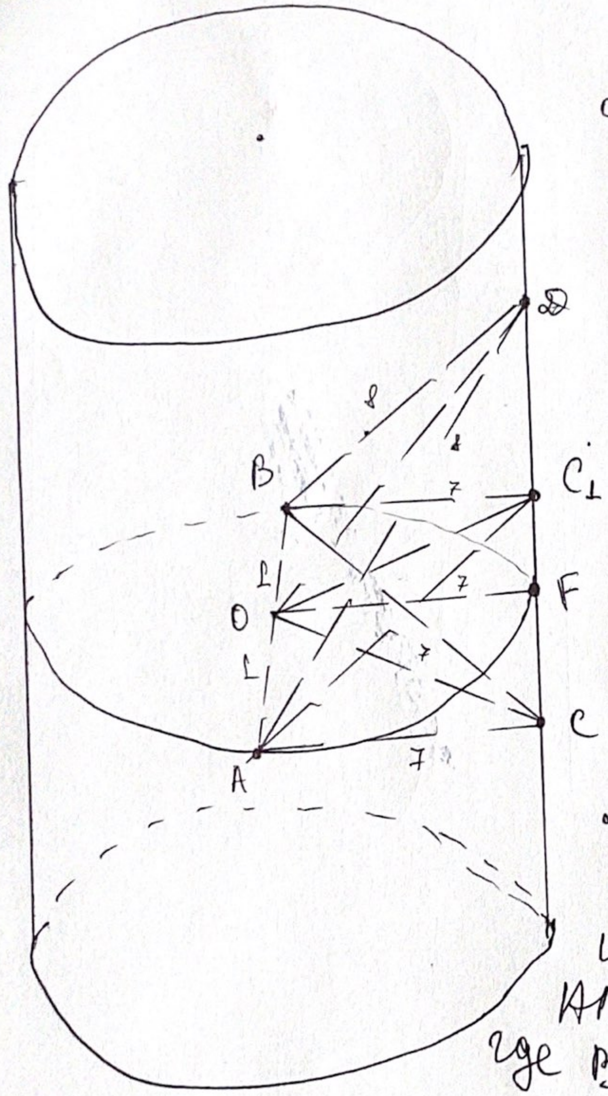
$4a+6b \leq 0$

№1

$S = a_1 + a_2 \ldots + a_5 = 10d + 5a_1$

Чистовик ① ; Вариант 20

№2



Дано: $AB = 2$; $BD = AD = 8$; $AC = BC = 7$; $ABCD$ - тетр вписан в цилиндр, где A, B, C, D лежат на бок.

Найти: CD - ?

Решение:

1) Длина CD будет иметь два варианта: когда CD выше прямой AB, и когда AB находится между точек C и D. Назовем точки C_1, ту которая лежит выше AB и найдем DC_1 и DC, где $BC_1 = AC_1 = 7$

2) ~~Т.к~~ Наименьший радиус у окруж. будет тогда, когда AB - диаметр $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ O - центр. $\Rightarrow$ $R = OB = OA = \frac{AB}{2} = 1$

3) Т.к. ΔABD; ΔABC_1; и ΔABC - равнобедр., тогда OD, OC_1; OC - их высоты (т.к. O - центр AB)

$\Rightarrow$ Найдем их по т. Пифагора:

Чистовик ②

$OD = \sqrt{BD^2 - OB^2} = \sqrt{64-1} = \sqrt{63}$

$OC = OC_1 = \sqrt{BC^2 - OB^2} = \sqrt{49-1} = \sqrt{48}$

4) Проведем радиус OF на прямую CD $\Rightarrow$

$\Rightarrow CD = CF + FD$ $\Rightarrow$ По т. Пифаг.:

$C_1D = FD - FC_1$

$FD = \sqrt{OD^2 - OF^2} = \sqrt{63-1} = \sqrt{62}$ $\Rightarrow$

$CF = \sqrt{OC^2 - OF^2} = \sqrt{48-1} = \sqrt{47}$

$\Rightarrow$ ~~длина~~ $CD = \sqrt{62} + \sqrt{47}$

$C_1D = \sqrt{62} - \sqrt{47}$ - длина CD в 2 вар.

