Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100458**

ID профиля: **339431**

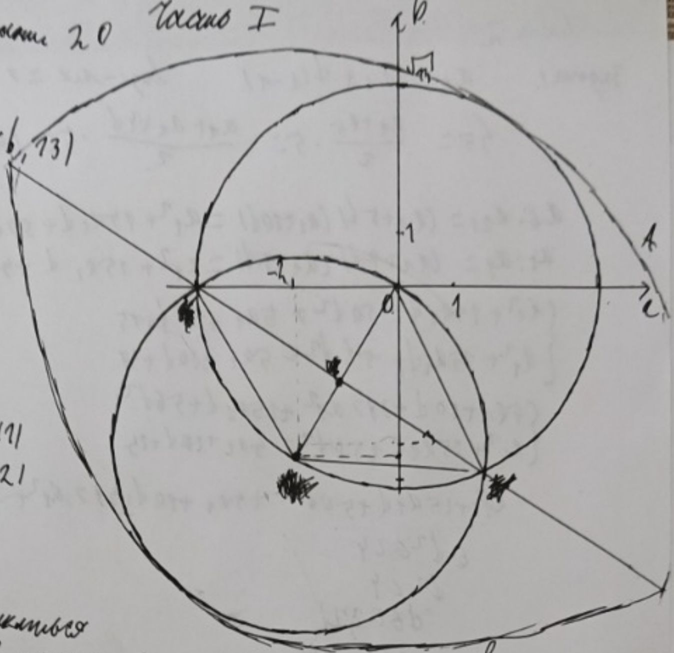
Вариант 20

Лист 1

Чистовик

Вариант 20 Часть I

Задача 3.
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b,\ 13)\end{cases}$$



$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ a^2+b^2\le -4a-6b\\ a^2+b^2\le 13\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ (a+2)^2+(b+3)^2\le 13\\ a^2+b^2\le 13\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 13 & (1)\\ (a+2)^2+(b+3)^2\le 13 & (2)\\ a^2+b^2\le 13 & (3)\end{cases}$$

Круг из (1) должен пересекаться с областью пересечения кругов (2) и (3). Это выполняется если центр (1) находится внутри области, ограниченной дугами A и B с радиусами равными $2\sqrt{13}$ и с центрами в центрах окр-тей $(a+2)^2+(b+3)^2=13$; $a^2+b^2=13$

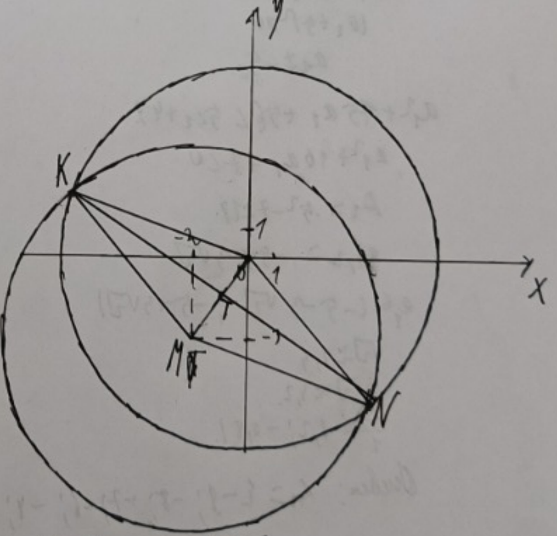
$A: (a+2)^2+(b+3)^2\le (2\sqrt{13})^2.$

$B: a^2+b^2\le (2\sqrt{13})^2$

x, y – центр (1).

