Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100505**

ID профиля: **97306**

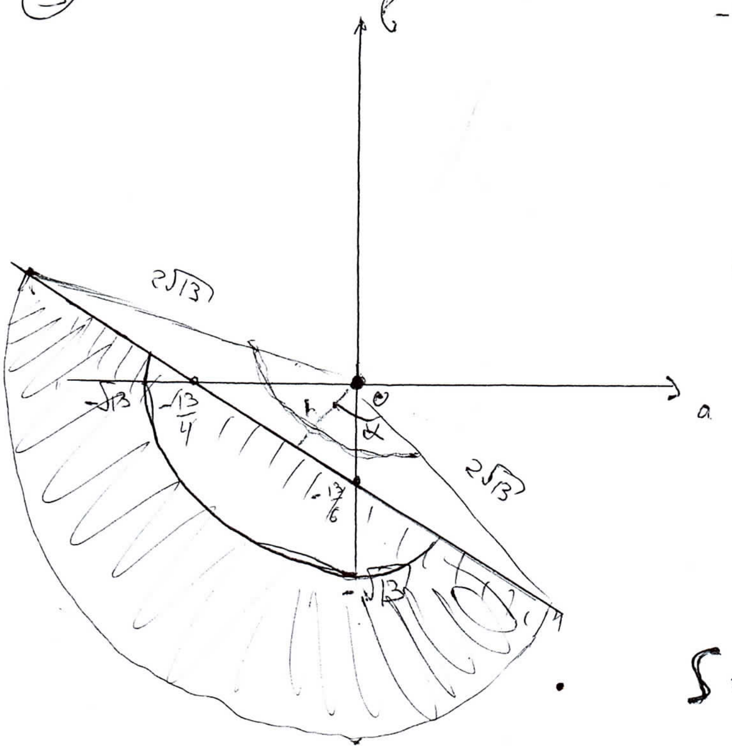
Вариант 20

③

Черновик

$-4a-6b \geq 13$

$b \leq -\frac{4}{6}a-\frac{13}{6}$



$\left(\frac{13}{4}\right)^2+\left(\frac{13}{6}\right)^2=\left(\frac{13}{6}\right)^2(1+2{,}25)=\frac{13^2}{6^2}\cdot\frac{13}{4}=\left(\frac{13}{12}\sqrt{13}\right)^2$

$h=\dfrac{\frac{13}{4}\cdot\frac{13}{6}}{\frac{13}{12}\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{13}}{2}$

$\alpha=\arccos\frac{1}{4}$

$S=\frac{\alpha}{2\pi}\cdot R^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{13}}{2}\cdot\cancel{\sqrt{52}}\cdot\sqrt{(2\sqrt{13})^2-\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2}=$

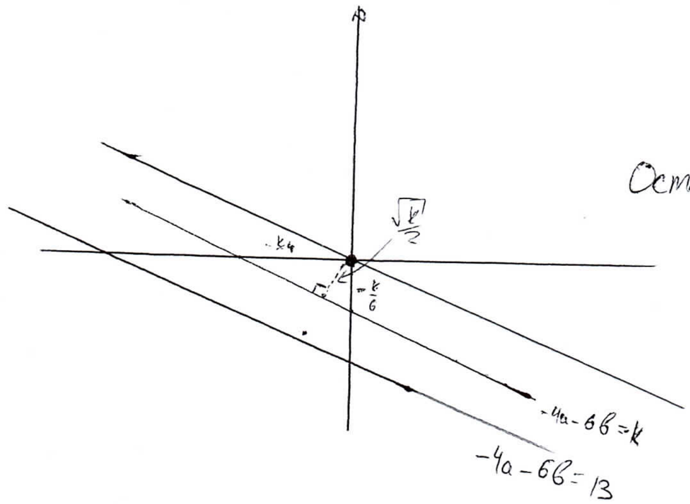
$4-0{,}25=3{,}75=\frac{15}{4}$

$=\frac{\arccos\frac{1}{4}}{2\pi}\cdot 52-\underbrace{\frac{13}{4}\sqrt{15}}$

Вот это слагаемое не нужно!

$-4a-6b\leq 13$

$b\geq -\frac{4}{6}a-\frac{13}{6}$



Остальные части можно получить гомотетией относительно центра с некими коэффициентом

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times\ 25 \\ \hline 65 \\ +\ 26 \\ \hline 325 \end{array}$$

Черновик

(1)

$a_6 \cdot a_{11} > S+15$

$a_8 \cdot a_9 < S+39$

$a_2 = a_1 + d$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$S = 5a_1 + 10d$

$a_6 \cdot a_{11} = (a_1+5d)(a_1+10d) = a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2$

$a_8 \cdot a_9 = (a_1+7d)(a_1+8d) = a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2$

$a_1 \in \mathbb{Z}$
$d \in \mathbb{N}$

$a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15$

$a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39$

$(a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2) + 5a_1 + 10d + 39 > (a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2) + (5a_1 + 10d + 15)$

