Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100435**

ID профиля: **803436**

Вариант 20

Чистовик Вариант 20 Лист №1

Задача №1.

Пусть $a_1, a_2, \dots$ наша арифм. прогрессия, пусть её шаг равен d.

По условию прогрессия возрастающая, значит, $d > 0$ и её члены целые числа $\Rightarrow d \in \mathbb{Z}$ и $d > 0 \Rightarrow d \geq 1$

Тогда $a_6 = a_1 + 5d$, $a_{11} = a_1 + 10d$, $a_8 = a_1 + 7d$ и $a_9 = a_1 + 8d$

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5a_1 + d + 2d + 3d + 4d = 5a_1 + 10d$

У нас $a_6 \cdot a_{11} = (a_1 + 5d)(a_1 + 10d) > S + 15$

и $a_8 \cdot a_9 = (a_1 + 7d)(a_1 + 8d) < S + 39$

То есть $a_6 \cdot a_{11} - S - 15 = a_1^2 + 15a_1 \cdot d + 50d^2 - S - 15 > 0 > a_8 \cdot a_9 - S - 39$
$= a_1^2 + 15a_1 \cdot d + 56d^2 - S - 39$

Так что $24 > 6d^2 \Leftrightarrow 4 > d^2 \Rightarrow d < 2$ (у нас $d \geq 1$) и тогда получаем, что раз $d \in \mathbb{Z}$, то $d = 1$.

$a_6 \cdot a_{11} - S - 15 = a_1^2 + 15a_1 + 50 - 5a_1 - 10 - 15 = a_1^2 + 10a_1 + 25 = (a_1 + 5)^2 > 0 \Leftrightarrow a_1 \neq -5$

$a_8 \cdot a_9 - S - 39 = a_1^2 + 15a_1 + 56 - 5a_1 - 10 - 39 = a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

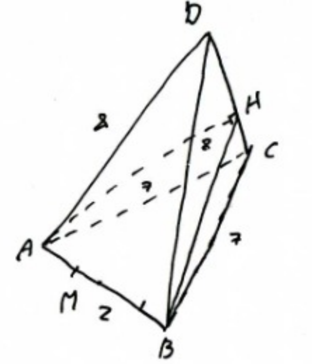
Корни уравнения $a_1^2 + 10a_1 + 7$ — это $a_1 = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 28}}{2} = -5 \pm \sqrt{18}$

Заметим, что $-5 - \sqrt{18} \in (-10; -9)$, ведь $4 < \sqrt{18} < 5$ и так же

$-5 + \sqrt{18} \in (-1; 0)$, то есть $a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \Leftrightarrow a_1 \in (-5 - \sqrt{18}; -5 + \sqrt{18})$

и у нас $a_1 \neq -5$ и $a_1 \in \mathbb{Z}$.

Итак, ответ: $a_1 \in \{-9\}, \{-8\}, \{-7\}, \{-6\}, \{-4\}, \{-3\}, \{-2\}, \{-1\}$.



Чистовик
Задача №3. Вариант 20 Лист №2

$AB = 2$, $AC = CB = 7$ и $AD = DB = 8$

$\triangle ADC = \triangle BDC$, ведь у них $AD = DB$, $AC = CB$ и CD - общая сторона

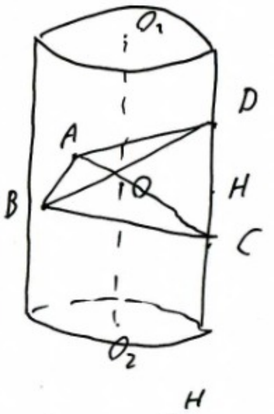
Пусть H - основание перпендикуляра из B на DC $\Rightarrow$ оно же основание перпендикуляра из A на DC.

Пусть M - середина AB $\Rightarrow$ $AM = MB = \frac{AB}{2} = 1$

Заметим, что DM - медиана в равнобедренном $\triangle ADB$ $\Rightarrow$ она же и высота $\Rightarrow$ $MD \perp AB$, так же $\triangle ACB$ равнобедренный $\Rightarrow$ CM - медиана в нём является и высотой $\Rightarrow$ $CM \perp AB$.

Но заметим, что проекция точки D на плоскость (ACB) попадает на высоту CM в силу симметричности картинки относительно плоскости ρ, проходящей через точку M, перпендикулярно прямой AB $\Rightarrow$ по теореме о трёх перпендикулярах $DC \perp AB$ (оно и понятно, ведь DC лежит в ρ).

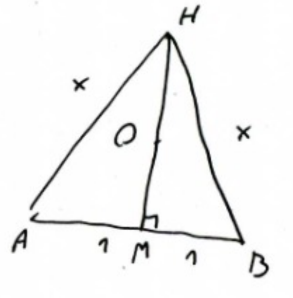
Тогда, конечно $(AHB) \perp DC$, ведь $DC \perp AH$ и $DC \perp HB$.