$(x+2)^2+(y+3)^2\le 52.$

$x^2+y^2\le 52$



$TM= \frac{2^2+3^2}{2}=\frac{13}{2}=6{,}5.$

$KM=2\sqrt{13}$

$\sin\angle MKT=\frac{TM}{KM}=\frac{\sqrt{13}}{4}$

$\cos\angle MKT=\sqrt{1-\frac{13}{16}}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$

$\sin\angle MKO=2\cdot\frac{\sqrt{39}}{16}=\frac{\sqrt{39}}{8}.$

$S=\frac{\sqrt{39}}{8}\cdot 2\sqrt{13}\cdot 2\sqrt{13}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4\sqrt{39}\cdot 13}{16}=\frac{13\sqrt{39}}{4}$

Ответ: $\frac{13\sqrt{39}}{4}.$

21100458 (U339431 M1297357)

Чистовик

Лист 2

Задача 1. $a_n = a_1 + d(n-1)$. Возр-ая $\Rightarrow d > 0$. Целые $\Rightarrow a_1 \in \mathbb{Z}$; $d \in \mathbb{Z}$.

$$S_5 = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5 = \frac{a_1 + a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = (a_1 + 2d)5 = 5a_1 + 10d$$

$$a_6 \cdot a_{11} = (a_1 + 5d)(a_1 + 10d) = a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2.$$

$$a_8 \cdot a_9 = (a_1 + 7d)(a_1 + 8d) = a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2.$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15 \\ a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a_1 + 10d + 39 > a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2 \\ a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15 \end{cases}$$

$$a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2 + 5a_1 + 10d + 39 > a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2 + 5a_1 + 10d + 15.$$

$6d^2 < 24$.

$d^2 < 4$

$d \in (-2; 2)$

сут. огр.

$d = 1$.

$a_1^2 + 15a_1 + 50 > 5a_1 + 25$.

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

$(a_1 + 5)^2 > 0$

$a_1 \neq -5$.

$a_1^2 + 15a_1 + 56 < 5a_1 + 49$.

$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

$D_1 = 5^2 - 7 = 18$.

$a_{1,2} = -5 \pm 3\sqrt{2}$

$a_1 \in (-5 - 3\sqrt{2}; -5 + 3\sqrt{2})$

$\sqrt{2} \approx 1{,}4$.

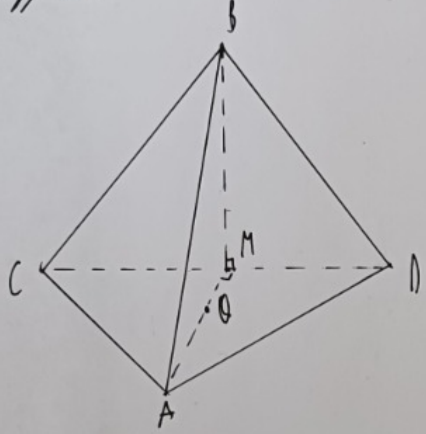
$3\sqrt{2} \approx 4{,}2$.

$a_1 \in (-1{,}2; -0{,}8)$.

Ответ: $a_1 = \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Чмонова
Лист 3

Задача 2. $C, D \in$ боковой п-ти; образующие пар-ны оси цилиндра; CD пар-но оси цилиндра $\Rightarrow$ CD лежит на одной из образующих.



окр-ть описанная вокруг $\triangle ABM$ — окр-ть цилиндра

BM и AM — высоты и находятся в 1 точку. т.к $\triangle CBD = \triangle ACD$.

$BM = AM$

т.к радиус минимальный, то

$AM \to 0$. $BM \to AB$

но $CD < AC + AD \Rightarrow CD < 15$.

при $BM = 2$ $MD = \sqrt{64-4} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$

$CM = \sqrt{49-4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$CD = 2\sqrt{15} + 3\sqrt{5}$

Ответ: $CD \to 2\sqrt{15} + 3\sqrt{5}$

Черновик.