$6d^2 < 24 \Rightarrow d^2 < 2 \Rightarrow \boxed{d=1}$

$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 + 50 > 5a_1 + 25 \\ a_1^2 + 15a_1 + 56 < 5a_1 + 49 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases}$

$a_1 \neq -5$

$-2 > a_1 > -5$

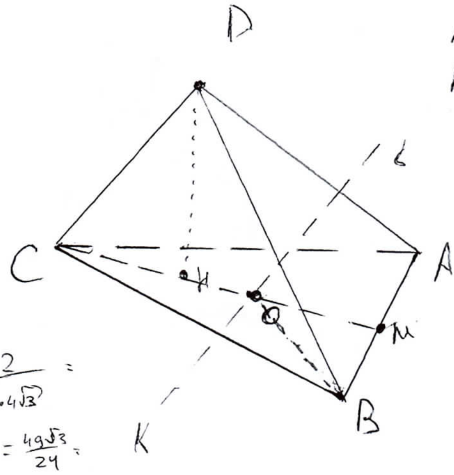
$a_1 = -3$ и $a_1 = -4$

(2)

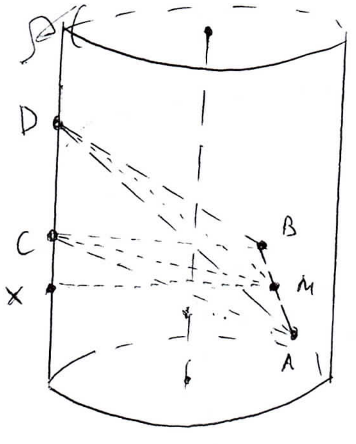
$AC = BC = 7$
$AD = BD = 8$
$AB = 2$

$CD \perp AB$ по ТТП

$DH \perp (ABC)$; $M \in (CH)$



$R = \frac{abc}{4S} = \frac{7\cdot7\cdot2}{4\cdot\frac{1}{2}\cdot2\cdot4\sqrt3} = \frac{49}{8\sqrt3} = \frac{49\sqrt3}{24} = 2\sqrt3 + \frac{\sqrt3}{24}$



$CM = \sqrt{48} = 4\sqrt3$

$DM = \sqrt{63} = 3\sqrt7$

$\cancel{\cos\angle} =$

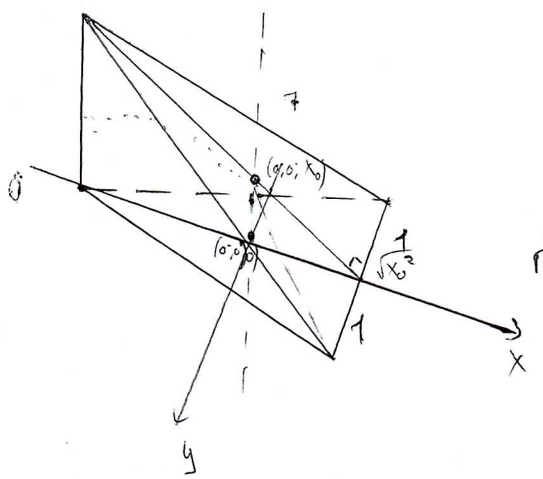
$\cos XMC = \frac{X}{4\sqrt3}$

$\cos XMD = \frac{X}{3\sqrt3}$

$\sin XMC = \frac{\sqrt{48-X^2}}{4\sqrt3}$

$\sin XMD = \frac{\sqrt{63-X^2}}{3\sqrt7}$

$\sqrt{63-X^2} = CD + \sqrt{48-X^2}$



Чистовик.

№1.

$a_2 = a_1 + d;\ a_3 = a_1 + 2d;\ a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_6 = a_1 + 5d;\ a_{11} = a_1 + 10d;\ a_8 = a_1 + 7d;\ a_9 = a_1 + 8d$

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5a_1 + 10d$

$a_6 \cdot a_{11} > S + 15 \iff a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15$

$S + 39 > a_8 \cdot a_9 \iff 5a_1 + 10d + 39 > a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2$

Сложим получившиеся неравенства

$$(\cancel{a_1^2} + \cancel{15a_1 d} + 50d^2) + (\cancel{5a_1} + \cancel{10d} + 39) > (\cancel{5a_1} + \cancel{10d} + 15) + (\cancel{a_1^2} + \cancel{15a_1 d} + 56d^2)$$

$$6d^2 < 24$$

$$d^2 < 4$$

Так как все члены прогрессии — целые числа, то d — целое

Так как прогрессия возрастает, то d — натуральное

Значит, $d = 1$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 + 50 > 5a_1 + 10 + 15 \\ 5a_1 + 10 + 39 > a_1^2 + 15a_1 + 56 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 \neq -5 \\ -5 < a_1 < -2 \end{cases}$$

Значит, $a_1 = -4$ или -3.

Ответ: $a_1 = -4$; или $a_1 = -3$.

Чистовик. Страница 2.

№3.