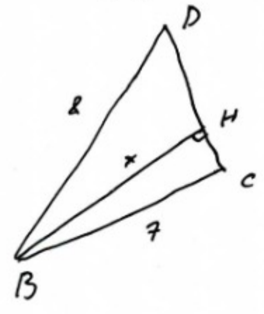


Пусть O_1O_2 - ось нашего цилиндра. $O_1O_2 \parallel DC \Rightarrow O_1O_2 \perp AB$

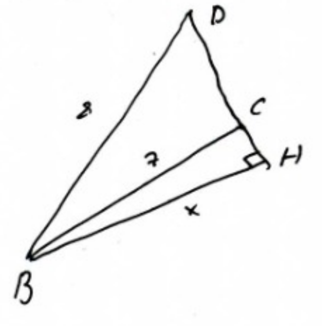
Заметим, что плоскость (AHB) пересекает цилиндр по окружность с центром в точке O - центр описанной окружности $\triangle ABH$, ведь $(ABH) \perp O_1O_2$ (это следует из $(AHB) \perp DC$).

Итак, рассчитаем радиус $OA = OB = OH$ нашего цилиндра





или



есть 2 принципиально различные картинки для $\triangle BDC$ и точки H на DC.

в $\triangle AHB$ пусть S - площадь и $R = OA$ - радиус, тогда, как известно

$$R = \frac{AH \cdot HB \cdot AB}{4S} = \frac{x^2 \cdot 2}{4 \cdot S} \quad \text{и} \quad S = \frac{1}{2} HM \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2 - 1} \cdot 2 = \sqrt{x^2-1}, \text{ где } HB = x$$

То есть $R = \frac{x^2}{2\sqrt{x^2-1}}$ примем $\sqrt{x^2-1}$ за t, тогда $R = \frac{t^2+1}{2t} \geq 1$ и равенство достигается при $t = 1$ (неравенство Коши; всё хорошо, ведь $t > 0$)

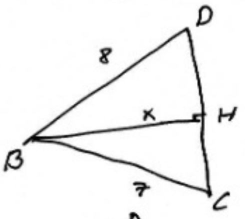
P. S. $x > 1$, ведь HB гипотенуза в $\triangle MHB \Rightarrow \sqrt{x^2-1} > 0 \Leftrightarrow t > 0$

Чистовик   Вариант 20   Лист №3

Задача №2 продолжение

Итак у нас $R \geq 1$ и наименьший радиус достигается при $\sqrt{BH^2-1} = 1$, то есть $x^2 = BH^2 = 2$

Итак в 1) случае :

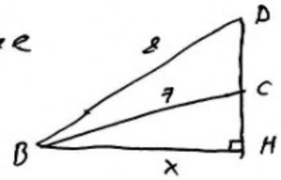


$DH = \sqrt{64-x^2} = \sqrt{62}$

$HC = \sqrt{49-x^2} = \sqrt{47}$

$DC = \sqrt{62} + \sqrt{47}$

И во 2) случае



$DB = 8 > 7 = BC = 1$ C лежит между D и H.

$DH = \sqrt{62}$ и $CH = \sqrt{49}$

$CD = \sqrt{62} - \sqrt{47}$

Ответ: $CD = \sqrt{62} \pm \sqrt{47}$.

21100435 (U803436 M1296713)

Задача №3.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 & \text{— круг с центром в точке } (a,b) \text{ радиуса } \sqrt{13} \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b, 13) \end{cases}$$

Заметим, что второе неравенство равносильно системе $\begin{cases} a^2+b^2 \le 13 \\ a^2+4a+b^2+6b \le 0 \end{cases}$