1) $S_5 = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5 =$ $\qquad a_n = a_1 + d(n-1)$

$= \frac{a_1 + a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = (a_1 + 2d)5 = 5a_1 + 10d$ $\qquad d > 0$

$a_6 \cdot a_{11} = (a_1 + 5d)(a_1 + 10d) = a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2$

$a_8 \cdot a_9 = (a_1 + 7d)(a_1 + 8d) = a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2$

$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15 \\ a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39 \end{cases}$

$\begin{cases} 5a_1 + 10d + 39 > a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2 \\ a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15 \end{cases}$

1 + 2

$\cancel{a_1^2} + \cancel{15a_1 d} + 50d^2 + \cancel{5a_1} + \cancel{10d} + 39 > \cancel{a_1^2} + \cancel{15a_1 d} + 56d^2 + \cancel{5a_1} + \cancel{10d} + 15$

2) $6d^2 < 24$

$d^2 < 4$ $\qquad$ из целых $\Rightarrow$ d целое $\Rightarrow 1$.

$d \in (0; 2)$

3) $a_1^2 + 15a_1 + 50 > 5a_1 + 25$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

$(a_1 + 5)^2 > 0 \qquad a_1 \neq -5$

$a_1^2 + 15a_1 + 56 < 5a_1 + 49$

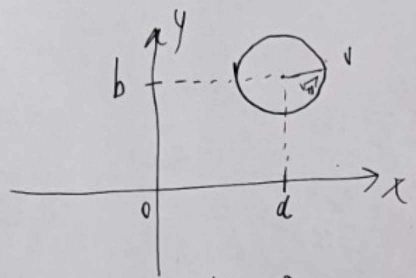
$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$ $\qquad a \in (-5 - 3\sqrt{2}; -5 + 3\sqrt{2})$

$D = 25 - 7 = 18$ $\qquad -9,2 ; -0,8$

$a_{1,2} = -5 \pm 3\sqrt{2}$

Ответ: a_1: $-9; -8; -7; -6; \cancel{-5}; -4; -3; -2; -1$.

Черновик.



$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ a^2+b^2\le -4a-6b\\ a^2+b^2\le 13\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ (a+2)^2+(b+3)^2\le 13\\ a^2+b^2\le 13\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 13\\ (a+2)^2+(b+3)^2\le 13\\ a^2+b^2\le 13\end{cases}$$

$x+7+8=15+x.$

$$\frac{15+x}{2}\cdot\sqrt{\frac{7+8+x}{2}\cdot\frac{7+x-8}{2}\cdot\frac{x+8-7}{2}\cdot\frac{7+8-x}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x+1}{2}\cdot\frac{15+x}{2}\cdot\frac{15-x}{2}}=\frac{x^2-1}{2}\cdot\frac{225-x^2}{2}$$

$2\cdot 4+$

$3<\sqrt{14}<4.$

$6<2\sqrt{14}<8$

$6<\sqrt{47}<7$

$12 \quad 15$

-9

$a_1=-9$

$a_6=-4$ $a_8=-2$ $a_9=-1$

$a_{11}=1.$

$\frac{-9-5}{2}\cdot 5=-35.$

$\begin{cases}-4\cdot 7<20\\ 3<4\end{cases}$

$a_1=-1.$ $a_5=3$ $a_6=4$ $a_8=6$ $a_9=7$ $a_{11}=9$

$S=\frac{-1+3}{2}\cdot 5=5.$

$\begin{cases}36>20.\\ 42<44\end{cases}$

$\cos=\sqrt{1-\frac{13}{16}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ $\sin=\frac{615}{2\sqrt{13}}=$

$\sin 2\alpha=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{13}}{4}=\frac{\sqrt{39}}{8}$ $=\frac{\sqrt{13}}{4}$

~~$4<\sqrt{27}<5.$~~

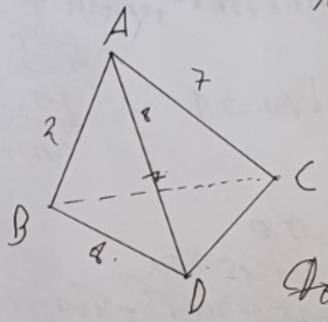
~~$96<24\sqrt{27}<120$~~

$\frac{\overset{2}{\ }\overset{4}{\ }}{96}$

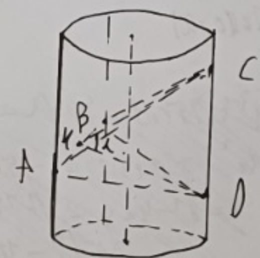
№2.