1. Будем рассматривать все $-4a-6b=+k$; $0<k\le 13$, если $k<0$, то таких a и b, что a^2+b^2 не существует, а если $-4a-6b>13$, то 2ое неравенство в системе будет выглядеть как $a^2+b^2\le 13$, что соответствует случаю $k=13$.

2. Рассмотрим отдельно $k=13$. Работать будем в координатах AOB

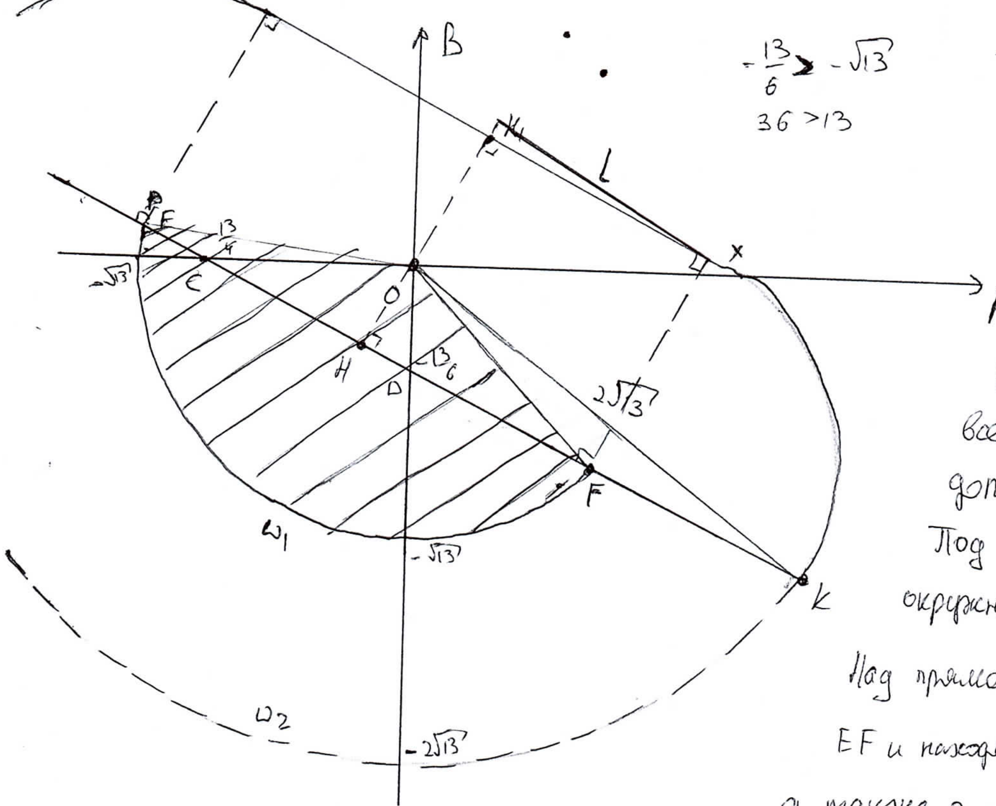
$-4a-6b=13 \Rightarrow b=-\frac{2}{3}a-\frac{13}{6}$

$OH\perp CD$; $OH=\frac{OC\cdot OD}{\sqrt{OD^2+OC^2}}=\frac{\sqrt{13}}{2}$

$-\frac{13}{6}>-\sqrt{13}$
$36>13$

$-\frac{13}{4}>-\sqrt{13}$
$16>13$

$\cos HOK=\frac{1}{4}$



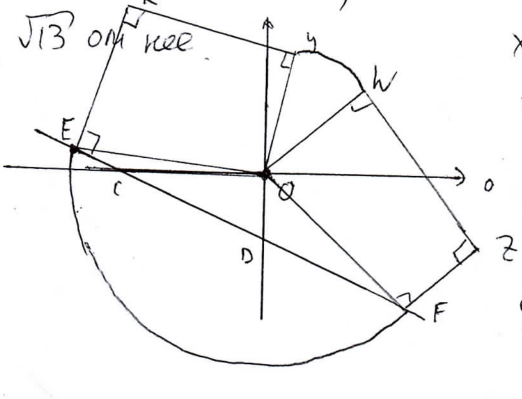
Решением нижнего неравенства в системе будет $\omega_1: a^2+b^2\le 13$ окружность с центром в $O(0;0)$ и радиусом $\sqrt{13}$

Решением верхнего неравенства являются все окружности с центрами в любой допустимой точке $(a;b)$.

Под прямой CD они образуют окружность с радиусом $2\sqrt{13}$;

Над прямой CD: отрезок L, параллельный EF и находящийся на расстоянии $\sqrt{13}$ от него, а также 2 четверти окружности с центрами в точках E и F, а радиусами $\sqrt{13}$.

3. При $k<13$ мы получим почти то же самое расположение прямых и окружностей: Новые точки C_1; D_1; F_1; E_1; … будут располагаться на отрезках соответственно OC; OD; OF, OE. Значит, площадью фигуры M будут все точки внутри заштрихованной области, а также точки, которые расположены на расстоянии не более $\sqrt{13}$ от нее.