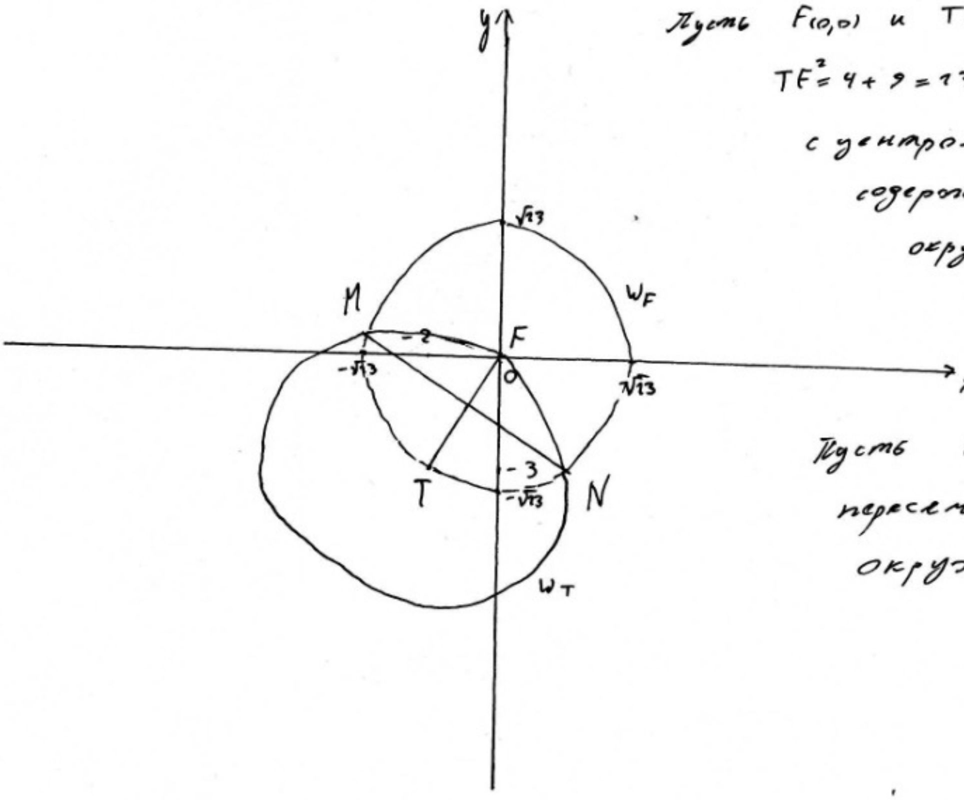
$(a^2+4a+4)+(b^2+6b+9) \le 0+4+9=13$

$(a+2)^2+(b+3)^2 \le 13$ — круг с центром в точке $(-2,-3)$ радиуса $\sqrt{13}$

и $a^2+b^2 \le 13$ — круг радиуса $\sqrt{13}$ с центром в $(0,0)$ — начале координат.

Пусть $F(0,0)$ и $T(-2;-3)$

$TF^2=4+9=13 \Rightarrow$ окружность с центром в T радиуса $\sqrt{13}$ содержит точку F и окружность с центром в F радиуса $\sqrt{13}$ содержит точку T.



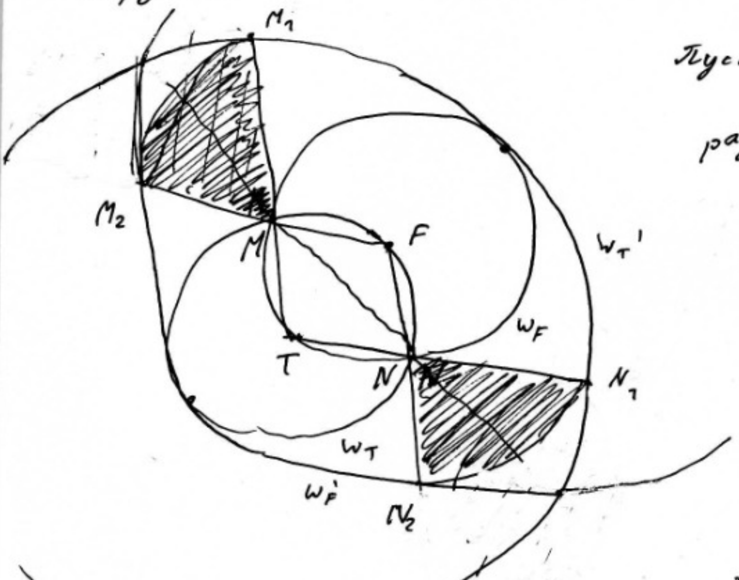
Пусть M и N — точки пересечений этих окружностей.

Обозначим круги с центрами в F и T радиуса $\sqrt{13}$ соответственно как w_F и w_T. Пусть область $\sigma = w_T \cap w_F$ — их пересечение. Мы добились выполнения $a^2+b^2 \le 13$ и $(a+2)^2+(b+3)^2 \le 13$, теперь найдём ГМТ таких точек Z, что $Z(x,y)$: $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13$ — первое неравенство системы. По сути, любая такая точка Z лежит на расстоянии не дальше чем $\sqrt{13}$ от границы области σ, в которой содержатся все подходящие пары (a,b) — центров окружностей радиуса $\sqrt{13}$, содержащих точку Z.

21100435 (U803436 M1296713)

Задача №3 продолжение

Заметим тогда, что граница ГМТ точек Z есть объединение части окружности с центром в T радиуса $2\sqrt{13}$, высекаемой сегментом между прямыми TM и TN, части окружности с центром в F радиуса $2\sqrt{13}$, высекаемой сегментом между прямыми FM и FN и частей окружностей с центрами в M и N радиуса $\sqrt{13}$:



Пусть w_T' и w_F' - окружности радиуса $2\sqrt{13}$, концентричные с w_T и w_F соответственно.

$N_1 = TN \cap w_T'$ (луч TN)

$N_2 = FN \cap w_F'$ (луч FN)

$M_1 = TM \cap w_T'$ (луч TM)

$M_2 = FM \cap w_F'$ (луч FM)

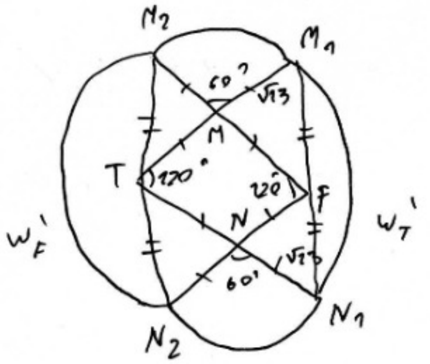
граница ГМТ Z - есть дуга M_1N_1 окружности w_T' + дуга M_2N_2 окружности w_F' + дуга M_1M_2 окружности с центром M радиуса $\sqrt{13}$ и дуга N_1N_2 окружности с центром N радиуса $\sqrt{13}$.