1) пар-но осн. ⇒ пар-но образ. им ⇒ не может пересекать более одной обр-ей ... обраг-х

~~$CD\in(0;\sqrt{81+24\sqrt{27}})$~~



~~$CD\in(0;\sqrt{81})$~~



2) $AD=BD=8.$
$AC=BC=7$
$AB=2$

63

$\triangle ACD=\triangle BCD$ по 3 приз.

$\triangle$-ки р-бе.

5) $-1\leq\cos\alpha\leq 1.$
$\cos\alpha=-1$
$CD^2=63+18+24\sqrt{27}=$
$=81+24\sqrt{27}\geq 81-24\sqrt{27}$
$81-24\sqrt{27}<0;\ CD^2\geq 0.$
$CD>0$

3) $CH=\sqrt{BC^2-1}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$
$DH=\sqrt{64-1}=\sqrt{63}=3\sqrt{7}$

4) $CD^2=DH^2+CH^2-2CH\cdot DH\cdot\cos\alpha.$
$CD^2=63+48-24\sqrt{27}\cos\alpha.$

Ответ: $CD\in(0;\sqrt{81+24\sqrt{27}}]$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100458**

ID профиля: **339431**

Вариант 20

Лист 1

Типовик
Вариант 20. часть 2

Задача 5. ОДЗ
$$\begin{cases} 2x-8>0 \\ \sqrt{2x-8} \neq 1 \\ x-4>0 \\ (x-4)^2 \neq 1 \\ \sqrt{5x-26}>0 \\ 5x-26 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>4 \\ x \neq 4{,}5 \\ x \neq 5 \\ x>5{,}2 \\ x \neq 5{,}4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>5{,}2 \\ x \neq 5{,}4 \end{cases}$$

$\log_2(x-4)=a \qquad \log_2(5x-26)=b$

(1) $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \dfrac{\log_2(x-4)}{\log_2\sqrt{2x-8}} = \dfrac{2\log_2(x-4)}{\log_2(x-4)+1} = \dfrac{2a}{a+1}$

(2) $\log_{(x-4)^2}(5x-26) = \dfrac{\log_2(5x-26)}{2\log_2(x-4)} = \dfrac{b}{2a}$

(3) $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = \dfrac{\log_2(2x-8)}{\log_2\sqrt{5x-26}} = \dfrac{2\log_2(2x-8)}{\log_2(5x-26)} = \dfrac{2\log_2(x-4)+2}{\log_2(5x-26)} = \dfrac{2a+2}{b}$

(1) = (2)

$\dfrac{2a}{a+1} = \dfrac{b}{2a}$

$b = \dfrac{4a^2}{a+1}$

2

$\dfrac{2a}{a+1} = \dfrac{2a+2}{b} - 1$

$\dfrac{2a}{a+1} = \dfrac{2(a+1)^2}{4a^2} - 1$

$\dfrac{3a+1}{a+1} = \dfrac{2a^2+4a+2}{4a^2}$

$12a^3+4a^2 = 2a^3+4a^2+2a+2a^2+4a+2$

$10a^3-2a^2-6a-2=0$

$5a^3-a^2-3a-1=0$

$a=1 \quad 5a^2+4a+1=0$
$D=16-4\cdot 5<0$

$a=1$

$b=\dfrac{4}{2}=2$

$\begin{cases} \log_2(x-4)=1 \\ \log_2(5x-26)=2 \end{cases}$

$\begin{cases} x-4=2 \\ 5x-26=4 \end{cases}$

$\begin{cases} x=6 \\ x=6 \end{cases}$

$x=6$

(2) = (3)