$XY\parallel OE$; $XE\parallel YO$; $XE\perp YX$

$WZ\parallel OF$; $WO\parallel FZ$; $WO\perp OF$;

$S_{XYOE}=S_{WZFO}=(\sqrt{13})^2=13$

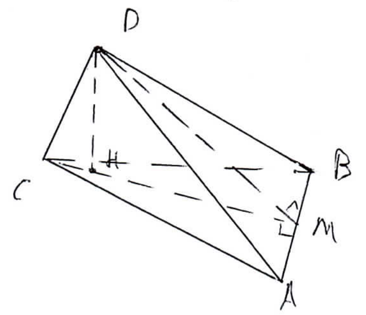
YOW — часть окружности с радиусом $\sqrt{13}$; $\angle YOW=180^\circ-2\arccos\frac{1}{4}$

Площадь того, что под прямой CD и $\triangle EOF=(2\sqrt{13})^2\cdot\frac{2\arccos\frac{1}{4}}{2\pi}=\frac{52\arccos\frac{1}{4}}{\pi}$

$S_M=2\cdot 13+\frac{52\arccos\frac{1}{4}}{\pi}+13\cdot\frac{\pi-2\arccos\frac{1}{4}}{2\pi}=32{,}5+\frac{39\arccos\frac{1}{4}}{\pi}$

Чистовик Страница 3

№2.



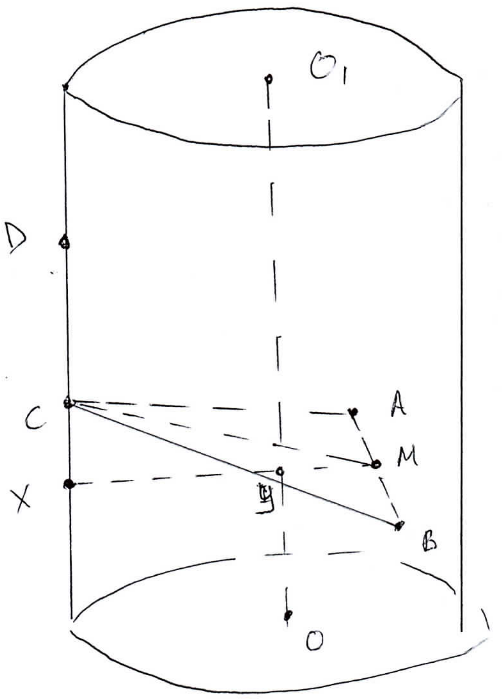
M - середина AB

Тогда $CM \perp AB$ ($\triangle ABC$ - р/б) и $DM \perp AB$ ($\triangle ABD$ - р/б)

$DH \perp (ABC)$. $DM \perp AB$; MH - проекция DM на (ABC)

Значит, $MH \perp AB$ и $H \in CM$

$AB \perp DH$ и $AB \perp CM$; $DH \cap CM = H \Rightarrow AB \perp (CDM)$ и $AB \perp CD$



$ABX \perp OO_1$; $OO_1 \cap (ABX) = Y$; Y - центр описанной окружности $\triangle ABX$; $XY = \rho(C; OO_1) = \rho(D; OO_1) =$

$= YA = YB = r_0$ - радиус цилиндра

$CM = \sqrt{AC^2 - AM^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$DM = \sqrt{AD^2 - AM^2} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$

Если C совпадает с X, то $CD = \sqrt{DM^2 - CM^2} = \sqrt{15}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100505**

ID профиля: **97306**

Вариант 20

Чистовик. Страница 1.

№5.

Так как все 3 числа существуют, то запишем ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x-8>0 \\ 2x-8\neq 1 \\ x-4>0 \\ x-4\neq 1 \\ 5x-26>0 \\ 5x-26\neq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>\frac{26}{5} \\ x\neq\frac{27}{5} \end{cases}.$$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=2\log_{2x-8}(x-4)$; $\log_{(x-4)^2}(5x-26)=\frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=2\log_{(5x-26)}(2x-8)$.

Произведение этих чисел $P=2\cdot\log_{(2x-8)}(x-4)\cdot\log_{(x-4)}(5x-26)\cdot\log_{(5x-26)}(2x-8)=2$

Пусть эти числа $a;b;c$. Тогда по условию $b=a$ и $c=a+1$.

$abc=2 \Leftrightarrow \quad a^2(a+1)=2$

$a^3+a^2-2=0$

$(a-1)(a^2+2a+2)=0$

a^2+2a+2 не имеет действительных корней $\Rightarrow a=1$ единств. корень

I. $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=1$

$(x-4)^2=2x-8$

$\left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=6. \end{array}\right.$

$x=4$ не подходит по ОДЗ

$\log_{(x-4)^2}(5x-26)=1$ при $x=6$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=2$ при $x=6$

Все условия выполнены

II. $\log_{(x-4)^2}(5x-26)=1$

$(x-4)^2=5x-26$

$\left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=6 \end{array}\right.$

$x=6$ уже рассмотрели

$x=7$: $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=\log_{\sqrt{6}}3$ – это не 1 и не 2

$x=7$ не подходит.