Отв: $CD = \sqrt{62} \pm \sqrt{47}$

№1

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) \ldots + a_1 + 4d =$

$= 5a_1 + 10d$, где $d \geq 1$, $a_1, a_1 \ldots, a_n, \in \mathbb{Z}; d \in \mathbb{N}$

По услов.:

$\begin{cases} a_6 \cdot a_{11} > S + 15 \\ a_8 \cdot a_9 < S + 39 \end{cases}$ $\begin{cases} (a_1 + 5d)(a_1 + 10d) > 5a_1 + 10d + 15 \\ (a_1 + 7d)(a_1 + 8d) < 5a_1 + 10d + 39 \end{cases}$

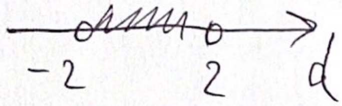
$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 - 5a_1 - 10d - 15 > 0 \\ a_1^2 + 15a_1d + 56d^2 - 5a_1 - 10d - 39 < 0 \end{cases}$

Чистовик (3)

Вычтем из 2 ур. первое:

$$6d^2 < 24$$

$$d^2 < 4$$



$\Rightarrow$ т.к. $d < 2$, но $d \geq 1$,

тогда $d = 1$ $\Rightarrow$ 1) Поставим $d = 1$ в 1 ур:

$$a_1^2 + 15a_1 + 50 - 5a_1 - 10 - 15 > 0$$

$$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$$

$$(a_1 + 5)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -5$$

2) Подставим $d = 1$ в 2 ур:

$$a_1^2 + 15a_1 + 56 - 5a_1 - 10 - 39 < 0$$

$$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$$

$$D = 100 - 28 = 72$$

$$a_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{72}}{2} = -5 \pm \sqrt{18} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 \in (-5-\sqrt{18}; -5) \cup (-5; -5+\sqrt{18})$, но т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$,

то $a_1 = -9$; $a_1 = -8$; $a_1 = -7$; $a_1 = -6$; $a_1 = -4$; $a_1 = -3$;
$a_1 = -2$; $a_1 = -1$

Отв: $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Часть 2

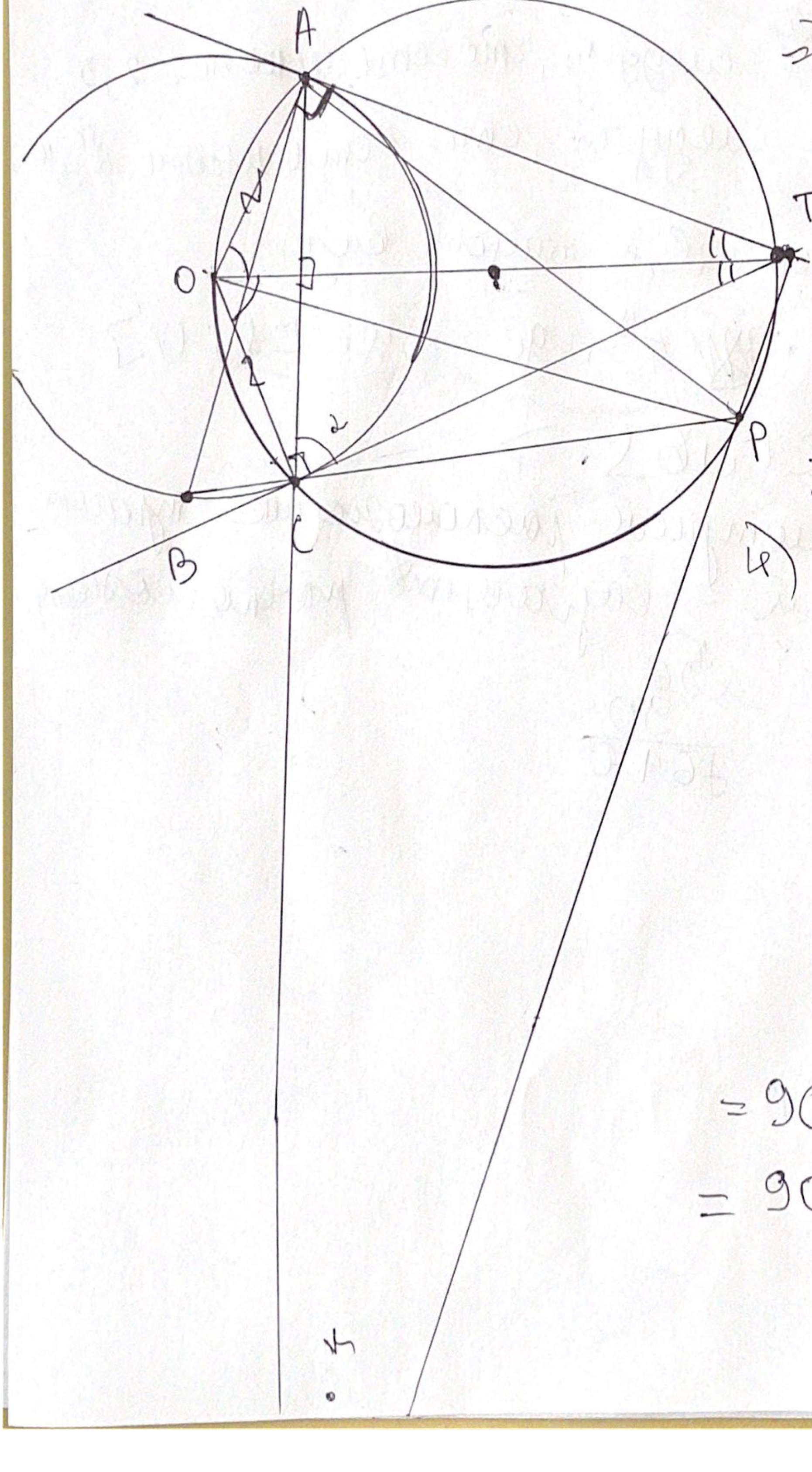
Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100772**