(Речь о меньших дугах)

Заметим, что раз $TF = TM = FM = \sqrt{13}$ - $\triangle MTF$ равносторонний, аналогично и $\triangle TFN$ равносторонний $\Rightarrow \angle MTN = \angle M_1TN_1 = 120^\circ = \angle M_2FN_2$ и $\angle TMF = \angle M_2MM_1 = \angle TNF = \angle N_1NN_2 = 60^\circ$.

Чистовик Вариант 20 лист №6.

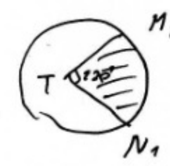
Задача №3 продолжение.



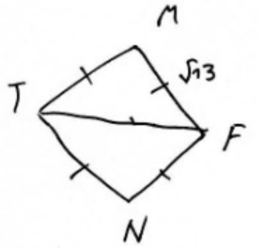
Заметим, что $TM = \sqrt{13} = \frac{FN_2}{2}$ и $TMFN$ ромб $\Rightarrow TM \parallel N_2F \Rightarrow TM$ - средняя линия в ΔM_2FN_2 и T - середина M_2N_2, аналогично, F - середина M_1N_1.

Площадь сегмента w_F' между прямыми M_2F и N_2F есть $\frac{1}{3}$ площади круга w_F' (у меня w_F' и круг и его граница, не хочу лишних обозначений).

Площадь $w_F' = \pi\cdot(2\sqrt{13})^2 \Rightarrow$ площадь этого сегмента равна $\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 4\cdot 13$, ведь $\angle M_2FN_2 = 120° = \frac{360°}{3}$ (У меня сегмент это : )

Площадь семента M_1TN_1 круга w_T', очевидно, такая же :


Так, мы дважды учли площадь четырёхугольника $TMFN$:



она равна :

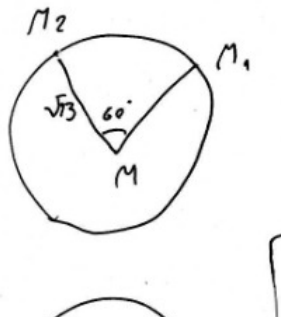
$MH = \sqrt{13}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$S = TF\cdot\frac{1}{2}\cdot MH = \sqrt{13}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13} = 13\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$

и таких части две

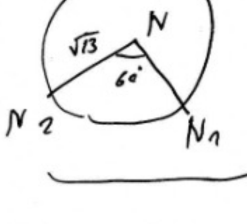
$$S(\Delta TMF + \Delta TFN) = 13\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2 = \boxed{13\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

А площади сегментов M_2MM_1 и N_2NN_1 есть :



$\pi(\sqrt{13})^2\cdot\frac{1}{6} = \frac{13}{6}\pi$ и для N_2NN_1 то же самое,

итого $2\cdot\frac{13}{6}\pi = \frac{13}{3}\pi$ (ведь $60° = \frac{360°}{6}$)



Итак, вся площадь нашего ГМТ точек Z

есть $\frac{1}{3}\pi\cdot 4\cdot 13\cdot 2 - 13\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{13}{3}\pi =$

$= 13\pi\cdot\left(\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\right) - 13\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 13\pi\cdot 3 - 13\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 13\cdot\left(3\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Ответ: $13\cdot\left(3\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Черновик

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5$

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 = 5a_1 + d+2d+3d+4d = 5a_1+10d$

$$\begin{cases}(a_1+5d)(a_1+10d) > (5a_1+10d)+15 \\ (a_1+7d)(a_1+8d) < 5a_1+10d+39\end{cases}$$

$a_1^2 + a_1\cdot 15d + 50d^2 - 5a_1 - 10d - 15 > 0$

$a_1^2 + 15a_1\cdot d + 56d^2 - 5a_1 - 10d - 39 < 0$

$50d^2 - 5a_1 - 10d - 15 > 0 > 56d^2 - 5a_1 - 10d - 39$

$24 > 6d^2$

$4 > d^2$

$2 > |d|$

$d > 0$

$d \ne 2 \quad d < 2$

$d = 1$

$56 - \cancel{49} = 7$

$a_1 \ne -5$

$(a_1+5)(a_1+10) > 5a_1+10+15$

$(a_1+7)(a_1+8) < 5a_1+10+39$

$a_1^2+10a_1+25 > 0 \qquad (a_1+5)^2 > 0$

$a_1^2+10a_1+7 < 0$

$4\cdot 18$

$a_1 = \frac{-10\pm\sqrt{100-28}}{2} = -5 \pm \frac{\sqrt{72}}{2} = -5 \pm \sqrt{18}$

$\sqrt{72} = \sqrt{4\cdot 18}$

$-10 \quad -9 \quad -1 \quad 0$

$-5-\sqrt{18} \quad -5+\sqrt{18}$

$a_1 \ne -5$

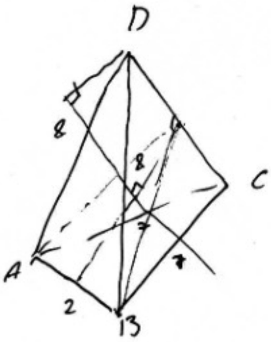
$-5+4 < -5+\sqrt{18} < -5+5 = 0$

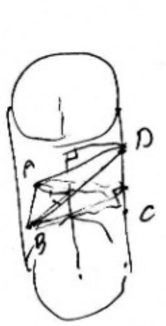
$\| $

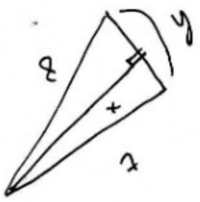
-1

$-5-\sqrt{18} < -5-4$

$CD \perp AB$





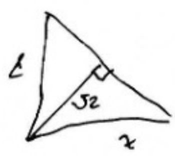


$\frac{abc}{4S} = R$

$\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}\cdot 2 = S = \sqrt{x^2-1}$