III. $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=1$

$(2x-8)^2=5x-26$

$4x^2-37x+90=0$

$D=37^2-16\cdot 90=1369-1440<0$

Значит, решений нет

Ответ: $x=6$.

Чистовик. Страница 2.

№4.

НОД $(a; b; c) = 2\cdot 5$

НОК $(a; b; c) = 2^{17}\cdot 5^{16}$

В одном из чисел есть 2^1 и 5^k (то есть $a = 2\cdot 5^k$)

$b = 2^{17}\cdot 5^l$; $c = 2^m\cdot 5^n$; причём $k; l; n$ - одно из этих чисел равно 1, а другое 16.

Все тройки чисел → 3 числа совпадают ∅ (невозможно, иначе НОК = НОД)

↙ 3 числа различны. Вот этот случай рассмотрим подробнее

↘ 2 числа совпадают (это 4 тройки: неупорядоченные $10; 10; 2^{17}\cdot 5^{16}$
$2^{17}\cdot 5^{16}; 2^{17}\cdot 5^{16}; 10$
$2^{17}\cdot 5; 2^{17}\cdot 5; 2\cdot 5^{16}$
$2\cdot 5^{16}; 2\cdot 5^{16}; 2^{17}\cdot 5$)

I. $a = 2\cdot 5^k$
$b = 2^{17}\cdot 5^l$
$c = 5^n\cdot 2^m$
$2\le m\le 16$
$1\le n\le 17$

Таких неупорядоченных троек $15\cdot C_3^2\cdot 16$ → n от 1 до 16
m от 2 до 16; кол-во троек $(k; l; n)$

$N = 15\cdot 16\cdot 3 = 240\cdot 3 = 720$

II. $a = 2\cdot 5^k$
$b = 2^{17}\cdot 5^l$
$c = 2^m\cdot 5^n$
$m = 1$ или 17.

~~Если m = 1, то n Заметим перебором наборов: m = 1:~~

~~$a = 2\cdot 5$, $b = 2^{17}\cdot 5^{17}$, $c = 2\cdot 5^n$, $2\le n\le 17$~~

~~$a = 2\cdot 5^{17}$, $b = 2^{17}\cdot 5$, $c = 2\cdot 5^n$, $1\le n\le 16$~~

~~m = 17: $a = 2\cdot 5$, $b = 2^{17}\cdot 5^{17}$, $c = 2^{17}\cdot 5^n$~~

Надо расставить $2; 5; 2^{17}; 5^{16}$ 2^{17} и 5^n так, чтобы не было совпадающих троек. Возьмём $n = 1$
$a = 2\cdot 5^{17}$
$b = 2\cdot 5$
$c = 2^{17}\cdot 5$
Только одна тройка

Возьмём $n = 16$
$a = 2\cdot 5$
$b = 2\cdot 5^{16}$
$c = 2^{17}\cdot 5^{16}$
Только одна тройка

Теперь рассмотрим $m = 1$ и $n = 2 \dots 15$.

Тогда таких $3\cdot 3\cdot 14 = 126$ вариантов
распределение $2; 2; 2^{17}$; распределение $5; 5^{17}; 5^m$

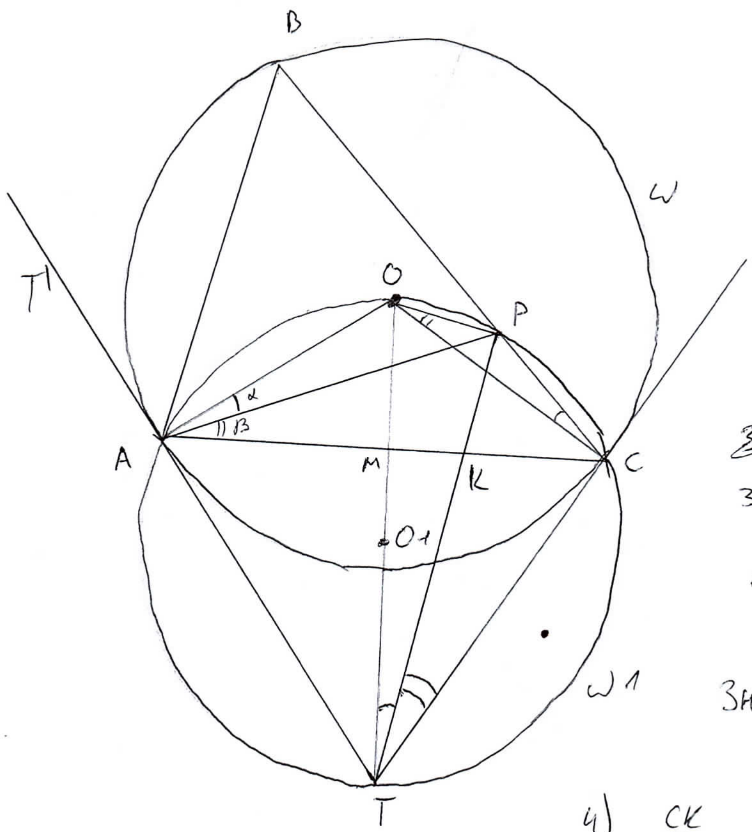
Теперь рассмотрим $m = 17$ и $n = 2\dots 15$.