ID профиля: **806546**

Вариант 20

Черновик



1) $S_{APK} = 10$; $S_{CPK} = 8$ ⇒

⇒ $S_{ACP} = 2$ ⇒

2) OT – диаметр (т.к. $OA \perp AT$; $OC \perp OT$)

3) $\triangle AOT = \triangle OCT$

4)

$\boxed{8640}$

8064 ???

$15 \cdot 6 = 90 =$

$14 \cdot 6 = 84$

$= 96$

$= 90$

$$\begin{array}{r} 96 \\ \times\ 90 \\ \hline 8640 \end{array}$$

№4 Черновик

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=10 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$$

1) Из НОД следует, что есть множ. 2,5

2) Из НОК следует, что есть множ. $2^{17}; 5^{16}$

3) Числа a,b,c имеют вид

$2^x\cdot 5^y$, где $x,y\in[1;17]$

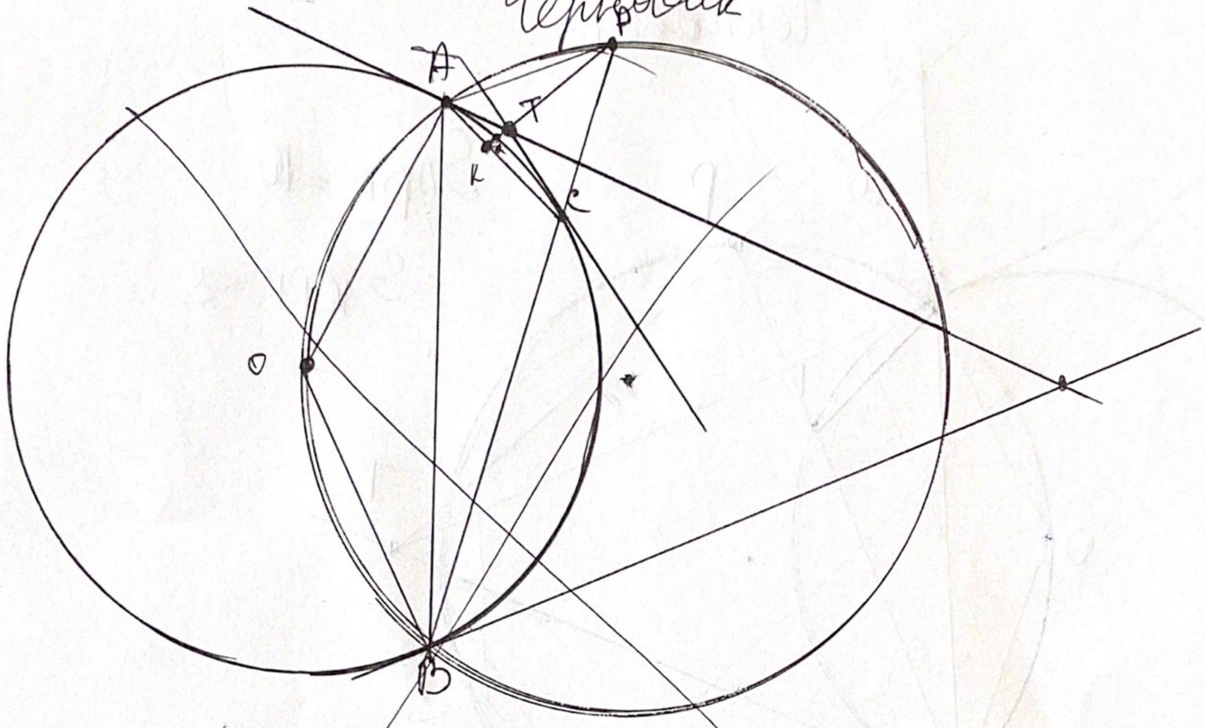
$y\in[1;16]\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Рассмотрим расположение троек степеней $\Rightarrow$ вариантов расположения

