

Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100248**

ID профиля: **371021**

Вариант 20

② Пусть a_1 - первый член прогр.
 d - разность ариф. прогр.

$$S = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5 = \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = (a_1 + 2d) \cdot 5 = 5a_1 + 10d$$

Но условию:

$$\begin{cases} (a_1 + 5d)(a_1 + 10d) > S + 15 \\ (a_1 + 7d)(a_1 + 8d) < S + 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 5a_1d + 10a_1d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15 \\ a_1^2 + 7a_1d + 8a_1d + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15 & a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 - 15 > 5a_1 + 10d \\ a_1^2 + 15a_1d + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39 & a_1^2 + 15a_1d + 56d^2 - 39 < 5a_1 + 10d \end{cases}$$

$$a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 - 15 > a_1^2 + 15a_1d + 56d^2 - 39 \quad \begin{matrix} 39 \\ -15 \\ \hline 24 \end{matrix}$$

$$6d^2 < 24$$

$$d^2 < 4$$

$$d \in (-2; 2)$$

Если a_1, d - целые числа
 $d = -1$ - убывающая прогр.
 $d = 0$ - не подходит, т.к. не прогр.
 $d = 1$ - единственный вариант, который не год.

Переписываем усл. ба с учетом того, что $d = 1$

$$\begin{cases} (a_1 + 5)(a_1 + 10) > 5a_1 + 25 \\ (a_1 + 7)(a_1 + 8) < 5a_1 + 49 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} 56 \\ -49 \\ \hline 7 \end{matrix}$$

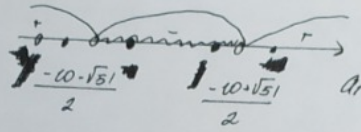
$$\begin{cases} a_1^2 + 50 + 15a_1 > 5a_1 + 25 \\ a_1^2 + 56 + 15a_1 < 5a_1 + 49 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1 + 5)^2 > 0 \text{ при любых } a_1 \neq -5 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases}$$

$$a_1^2 + 10a_1 + 7 = 0$$

$$b = 100 - 49 = 51 \quad a_1 = \frac{-10 \pm \sqrt{51}}{2}$$

$$A_1 = \frac{-10 \pm \sqrt{51}}{2}$$



Умножив

$$A_1 \in \left(\frac{-10 - \sqrt{51}}{2}, \frac{-10 + \sqrt{51}}{2} \right)$$

$$\sqrt{51} > 7$$

$$\frac{-10 - 7}{2} = \frac{-17}{2} = -8,5$$

$$\frac{-10 - 7}{2} = \frac{-17}{2} = -8,5$$

$$\frac{-10 - \sqrt{51}}{2} < -8$$

$$-10 - \sqrt{51} < -16$$

$$6 < \sqrt{51}$$

$$\frac{-10 + \sqrt{51}}{2} < 2$$

$$-10 + \sqrt{51} < 4$$

$$\sqrt{51} < 14$$

$$\frac{-10 + \sqrt{51}}{2} < 1$$

$$-10 + \sqrt{51} < 2$$

$$\sqrt{51} < 12$$

$$A_1 = -8; -7; -6; -4; -3; -2; \dots$$

$$\frac{-10 + \sqrt{51}}{2} < -1$$

$$-10 + \sqrt{51} < -2$$

$$\sqrt{51} < 8$$

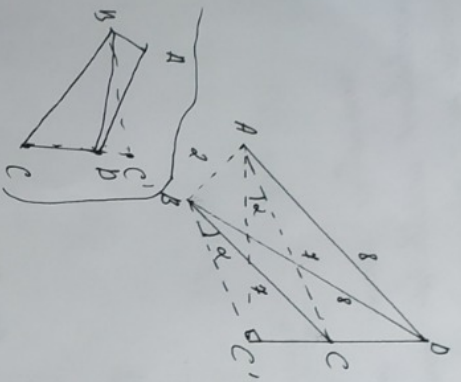
$$\frac{-10 - 8}{2} = -9$$

$$\frac{-10 - 8}{2} = -9$$

$$\text{Ответ: } -8; -7; -6; -4; -3; -2$$

4(проблем)

2



Рисунг 1: Дадено е триаголник ABC и точка D внатрешноста на триаголникот. Да се докаже дека $\angle BDC = \angle BAC + \angle ABD + \angle ACD$.

Рисунг 2: Дадено е триаголник ABC и точка D на страната BC. Да се докаже дека $\angle BDC = \angle BAC + \angle ABD + \angle ACD$.

$$R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S} = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha} = \frac{4c \cdot \cos \alpha}{\sqrt{49 \cos^2 \alpha - 1}}$$

$$\left(\frac{\cos^2 \alpha}{\sqrt{49 \cos^2 \alpha - 1}} \right)' = \frac{2 \cos \alpha \sqrt{49 \cos^2 \alpha - 1} - \frac{49 \cdot 2 \cdot \cos \alpha}{\sqrt{49 \cos^2 \alpha - 1}} \cdot \cos^2 \alpha}{49 \cos^2 \alpha - 1} = 0$$

кога $\alpha = 0$ $\angle C, \angle B$ соодветно!