$\frac{x^2\cdot 2}{4\sqrt{x^2-1}} = R$

$2R = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$



$x^2 = 2$

$x = \sqrt{2}$

$\frac{a}{\sqrt{a-1}} = \frac{(\sqrt{a-1})^2+1}{\sqrt{a-1}}$

$\sqrt{a-1} = 1$

$\sqrt{47} \cdot 47-2$

$\frac{t^2+1}{t} \geq 2$

$\boxed{a=2}$

$t=1$

$\sqrt{64-2} = \sqrt{62}$

$t^2+1-2t \geq 0$

$\sqrt{62} - \sqrt{47}$

$\sqrt{62} - \sqrt{47}$

21100435 (U803436 M1296713)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

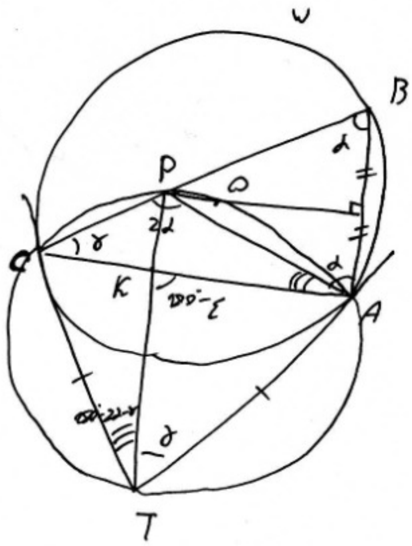
Шифр: **21100435**

ID профиля: **803436**

Вариант 20

Чистовик Вариант 20 Лист №1

Задача №6.



Введём стандартное обозначение S_{XYZ} - площадь $\triangle XYZ$.

Пусть $\angle CBA = \alpha$ и $\angle BCA = \gamma$

$\angle COA = 2\angle CBA = 2\alpha$ и $\angle CPA = \angle COA = 2\alpha$ из вписанности $CPOA$.

$\angle OAT = \angle OCT = 90°$ (ведь OA и OC радиусы, а AT и CT касательные) $\Rightarrow$ $OATC$ - вписанный $\Rightarrow$ $TCPOA$ - вписанный (T лежит на окружности (COA)).

Тогда $\angle PBA = \alpha$ и $\angle BPA = 180° - 2\alpha \Rightarrow \angle PAB = \alpha \Rightarrow \triangle PBA$ равнобедренный $AP = PB \Rightarrow PO$ - сер. пер. к AB

$\angle CAP = 180° - \angle PCA - \angle CPA = 180° - 2\alpha - \gamma = \angle CTP$ из вписанности $CPAT$ и $\angle PTA = \angle PCA = \gamma$ из вписанности $CPAT$.

$CT = AT$ как отрезки касательных.

$\dfrac{S_{CKP}}{S_{PKA}} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{CK}{KA}$, ведь высота из P на AC у них общая.

Пусть $\angle CKT = \xi \Rightarrow \angle AKT = 180° - \xi$

Теорема синусов: для $\triangle CKT$: $\dfrac{CK}{\sin(180° - 2\alpha - \gamma)} = \dfrac{CT}{\sin\xi}$ и для $\triangle KAT$: $\dfrac{AK}{\sin\gamma} = \dfrac{AT}{\sin(180° - \xi)} \Rightarrow \dfrac{CK}{AK} = \dfrac{\sin(2\alpha + \gamma)}{\sin\gamma}$ (ведь $\sin p = \sin(180° - p)$)

$\dfrac{\sin\gamma}{\sin(2\alpha+\gamma)} = \dfrac{AK}{CK} = \dfrac{10}{8} \Rightarrow 8\sin\gamma = 10(\sin(2\alpha)\cos\gamma + \sin\gamma\cos(2\alpha)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8\sin\gamma = 10(2\cos\alpha\sin\alpha\cos\gamma + \sin\gamma(2\cos^2\alpha - 1)) \Leftrightarrow 8\sin\gamma + 10\sin\gamma =$

$= 20\underbrace{(\cos\alpha\sin\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\cos^2\alpha)}_{\text{обозначим за } Q}$

ведь высота из A в двух них общая

Задача №6 продолжение.