Таких неупорядоченных троек $3\cdot 3\cdot 14 = 126$

Получилось $4 + (720 + 126\cdot 2 + 2)$ троек
Это неупорядоченных троек.
Упорядоченных будет
$3\cdot 4 + 3\cdot(720 + 126\cdot 2 + 2) = 3(720 + 252 + 6) =$
$= 3\cdot 978 = 2700 + 210 + 24 = 2934$

Ответ: 2934 тройки.

Чистовик. Страница 3.



1) $\triangle OAT$ и $\triangle OCT$ – прямоугольные

2) $\angle OAP=\alpha$; $\angle PAC=\beta$

$\angle AOT = 90^\circ-\alpha-\beta$

$\angle ATO = 90^\circ - \angle AOT = \alpha+\beta$

$\angle ACO=\angle OAC=\alpha+\beta$ ($OA=OC$ – радиусы)

Значит, $T\in\omega_1$ ($\angle ATO=\angle ACO$)

~~3) $\angle T'AB$~~

3) $\angle OAP=\angle OCP=\alpha$ (опираются на $\smile OP$)

$\angle TAB = \angle ACB = 2\alpha+\beta$ (AT' – касательная к ω)

$\angle OTP=\angle OAP=\alpha$ (опираются на $\smile OP$)

Значит $\angle BAT' = \angle PTA = 2\alpha+\beta$

$AB \parallel PT$ и $AB \parallel PK$

4) $\frac{CK}{AK} = \frac{S_{PCK}}{S_{APK}} = \frac{4}{5} \Rightarrow CK = \frac{4}{9}AC$

5) $\triangle PKC \sim \triangle ABC$ ($PK \parallel AB$) $\Rightarrow S_{ABC} = S_{CPK}\cdot\frac{81}{16} = 40{,}5$

6) $\angle AOC = 2\angle AOT = 2(90^\circ-(\alpha+\beta)) \Rightarrow \smile AC = 180^\circ - 2(\alpha+\beta)$

$\angle ABC = \frac{1}{2}\smile AC = 90^\circ-(\alpha+\beta) = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha+\beta = \operatorname{arctg} 2$

$\sin(\alpha+\beta) = \frac{2}{\sqrt5}$; $\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{\sqrt5}$

7) $OT \cap AC = M$; M – середина AC ($\triangle AOC$ – р/б) $\Rightarrow \frac{AM}{AO} = \cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{\sqrt5}$

Значит, $AM = \frac{R}{\sqrt5}$; $AC = \frac{2R}{\sqrt5}$; R – радиус ω.

8) $OT = \frac{AO}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sqrt5 R}{2}$; $AT = \frac{R}{4} = CT$ → R_1 – радиус ω_1

9) $\triangle ACP$: $\frac{CP}{\sin\beta} = 2R_1 \Rightarrow CP = 2R_1\sin\beta$

$\triangle CPT$: $\frac{CP}{\sin\beta} = \frac{CT}{\sin(90^\circ-(\alpha+\beta))} = \frac{R/4}{1/\sqrt5}$

$CP = \frac{\sqrt5}{4}R_1 \sin\beta$

Черновик.

4

$НОД(a;b;c) = 2\cdot 5$

$НОК(a;b;c) = 2^{17}\cdot 5^{16}$

суки, где тригонометрия???

~~Всд~~ Гарантированно в 1 числе есть 2^1 и 5^k

Гарантированно есть 1 число $2^{17}\cdot 5^n$

$(1;1;2)$ и $(2;1;1)$ – разные тройки

$a = 2\cdot 5^m$

$b = 2^{17}\cdot 5^l$

$c = \underbrace{2^{2\ldots16}}_{17\text{ вариантов}}\cdot 5^n$

$m = 1;\ n = 17;\ n = 1\ldots17.$

кол-во значений n

Всего вариантов $\cancel{16}^{15}\cdot C_3^2{}^{=3}\cdot\cancel{5}\ 17 = 45\cdot 17 = 765$

двойки; распределение $m; l$ и n.

$$\begin{array}{r} 45\\ \times\ 17\\ \hline 315\\ +\ 45\ \ \\ \hline 765 \end{array}$$

$2\cdot 5^1$

$2^{17}\cdot 5^{17}$

$\underbrace{2\cdot 5^{2\ldots17}}_{16\text{ вариантов}}$

$2\cdot 5^{17}$

2^{17}

потом

Все тройки

Все различны

без. совп. мн

с совп. мн.