$3!=6$

$$\begin{array}{r} \times 96 \\ 90 \\ \hline 1640 \end{array}$$

Черновик

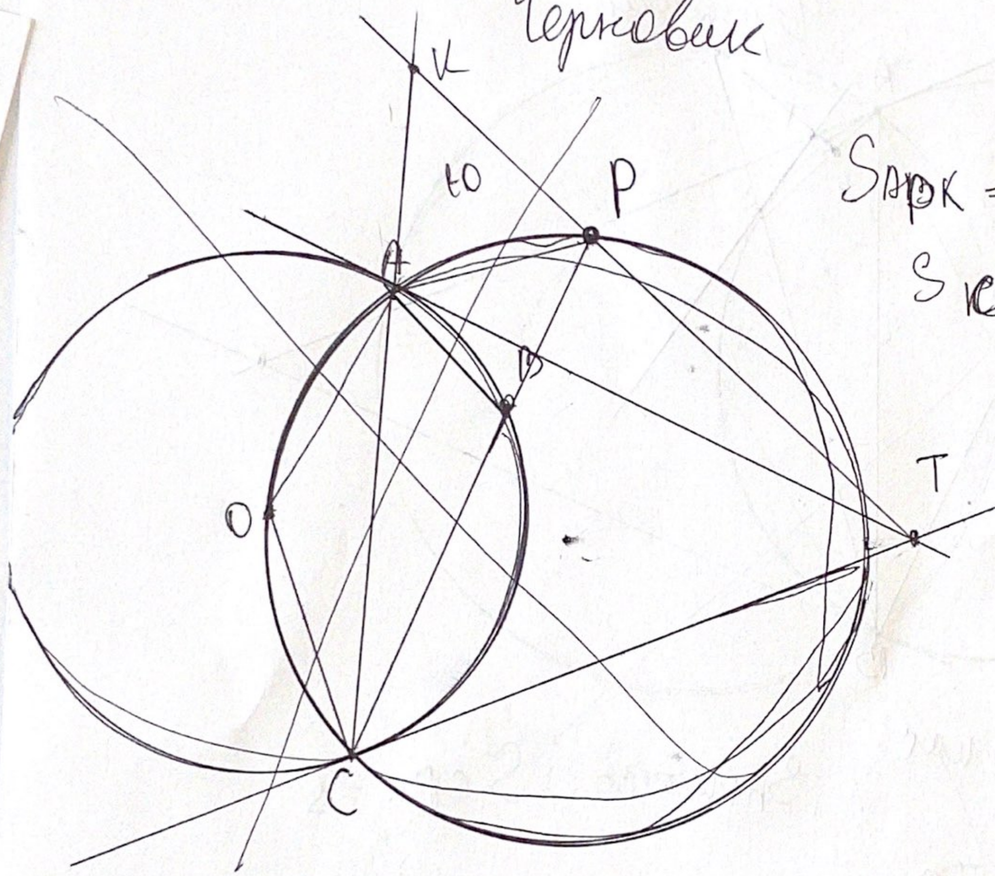


TC, TA - кас.

; $S_{APK} = 10$; $S_{CPK} = 8$

1) TC, TA - кас $\Rightarrow$

Черновик



$S_{APK} = 10$

$S_{KCPK} = 8$

Черновик

№4

$$\begin{cases} \text{НОД}(a, b, c) = 10 \\ \text{НОК}(a, b, c) = 2^{17} \cdot 25^{6} \end{cases}$$

$x - ?$; $\log = \log < \log + 1$

№5

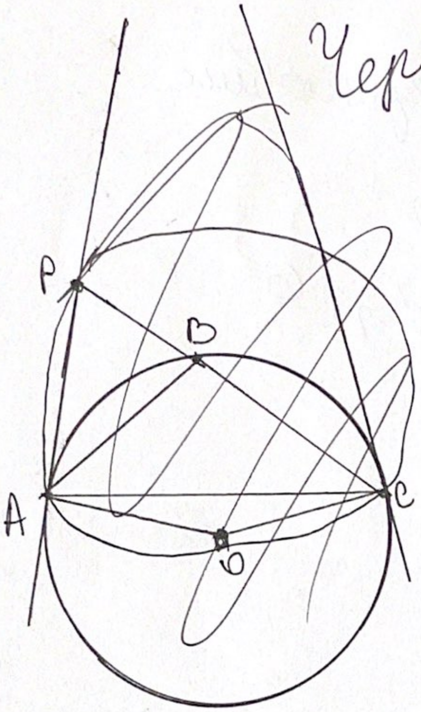
$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$; $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$;

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ x > 4 \\ x > 5\frac{1}{5} \\ 2x \neq 9 \\ 5x \neq 27 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq 5 \\ x > 4 \\ x > 5\frac{1}{5} \\ x \neq 4{,}5 \\ x \neq \frac{27}{5} \end{cases}$$

Черновик



Черновик

ОДЗ: $\begin{cases} x > \frac{26}{5} \\ x \neq \frac{27}{5} \end{cases}$

1) $2\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) \le \log_{(x-4)^2}(5x-26) + 1$

$$\frac{2}{\log_{x-4}\sqrt{2x-8}} \le \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26) + 1$$