$\dfrac{b}{2a} = \dfrac{2a}{a+1} - 1$

$\dfrac{b}{2a} = \dfrac{a-1}{a+1}$

$b = \dfrac{2a^2-2a}{a+1} = \dfrac{2a(a-1)}{a+1}$

$\dfrac{b}{2a} = \dfrac{2a+2}{b}$

$b^2 = 4a^2+4a$

$\dfrac{4a^2(a-1)^2}{(a+1)^2} = 4a(a+1)$

$a=0$
$b=0$

$\begin{cases} \log_2(x-4)=0 \\ \log_2(5x-26)=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x-4=1 \\ 5x-26=1 \end{cases}$

$\begin{cases} x=5 \\ x=\frac{27}{5} \end{cases}$

$a(a-1)^2=(a+1)^3$

$a^3-2a^2+a=a^3+3a^2+3a+1$

$5a^2+2a+1=0$

$D=4-20<0$

21100458 (U339431 M1297358)

Лист 2

Пр-е задачи 5

$(1)=(3)$

$\frac{2a}{a+1} = \frac{2a+2}{b}$

$b = \frac{2(a+1)^2}{2a}.$

Чистовик

$\frac{2a}{a+1} = \frac{b}{2a} - 1$

$\frac{3a+1}{a+1} = \frac{2(a+1)^2}{4a^2}.$

$12a^3 + 4a^2 = 2a^3 + 6a^2 + 6a + 2.$

$10a^3 - 2a^2 - 6a - 2 = 0$

$5a^3 - a^2 - 3a - 1 = 0.$

$a = 1$ (сам-но $(1)=(2)$)

$x = 6.$

$\log_2(x-4) = 1$

$x = 6.$

$b = \frac{2 \cdot 2^2}{2} = 4.$

$\log_2(5x-26) = 4.$

$5x - 26 = 8.$

$x = \frac{24}{5}.$

Ответ: при $x = 6.$

Чистовик.

Лист 2

Пр-е задачи 5 Чистовик

$(1) = (3)$

$2x$

Лист 3. Чистовик.

Задача 4.

У одного из чисел обязательно 2 в первой степени.

У одного из чисел обязательно 5 в первой степени.

У одного из чисел обязательно 5^{16}

У одного из чисел обязательно 2^{17}.

Ни у одного из чисел степень 2 не должна равна превышать 17, а степень 5 > 16 и должна быть у 2 больше равна 1 и у 5 больше равна 1.

1) Когда первая степень 2 и 5 в одном числе. можно это число выбрать тремя способами.

а) 5^{16} и 2^{17} у одного числа. Можно выбрать это число двумя способами. У третьего степени 2 от 1 до 17 и 5 от 1 до 16.

Кол-во $= 3 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 16$.

б) 5^{16} и 2^{17} у разных чисел

Кол-во $= 3 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 16$.

Не вычитали вариант когда числа 10; $2^{17}5^{16}$; $2^{17}5^{16}$ т.е подсчитали 2 раза

Итог по 1): $3 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 16 + 3 \cdot 2 \cdot (17 \cdot 16 - 1)$

2) Первая степень 2 и 5 в разных числах. Можно выбрать 2 числа 3 способами

а) 5^{16} и 2^{17} у одного числа; одним способом.

Кол-во $= 3 \cdot 17 \cdot 16$

б) 5^{16} и 2^{17} у разных чисел. $(2^{17} \cdot 5 \quad ; \quad 2 \cdot 5^{16})$ $(5 \quad 2^{17} \quad 2 \cdot 5^{16})$

$(2^{17} \cdot 5 \quad 5^{16} \quad 2)$ – возм-е варианты

Кол-во $= 3 \cdot (16 \cdot 17) + 3(16 \cdot 17 - 1) + 3(16 \cdot 17 - 2)$

В пунктах а) и б) одно число подсчитано дважды

Итого по 2) $3 \cdot 17 \cdot 16 + 3(16 \cdot 17 - 1) + 3(16 \cdot 17 - 2) + 3(16 \cdot 17 - 3)$