~~все~~ 2 одинаковы

$10;\ 10;\ 2^{17}\cdot 5^{16}$

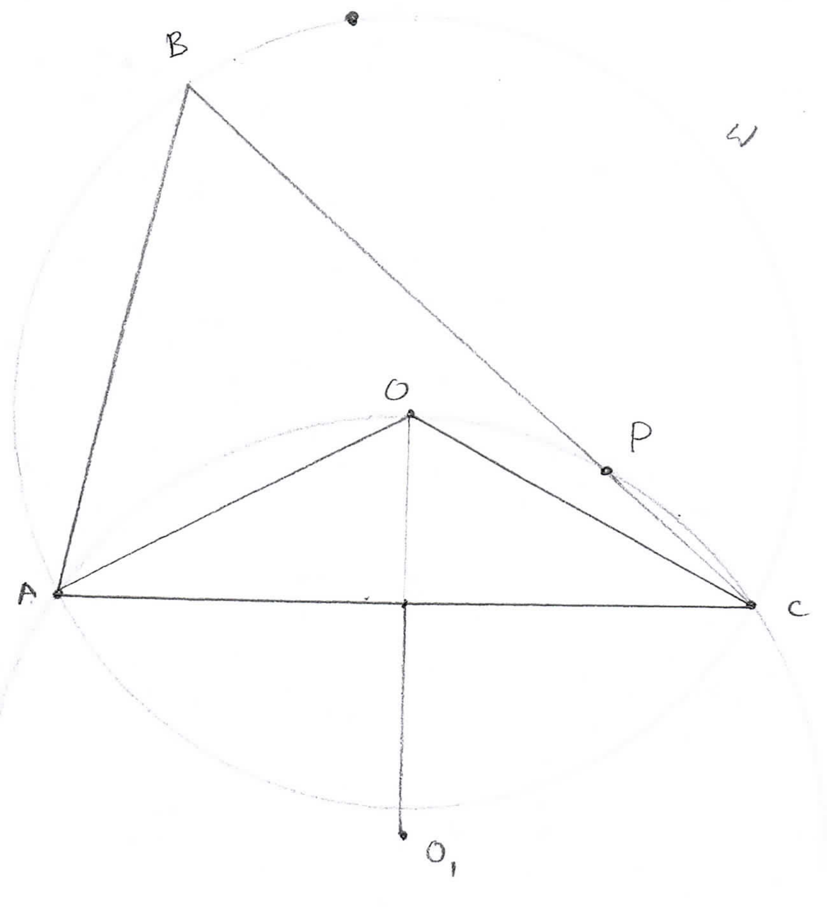
$2^{17}\cdot 5^{16};\ 2^{17}\cdot 5^{16};\ 10.$

$2^{17}\cdot 5;\ 2^{17}\cdot 5;\ 2\cdot 5^{16}$

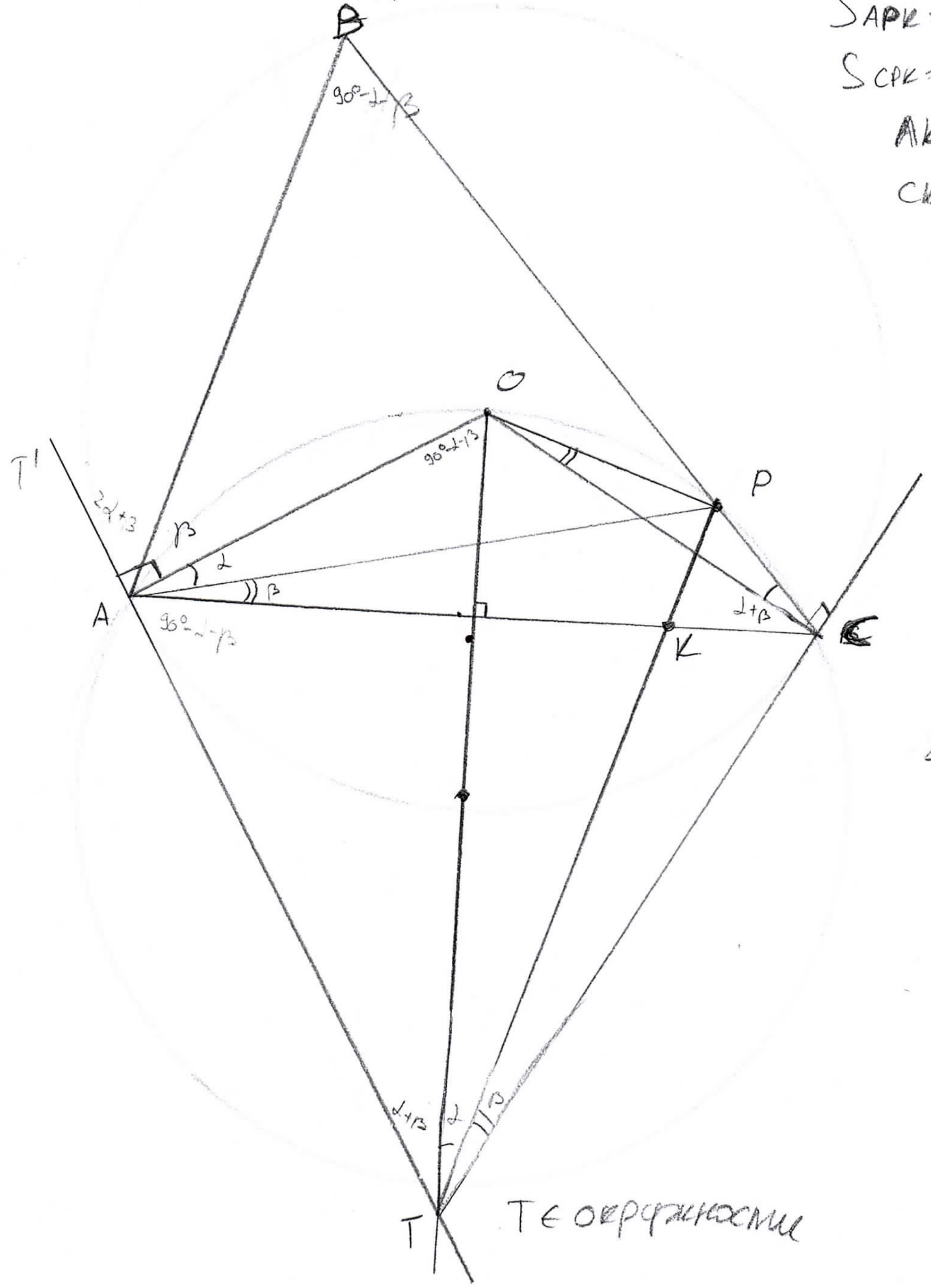
$2\cdot 5^{16};\ 2\cdot 5^{16};\ 5\cdot 2^{17}.$