$$\frac{2}{\log_{x-4}\sqrt{2x-8}} \le \log_{(x-4)}\sqrt{5x-26} + 1$$

2) $2\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) \le \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$

$\log_4 4 \cdot \log_4 2 =$

$= 1 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_4 16 \cdot \log$

$$\frac{2}{\frac{1}{2}\log_{(2x-8)}(5x-26)} = \cancel{2}\log(x-4)$$

$$\frac{2}{\log_{(2x-8)}(5x-26)} = \log_{(2x-8)}(x-4$$

$$\log_{(2x-8)}(5x-26) \cdot \log_{(2x-8)}(x-4) = 2$$

Черновик

$$\begin{cases} x \geq \frac{26}{5} \\ x \neq \frac{27}{5} \end{cases}$$

$$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 2\log_{(x-4)}(x-4)$$

$$\log_{(x-4)^2}(5x-26) = \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-2\ldots$$

$(x-4)^4$

$$\Rightarrow (x-4)^2 = \sqrt{5x-26}$$

$$5x-26 = (x^2-8x+16)(x^2-8x+16)$$

$$5x-26 = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 8x^3 - 128x + 64x^2 + 16x^2 - 128x + 256$$

$$x^4 - 16x^3 + 128x - 98x$$

Чистовик (1)

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=10 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$$

1) Т.к. НОД $=10 \Rightarrow$ имеются множители 2, 5.