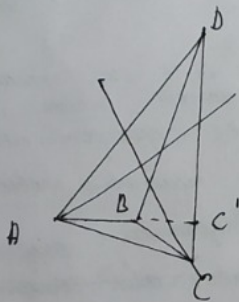
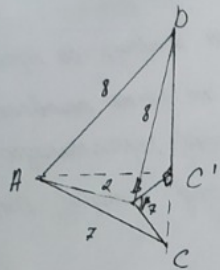
$\cos \alpha = \frac{1}{7}$

$\cos \alpha = \frac{1}{7}$

$\cos \alpha = \frac{1}{7}$ $\angle BC', \angle AC', \angle$ $\angle AC', \angle BC', \angle AB, \angle$ и \angle $\cos \alpha = \frac{1}{7}$ $\angle BC', \angle AC', \angle$ $\angle C', \angle$ $\angle C', \angle$ $\angle C', \angle$

$DC = \sqrt{64} - \sqrt{47} > 1$, $\sqrt{47}$

Споредбата на DC и $\sqrt{47}$



Цитовик

Рассмотрим теперь шар, касающийся ребра BC и BC' и касательный к плоскости основания $\triangle ABC'$ можно описать окружность

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{2 \cdot 49 \cos^2 \beta}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \sqrt{49 \cos^2 \beta - 1}}, \quad \beta = \angle C'BC$$

Плюс $\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{7} \quad BC' = \sqrt{2}$

$$CC' = \sqrt{49 - 2} = \sqrt{47}$$

$$BC' = \sqrt{64 - 2} = \sqrt{62}$$

$$BC = \sqrt{62} + \sqrt{47}$$

Через треугольнике

$$AB + AC > BC$$

$$15 > \sqrt{47} + \sqrt{62}$$

$$\sqrt{47} + 7 > 8$$

$$\sqrt{47} + 8 > 7$$

Ответ: $\sqrt{62} + \sqrt{47}; \sqrt{62} - \sqrt{47};$

③

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 13 & \text{- ур-е окружности} \\ a^2 + b^2 \leq \min(-4a-6b, 13) \end{cases}$$

Числовик

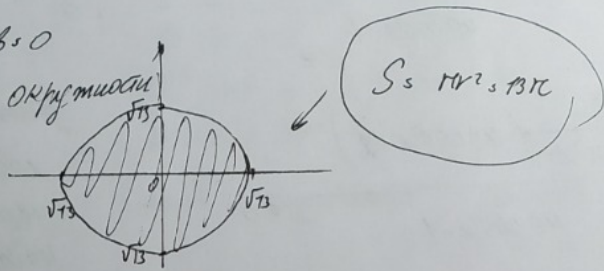
Пусть $a \geq 0, b \geq 0$

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 13 \\ a^2 + b^2 \leq -4a - 6b \end{cases} \text{ - выполняется только при } a=0, b=0$$

$\underbrace{a^2 + b^2}_{\text{пол. число}} \leq \underbrace{-4a - 6b}_{\text{отр}}$

тогда при $a=0, b=0$

$x^2 + y^2 \leq 13$ - ур-е окружности



пусть $a \leq 0, b < 0$

$\text{и } \min(-4a-6b, 13) \leq 13 \quad -4a-6b > 13$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 13$$

$$a^2 + b^2 \leq 13$$

$$x^2 - 2xa + a^2 + y^2 - 2yb + b^2 \leq 13$$

$$a^2 + b^2 \leq 13$$

Если $a^2 + b^2 \leq 13$

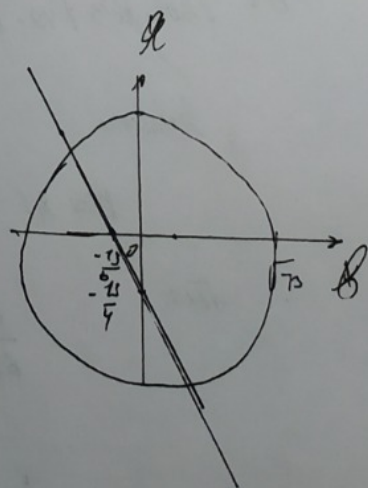
$$x^2 - 2xa + a^2 + y^2 - 2yb + b^2 \leq 0$$