$\frac{S_{ABC}}{S_{APC}} = \frac{BC}{PC}$ (ΔABC – остроугольный ⇒ O лежит внутри ΔABC)

по теореме синусов: для ΔABC: $\frac{BC}{\sin(180^\circ-\alpha-\gamma)} = \frac{AC}{\sin\alpha}$

для ΔCPA: $\frac{CP}{\sin(2\alpha+\gamma)} = \frac{AC}{\sin 2\alpha}$ ⇒ $\frac{BC}{PC} = \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha} : \frac{\sin(2\alpha+\gamma)}{\sin 2\alpha} =$

$= \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin(2\alpha+\gamma)}\cdot 2\cos\alpha = \frac{2}{\sin(2\alpha+\gamma)}(\sin\alpha\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha)\cos\alpha = \frac{2}{\sin(2\alpha+\gamma)}\cdot$

$\cdot(\sin\alpha\cos\alpha\cos\gamma+\sin\gamma\cos^2\alpha) = \frac{2}{\sin(2\alpha+\gamma)}\cdot Q$

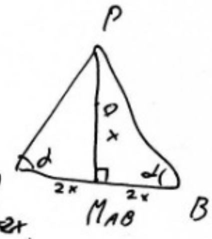
Итак, $S_{ABC} = S_{APC}\cdot\frac{BC}{PC} = 18\cdot\frac{BC}{PC} = 18\cdot\frac{2}{\sin(2\alpha+\gamma)}\cdot Q$

У нас $\frac{CK}{AK} = \frac{8}{10} = \frac{\sin(2\alpha+\gamma)}{\sin\gamma}$ и $18\sin\gamma = 20Q$, откуда

получаем, что $S_{ABC} = 36\cdot\underbrace{\frac{18}{20}\sin\gamma}_{Q}\cdot\frac{1}{\sin(2\alpha+\gamma)} = \frac{18}{20}\cdot 36\cdot\frac{10}{8} = \frac{18\cdot 36}{16} = 9\cdot 9\cdot\frac{1}{2}$

$\frac{18}{20}$

$\boxed{\frac{81}{2}}$ – искомая площадь



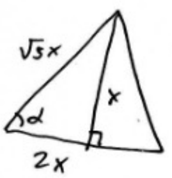
б) теперь ещё $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ в ΔAPB AP=BP:

Пусть M_{AB} – середина AB $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} =$ пусть $AM_{AB} = M_{AB}B = 2x$,

тогда $PM_{AB} = x$ и $S_{APB} = S_{ABC} - S_{APC} = \frac{81}{2} - 18 = \frac{45}{2} = \frac{1}{2}(4x\cdot x) = 2x^2$ ⇒

⇒ $x^2 = \frac{45}{4}$ ⇒ $x = \frac{\sqrt{45}}{2}$ ⇒ $AB = 4x = 2\sqrt{45} = 6\sqrt{5}$

У нас $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{AC}{AB}$ из теоремы синусов для ΔABC.



$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Вспомним, что $18\sin\gamma = 20(\cos\alpha\sin\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\cos^2\alpha) =$

$= 20\cdot\left(\frac{2}{5}\cos\gamma + \frac{4}{5}\sin\gamma\right) = 8\cos\gamma + 16\sin\gamma$ ⇒ $2\sin\gamma = 8\cos\gamma$ ⇒

⇒ $\sin\gamma = 4\cos\gamma$ ⇒ $\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = \sin^2\gamma + \frac{1}{16}\sin^2\gamma = \frac{17}{16}\sin^2\gamma = 1$ ⇒ $\sin\gamma = \frac{4}{\sqrt{17}}$

И тогда $AC = AB\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = 6\sqrt{5}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{4}{\sqrt{17}}} = \frac{6}{4}\cdot\sqrt{17} = \boxed{\frac{3}{2}\sqrt{17}}$

Ответ: а) $\frac{81}{2}$ б) $\frac{3}{2}\sqrt{17}$

Задача № 5.

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$ $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$ $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

ОДЗ: $x>4$, $x>\frac{26}{5}$, $x\neq\frac{27}{5}$, $x\neq\frac{9}{2}$, $x\neq 4$, $x\neq 3$, $x\neq 5$

То есть $x>\frac{26}{5}$, $x\neq\frac{27}{5}$, $x\neq\frac{9}{2}$

$\log_{\sqrt{2x-8}}\cdot(x-4)\cdot\log_{(x-4)^2}(5x-26)\cdot\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=2\cdot\log_{(2x-8)}(x-4)\cdot\frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)\cdot$
$\cdot 2\log_{(5x-26)}(2x-8)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$

По условию среди этих 3 чисел два равны y и одно $y+1$

$y^2(y+1)=2$

$y^3+y-2=0 \iff (y-1)(y^2+2y+2)=0 \iff y=1$, ведь $y^2+2y+2=(y+1)^2+1\geq 1$

1) $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=1 \Rightarrow (x-4)^2=2x-8 \iff x^2-8x+16=2x-8 \iff x^2-10x+24=0$

$(x-6)(x-4)=0 \Rightarrow x=6$ в ОДЗ и при $x=6$ $\log_{(x-4)^2}(5x-26)=\log_4(4)=1$ и

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=\log_2 4=2=1+1$ - подходит

2) $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=1 \Rightarrow (2(x-4))^2=5x-26 \iff 4x^2-32x+64=5x-26 \iff$

$\iff 4x^2-37x+90=0$ ~~корни~~ $\cancel{\frac{37\pm\sqrt{37^2-16\cdot 90}}{8}}$ $D=37^2-4\cdot 4\cdot 90=$

$=37^2-16\cdot 90=37^2-1440=1369-1440<0$

$(37\cdot 37=900+420+49=1369)$

3) $\log_{(x-4)^2}(5x-26)=1 \Rightarrow 5x-26=x^2-8x+16 \iff x^2-13x+42=0$

$(x-6)(x-7)=0$ $x=7$ и $x=6$ в ОДЗ и $x=6$ проверено

при $x=7$ $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=\log_{\sqrt{6}}3\neq 0$ или 2 или 1 и $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=$

$=\log_3 6\neq 0$ или 2 или 1, а должно, ведь у нас числа $y, y, y+1$

где одно из них 1.