2) Т.к. НОК $=2^{17}\cdot 5^{16} \Rightarrow$ имеются множители 2^{17}; 5^{16}

3) Числа a, b, c имеют вид $2^x\cdot 5^y$, где $x\in[1;17]$, $y\in[1;16]$

4) Вариантов расположения троек $3!=6$, а в одном варианте т.к. $x\in[2;16]$ будут 15 вар. $\Rightarrow$ ~~При x=1, либо x=16 рассмотрим варир~~ $\Rightarrow$ их будет $15\cdot 6=90$ вар.

При $x=1$, либо $x=16$ рассмотрим отдельно:

$x=1$: $2^1\cdot 2^1\cdot 2^{16} \Rightarrow 3$ вар.

$x=16$: также, как при $x=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ вариантов $90+3+3=96$

5) Для 5 аналогично: $3!=6 \Rightarrow$

$\Rightarrow y\in[2;15]$: $6\cdot 14=84$ вар.

Для $y=1$; $y=16$: $3+3=6$ вар.

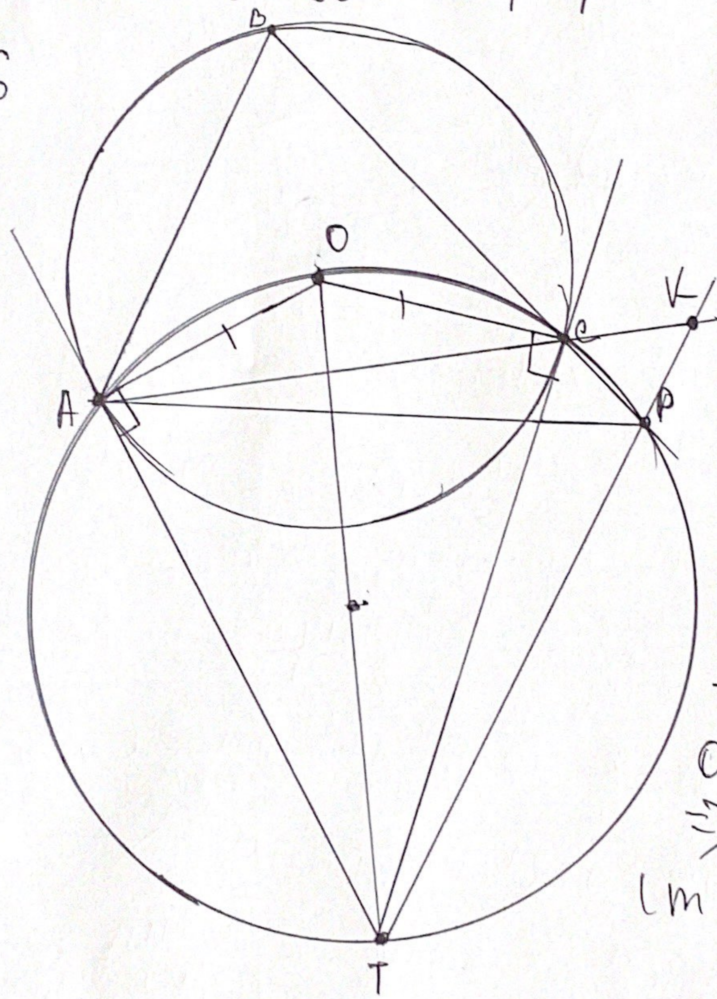
$\Rightarrow$ всего 90 вар $\Rightarrow$

Чистовик (2)

$\Rightarrow$ всего для xny будет $90 \cdot 96 =$
$= 8640$ вар.

Отв: 8640 вар. троек

№ 6



Дано: TA, TC - кас.
$S_{APK} = 10$;
$S_{CPK} = 8$;

Найти: S_{ABC} - ?

Решение:

1) $OA = OC$ (как радиусы) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ т.к. ~~OAT~~
$OA \perp AT$; $OC \perp CT \Rightarrow$
$\Rightarrow OT$ - диаметр
(т.к. $\angle OAT = \angle OCT = 90°$)