$$-4a - 6b \leq 13$$

$$4a + 6b = -13$$

$$a = \frac{-13 - 6b}{4}$$

$$(a-x)^2 + (y-b)^2 \leq 13$$



⑤

Упрощение

$$R' = \left(\frac{\cos \alpha}{\sqrt{49 \cos^2 \alpha - 1}} \right)^2 = 0$$

$$\frac{2 \cos \alpha \sqrt{49 \cos^2 \alpha - 1} - \cos \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{49 \cos^2 \alpha - 1}} \cdot 98 \cos \alpha}{49 \cos^2 \alpha - 1} = 0$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sqrt{49 \cos^2 \alpha}} \left(2(49 \cos^2 \alpha - 1) - 49 \cos^2 \alpha \right) = 0$$

$$49 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sqrt{49 \cos^2 \alpha - 1}} (49 \cos^2 \alpha - 2) = 0$$

$$49 \cos^2 \alpha - 1$$

можно, если по экстремуму:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= 0 & \cos \alpha &= \pm \frac{\sqrt{3}}{7} \\ 49 \cos^2 \alpha &= 2 & \cos \alpha &= \pm \frac{1}{7} \\ 49 \cos^2 \alpha &= 1 & \cos \alpha &= \pm \frac{1}{7} \end{aligned}$$

$\cos \alpha = \frac{1}{7}$ - $BC' = 1, AB' = 1$, не выполняется неравенство треугольника
 $AB < AC' + BC' \quad AB < 2$

$\cos \alpha = 0$ - max. ширина из пункта

$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{7}$ - min $BC' = \sqrt{2}$

~~$sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{49}} = \frac{\sqrt{48}}{7} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$~~ $CC' = 3\sqrt{5}$

~~$C'D = \sqrt{BD^2 - BC'^2} = \sqrt{49 - 1} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$~~

С от основания е б

Значения,

$$\begin{array}{r} DC \approx 8,1 \\ \sqrt{62} \approx \begin{array}{r} 8,1 \\ 8,1 \\ \hline 81 \\ 648 \\ \hline 65,61 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \textcircled{8} \\ \sqrt{62} \approx \begin{array}{r} 7,9 \\ 7,9 \\ \hline 717 \\ 553 \\ \hline 6241 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \textcircled{6} \\ \sqrt{47} \approx \begin{array}{r} 6,8 \\ 6,8 \\ \hline 544 \\ 408 \\ \hline 4624 \end{array} \end{array}$$

$7 > \sqrt{47}$
 $\sqrt{62} - \sqrt{47} > 1$

$62 > 1 + 47 + 2\sqrt{47}$

$14 > 2\sqrt{47}$

Чертовик 3

и < ABC - тупой
или раскрываем
и ризируем

3 < C'BC

$$S = \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 \cdot (a_1 + 2d) \cdot 5 = 5a_1 + 10d$$

$$\begin{cases} (a_1 + 5d)(a_1 + 10d) > 5a_1 + 10d + 15 \\ (a_1 + 7d)(a_1 + 8d) < 5a_1 + 10d + 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15 \\ a_1^2 + 15a_1d + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 - 15 > 0 \\ a_1^2 + 15a_1d + 56d^2 - 39 < 0 \end{cases}$$

$$50d^2 - 15 > 56d^2 - 39$$

$$6d^2 < 24$$

$$d^2 < 2 \quad d \in [-1, 1]$$

$$-1, 0, 1 \quad (d=1)$$

7C

$$7 + \sqrt{62}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 + 50 > 5a_1 + 10 + 15 \\ a_1^2 + 15a_1 + 56 < 5a_1 + 10 + 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 & a_1 + 5 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases}$$

$$b = 100 - 49 = 51$$

$$a = \frac{-10 \pm \sqrt{51}}{2}$$

$$\frac{56 - 39}{17}$$

$$\frac{-10 - \sqrt{51}}{2}, \frac{-10 - 7}{2}$$

$$, \frac{-7}{2} \approx -7.5$$

$$\frac{-10 - 8}{2}, \frac{-18}{2} = -9$$

$$\frac{-10 - \sqrt{51}}{2} < -8$$

$$-10 - \sqrt{51} < -16$$

$$6 < \sqrt{51}$$

3

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100248**

ID профиля: **371021**

Вариант 20

5.