Ответ: $x=6$.

21100435 (U803436 M1296714)

Чистовик Вариант 20 Лист № 4

Задача №4.

$\begin{cases} НОД(a,b,c)=10 \\ НОК(a,b,c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$ => среди простых делителей a, b, c только 2 и 5.

$a = 2^{\alpha_1}\cdot 5^{\beta_1}$ $b = 2^{\alpha_2}\cdot 5^{\beta_2}$ и $c = 2^{\alpha_3}\cdot 5^{\beta_3}$

Нам известно, что $a, b, c \vdots 10$ => $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \geq 1$, при этом среди $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ есть одна единица, иначе $НОД(a,b,c) \geq 2^2\cdot 5 = 20$, аналогично, среди $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ есть единица. Также пусть $\alpha_{max} = \max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, тогда $\alpha_{max} = 2^{17}$, ибо $НОК(a,b,c) = 2^{17}\cdot 5^{16}$ и $\beta_{max} = \max(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 16$.

потом домножим на 3!

Итак, упорядочим $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$ => $\alpha_1 = 1$, $\alpha_3 = 17$ и α_2 - целое число от 1 до 17 — 17 вариантов, пусть $\beta_1' \leq \beta_2' \leq \beta_3'$ - упорядоченные β => $\beta_1' = 1$, $\beta_3' = 16$ и β_2' - целое от 1 до 16 - 16 вариантов.

Итого упорядоченных наборов α 17 штук и упорядоченных наборов β 16 штук.

Итак вариантов когда $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 \in [1, 17]$, $\alpha_3 = 17$ и нужно как-то расставить β: $17\cdot 16\cdot \underbrace{3!}$ - кол-во перестановок β

и теперь переставим (a, b, c) - тоже $3!$ способов.

Итого $17\cdot 16\cdot 3!\cdot 3! = 17\cdot 16\cdot 36$

~~При этом нами учтены варианты когда a = b <=> α1 = α2 = 1 и β1 = β2 = 1 или α2 = α3 = 17 и β2 = β3 = 1 или b = c~~

При этом, мы учитываем варианты, когда ~~[illegible]~~ $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ и $\beta_1 = \beta_2 = 1$ или 16 и когда $\alpha_2 = \alpha_3 = 17$ и $\beta_2 = \beta_3 = 16$ или 1 по

$17\cdot 16\cdot 2 + 17\cdot 2\cdot 16 = 17\cdot 16\cdot 4$ раз

Итого $17\cdot 16\cdot 3! - 17\cdot 16\cdot 4\cdot 3! = 17\cdot 16\cdot 6\cdot 2 = 17\cdot 16\cdot 12$

Чернових

$$\begin{cases} НОД(a,b,c) = 10 \\ НОК(a,b,c) = 2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$$

$a = 10k$

$b = 10m$

$c = 10l$

$10kml$

$a = 10xmt$

$b = 10ymn$

$c = 10znt$

$10xyzmnt = 2^{17}\cdot 5^{16}$

$a = 2^{\alpha_1}\cdot 5^{\beta_1}$

$b = 2^{\alpha_2}\cdot 5^{\beta_2}$

$c = 2^{\alpha_3}\cdot 5^{\beta_3}$

$a = 2^{\alpha} 5^{\beta}$

$b = 2^{\gamma} 5^{\varphi}$

$c =$

$\alpha_1 = 1$

$\wedge$

α_2

$\wedge$

$\alpha_3 = 17$

$\beta_1 = 1$

β_3

$\beta_{min} = 1$ $\quad\beta_{max} =$

1 - 17

1 $\widetilde{17}$ 17

1 $\widetilde{16}$ 16

1 ⊔ 17

16 1 ⊔

1 ⊔ 17

1

$\frac{18}{20}\cdot\frac{20}{8}\cdot 36 = \frac{18\cdot 36}{2\cdot 8} = \frac{9\cdot 9}{2}$

$2\sqrt{9}\cdot 5$

$\frac{81}{2} - 18$

$\frac{81}{2} = \frac{81-36}{2} = \frac{45}{2}$

$\sqrt{x}^{\alpha} = \beta$

$x^{\frac{\alpha}{2}} = \beta$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

ОДЗ: $\cancel{x>4}$ $\quad x \ne \frac{9}{2}$

$\cancel{x \ne 3}$ $\quad\cancel{x\ne 5}$

$\cancel{x \ne 4}$

$\cancel{x>4}$

$x > \frac{26}{5}$

$x \ne \frac{27}{5}$ $\quad x > 4$

$x>4$ $\quad x\ne\frac{9}{2}$ $x \ne 5$
$x > \frac{26}{5}$ $\quad x \ne \frac{27}{5}$ $x \ne \frac{9}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot\log_{(2x-8)}(x-4) \\ \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26) \\ 2\log_{(5x-26)}(2x-8) \end{array}\right\} = 2$$