$2^{17};\ 2$

$5^{16};\ 5$



Черновик



$S_{APK} = 10$

$S_{CPK} = 8$

$AK = \frac{5}{9} AC$

$CK = \frac{4}{9} AC.$

$\alpha + \beta = \ldots$

$\angle ACB = \angle T'AB$ (кас.)

Поэтому параллель.

$\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$

Черновик

(5) $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) \to 2\log_{(2x-8)}(x-4)$; $\log_{(x-4)^2}(5x-26) \to \frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)$ $\quad \log_{\sqrt{(5x-26)}}(2x-8) \to 2\log_{(5x-26)}(2x-8)$

Все 3 существуют: $x > \frac{26}{5}$ и $x \neq \frac{27}{5}$.

$a \cdot b \cdot c = 2$, кстати.

$a = b$ и $c = a+1$

$a^2(a+1) = 1$

$a^3 + a^2 - 2 = 0$

$(a-1)(a^2+2a+2) = 0$.

$$\begin{array}{l|l} a^3+a^2+0\cdot a-2 & a-1 \\ \underline{-\,a^3-a^2} & a^2+2a+2 \\ \quad 2a^2+0\cdot a & \\ \quad \underline{-\,2a^2-2a} & \\ \qquad 2a-2 & \\ \qquad \underline{-\,2a-2} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = \log_a c \cdot \log_c a = 1$

$a = 1$.

I. $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 1$

$x^2 - 8x + 16 = 2x - 8$

$x^2 - 10x + 24 = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = 4. \end{array}\right. \to$ хуйня

$x = 6$: $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 1$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26) = 1$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = 2$

II. $\log_{(x-4)^2}(5x-26) = 1$

$x^2 - 8x + 16 = 5x - 26$

$x^2 - 13x + 42 = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = 7 \\ x = 6. \end{array}\right.$

$x = 6$ уже есть; $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{\sqrt{6}} 3$.

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = \log_3 6$ $\quad$ ХУЕТА.

$\cancel{4(x-4)^2}$

$2x - 8 = \sqrt{5x-26}$

$4x^2 - 32x + 64 = 5x - 26$

$4x^2 - 37x + 90 = 0$

$$\begin{array}{r} 37 \\ \times\, 37 \\ \hline 259 \\ +\,111 \\ \hline 1369 \end{array}$$

III. $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = 1$

$4x^2 - 32x + 64 = 5x - 26$

$4x^2 - 39x + 90 = 0 \to x = \frac{50}{8} = 6{,}25 \quad x = 3{,}5 \to$ уже есть

$D = (40-1)^2 - 16 \cdot 90 = \cancel{39}\ 160$

$$\begin{array}{r} 39 \\ \times\, 39 \\ \hline 351 \\ +\,117 \\ \hline 1521 \end{array}$$

$D = 81$

~~16 · 90 = 1440~~

$x = 6$

$x = 3{,}75 = \frac{15}{4}$

~~39/4 = 10 - 1/4 = 9,75~~

хуйня