Сумма $= 6 \cdot 17 \cdot 16 + 6(17 \cdot 16 - 1) + 3 \cdot 17 \cdot 16 + 3(16 \cdot 17 - 1) + 3(16 \cdot 17 - 2) +$
$+ 3(16 \cdot 17 - 3) = 17 \cdot 16(6 + 6 + 3 + 3 + 3) - 6 - 3 - 6 - 9 =$
$= 17 \cdot 16 \cdot 21 - 24 = 5708$

Ответ: 5708

21100458 (U339431 M1297358)

Мах 3. Чистовик.

Черновик.

$\begin{cases} НОД(a;b;c)=10 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$

$2^{16}\cdot 5^{15}$

(6!)

$2^{16}\cdot 5^{14}$

$2^{17}\cdot 5^{16}$

$2^{17}\cdot 5^{16}$

$2\cdot 5$

$2\cdot 5$ $5\cdot 2^{17}$

$2\cdot 5$ $2\cdot 5$ $2\cdot 5$

~~I случай у обоих чисел степень 5 = 1, степень 2 = 1~~

II ~~Тогда все одно~~ 5^{16} и 2^{17}

Худое у одного. $2^{17}\cdot 5^{16}$ $2^{1\to 17}\ 5^{1\to 16}$

$2\cdot 5$

Кол-во случаев $17\cdot 16$

Вариантов выбора $z=?$

$17\cdot 16\cdot 2$

бол. ... выбора $3=?$

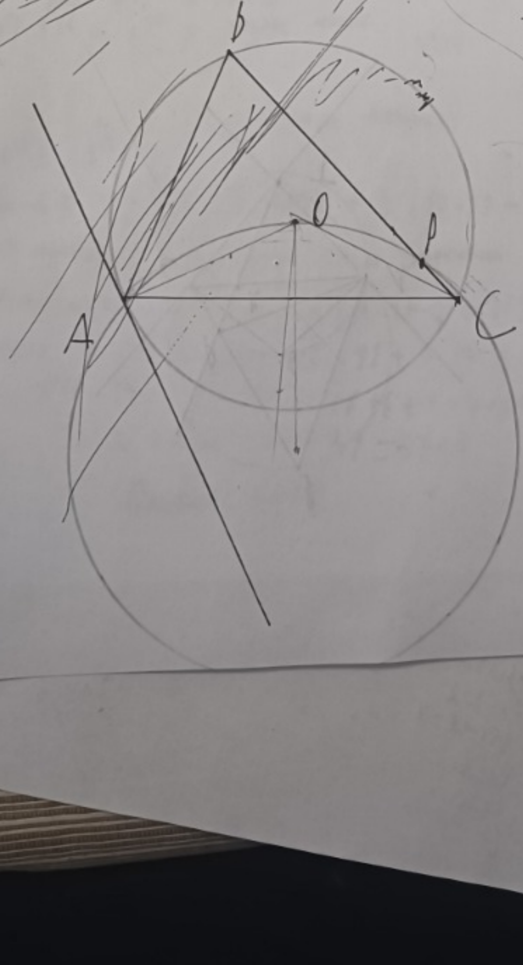
$17\cdot 16\cdot 2\cdot 3$

Тогда бол у одного степень $5=1$, и степень $z=1$

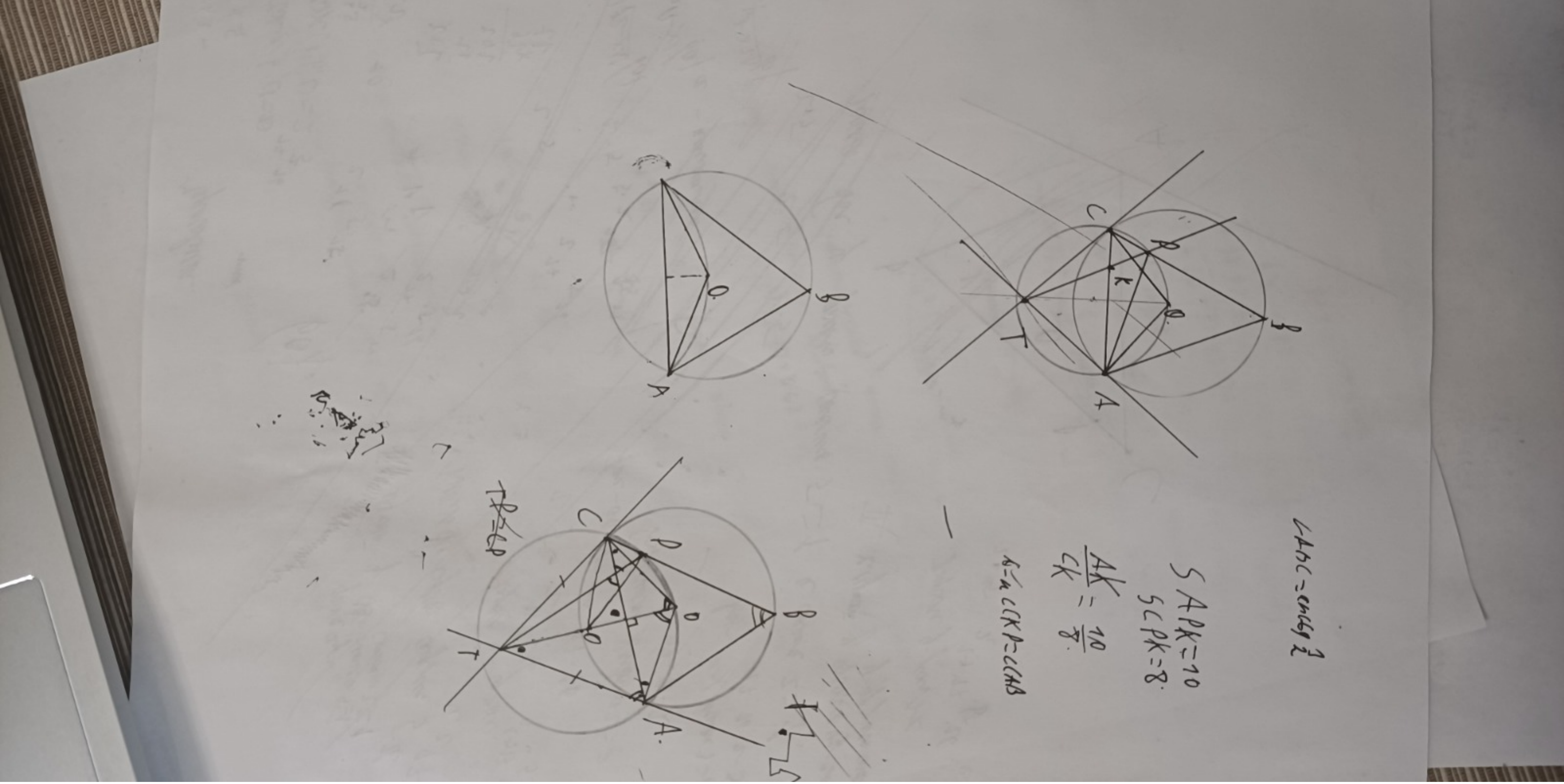
III случай у одного из степень $5=1$, у другого степень $2=1$