$\frac{18}{20}\cdot\frac{20}{2}\cdot 18$

$\frac{18}{8} = \frac{9\cdot 4}{9} \,|\, 2$

$y^2 +$

$y \quad y \quad y+1$

$\frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26) = 1$

$2(5x-26) = (x-4)^2$

$y^2(y+1) = 2$

$y^3 + y^2 - 2 = 0$

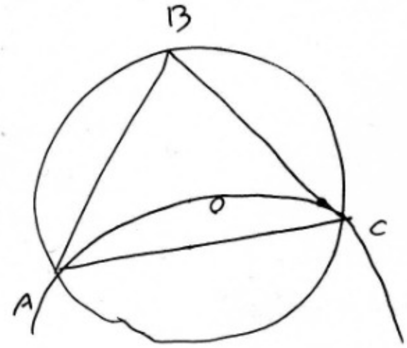
$y^2+2y+2 \ge 0$

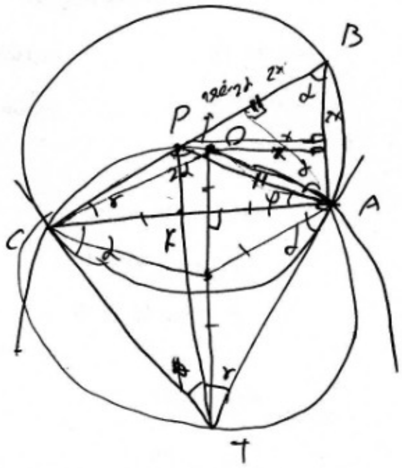
$(y^2+2y+2)(y-1)$

$y = 1$

$$\begin{array}{l|l} y^3+y^2-2 & y-1 \\ \hline y^3-y^2 & y^2+2y+2 \\ 2y^2-2 & \\ 2y^2-2y & \\ 2y-2 & \end{array}$$

Черновик



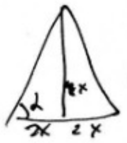


$\angle PAC = 180° - \gamma - 2\alpha$

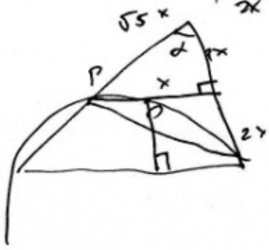
$$\frac{AK}{KC} = \frac{AP}{PC} \cdot \frac{AT}{TC} = \frac{AP}{PC}$$

$$\frac{CK}{\sin\varphi} = \frac{CI}{\sin ...} = \frac{AT}{\sin\xi} = \frac{AK}{\sin\gamma}$$

$\sin\gamma$



$$x \cdot 4x \cdot \frac{1}{2} = 2x^2$$



$$\frac{\sin\gamma}{\sin(180° - \gamma - 2\alpha)} = \frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma + 2\alpha)} = \frac{10}{8}$$

$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$10 = \frac{\sin(2\alpha+\gamma)}{\sin}$$

$$\frac{CB}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{AB}{\sin\alpha}$$

$$\frac{CP}{\sin(2\alpha+\gamma)} = \frac{AB}{\sin 2\alpha}$$

$8\sin\gamma = 10(\sin\gamma\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\cos\gamma)$

$10(2\sin\alpha\cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma(2\cos^2\alpha - 1)) = 8\sin\gamma$

$20(\sin\alpha\cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\cos^2\alpha) = 18\sin\gamma$

$$\frac{CB}{CP} = \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha} : \frac{\sin(2\alpha+\gamma)}{2\sin\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin(2\alpha+\gamma)} \cdot 2\cos\alpha$$

$$\frac{\sin\gamma}{...} = \frac{20}{18}$$

$$\frac{\sin\gamma}{\sin(2\alpha+\gamma)} = \frac{10}{8}$$

$$\frac{18}{20} \cdot \frac{10}{8} = \frac{...}{\sin(2\alpha+\gamma)}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

$$\frac{180}{160} = \frac{9}{8}$$

$\frac{2}{8} \cdot 18 = 7$

$\frac{81}{4}$

$\sin(\alpha+\gamma)\cos\alpha =$

$= \sin\alpha\cos\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\cos^2\alpha$

$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$

$18\sin\gamma = 20(\sin\alpha\cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\cos^2\alpha)$

$18\sin\gamma = 20\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}\cos\gamma + \sin\gamma \cdot \frac{4}{5}\right)$

$$\frac{\sin\gamma}{...} = \frac{20}{18} \qquad \frac{\sin(2\alpha+\gamma)}{\sin\gamma} = \frac{10}{8}$$

$0 =$

∨ ∨ ∨ 1 ⊔ 17

∨ ∨ ∨ 1 1 23 4

17 ∪ ∨

∪ ∪ ∨

1 123 3

1 1234 4

$90 = \cancel{1620}$ 75·6

3.

11

1 123 3

$90 \cdot 16 = 900 + 540$

$900 + 420 + 49 =$

$900 + 400 + 69$

$37 \cdot 37$

1369

1369 −

$900 + 540$

$39 \cdot 39$

$38 \cdot 38$