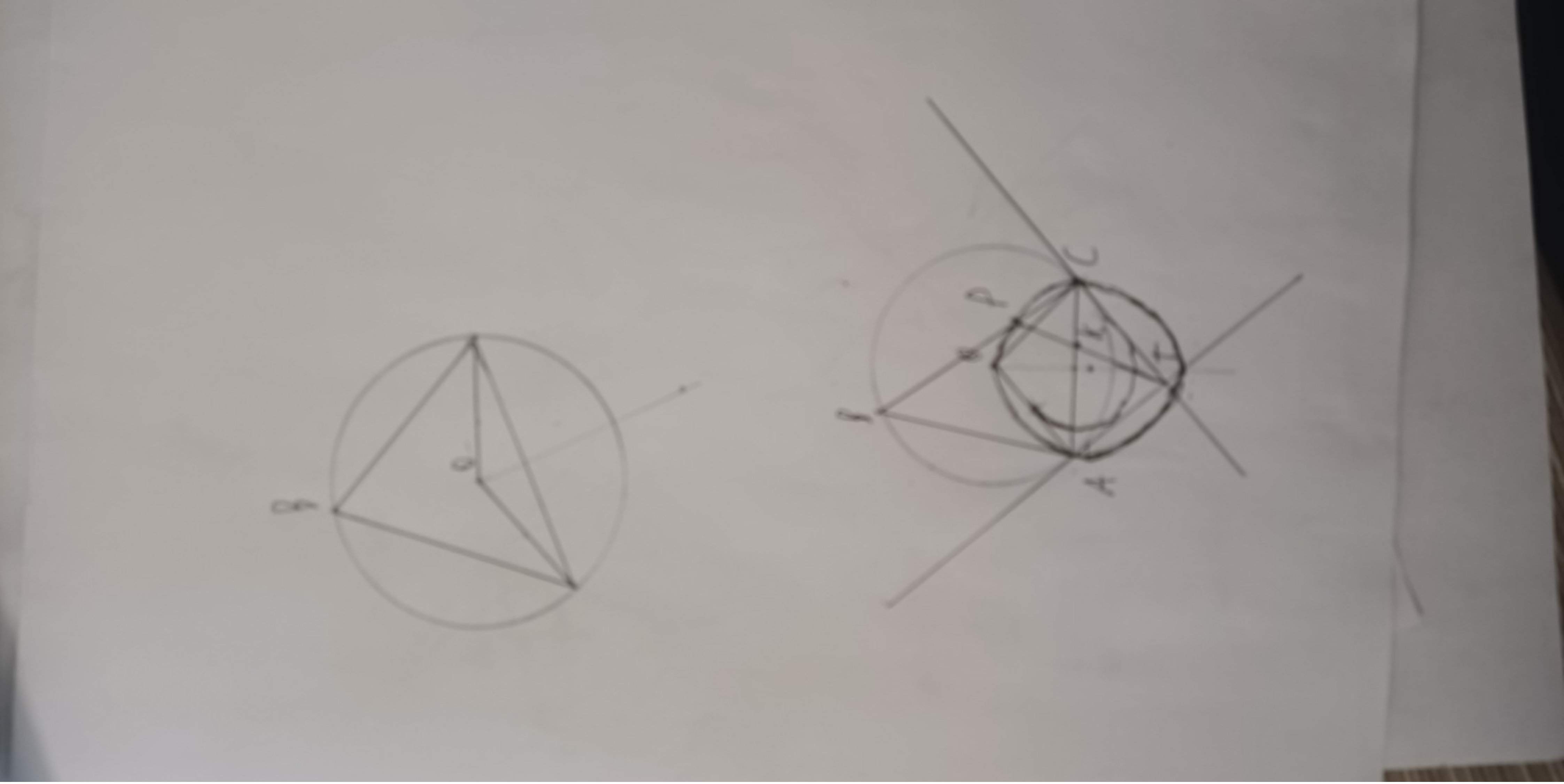
худое у разных

$2\cdot 5$ $2^{17}\cdot 5^{16}$ $2\ 5$



21100458 (U339431 M1297358)


S APK = 10
S CPK = 8.
AK/CK = 10/8.
C
A
B
O
P
K
T



21100458 (U339431 M1297358)