$$\log_{\sqrt{2x-3}} (x-4)$$

kurubur

$$\log_{\sqrt{2x-3}} (5x-26)$$

$$\log_{\sqrt{5x-26}} (2x-8)$$

$$2x-8 > 0$$

$$2x-8 \neq 1$$

$$(x-4)^2 > 0$$

$$(x-4) \neq 1$$

$$5x-26 > 0$$

$$\sqrt{5x-26} \neq 1$$

$$x > 4$$

$$x \neq \frac{9}{2}$$

$$x \neq 4$$

$$x > 5, x > 3$$

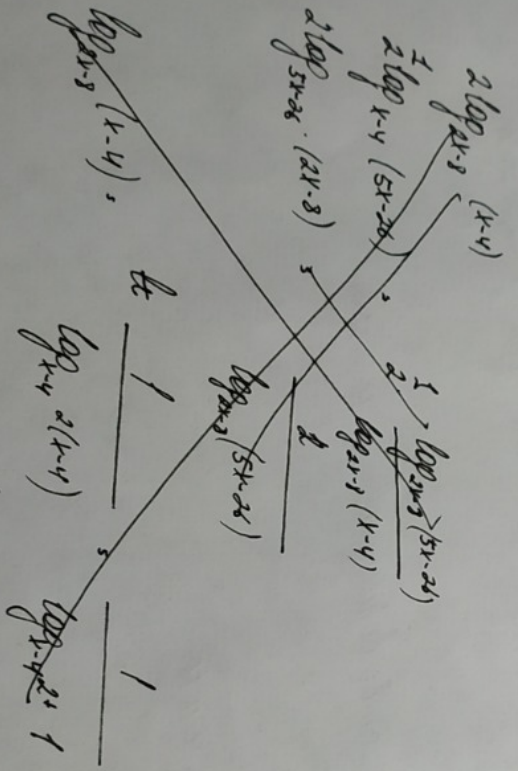
$$x > \frac{26}{5}$$

$$x > 5, \frac{1}{5} > 5, 2$$

$$5x \neq 27, x > \frac{27}{5} \neq 5, 4$$

$$x > 5, 2,$$

$$x \in (5, 2), x \in 5, 4$$



kurubur

kurubur

kurubur

- a. $2 \log_{2x-8} (x-4)$
- b. $\frac{1}{2} \log_{x-4} (5x-26)$
- c. $2 \log_{5x-26} \cdot (2x-8)$

kurubur

kurubur

$$a^2(a+1) \cdot a$$

$a^3 \cdot a^2 = 2$ a, c - корни уравнения Числовик

$a^3 \cdot a^2 - 2 = 0$ (*)

$(a^3 + ba + c)(a-1) = a^3 \cdot a^2 - 2$ - представим $a^3 \cdot a^2 = 2$ в виде

$a^3 + ba^2 + ca - a^2 - ba - c = a^3 + a^2 - 2$

$a^2(b-1) + a(c-b) - c = a^3 - 2$

$b-1=1$

$b=2$

$c=2$

$(a^2 + 2a + 2)(a-1) = 0$

$a^2 + 2a + 2 = 0$

$b = 4 - 8 < 0$ - нет корней

$(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)$, где

a_1, a_2, a_3 - корни уравнения (*)

b, c - корни квадратного урав.

$(a=2)$

Знаем, знаем двух из них равно, а знаем равно 2

то ба
и
состав

$a=1 \Rightarrow \log_{(2x-3)} (x-4)^2 = 1$

$x^2 + 16 - 8x = 2x - 3$
 $x^2 - 10x + 24 = 0$
 $x_1 = 6$
 $x_2 = 4$

$\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases} \quad \begin{cases} a=1 \\ c=1 \\ b=2 \end{cases} \quad \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$

или $x=6$ $c = \log_{\sqrt{30-26}} (12-3) = \log_2 4 = 2$

$\log_{2x-3} (x-4)^2 = 1$
 $\log_{2x-3} (x-4)^2 = \log_{2x-3} (2x-3)$

$b=1 \quad (x-4)^2 = 5x-26$

$x^2 + 16 - 8x = 5x - 26$

$x^2 - 13x + 42 = 0$

$x_1 = 6$
 $x_2 = 7$

Скорее всего $x=6$ подходит по условию задачи

Ответ: 6

$c=1 \quad 5x-26 = (2x-3)^2 = 4x^2 + 64 - 32x$

$4x^2 - 37x + 90 = 0$

$D = 37^2 - 4 \cdot 90 < 0$ (*)

37	16	37
37	90	37
259	1440	259
11	111	111
1369	1369	

Числовик

4. НОД (a, b, c) = 10
 НОК (a, b, c) = 2¹² · 5¹⁶

НОД - это произведение простых делителей, которые присутствуют во всех 3 числах

НОК - это произведение простых делителей, из которых минимум одно присутствует в каждом из чисел. Поэтому a, b, c можно представить в виде

$a = 2^m \cdot 5^k \cdot 5^n$ $m, k, n = 0, 1, 2, \dots, 16$
 $b = 2^x \cdot 5^y \cdot 5^z$ $x, y, z = 0, 1, 2, \dots, 15$
 $c = 2^p \cdot 5^q \cdot 5^r$

при этом среди $m, k, n = 16$
 среди $x, y, z = 15$

У нас есть 3 · 3 = 9 комбинаций, как выбрать комбинацию m, k, n, x, y, z , то есть среди $m, k, n = 16$
 среди $x, y, z = 15$

Пусть тогда для n 16 вариантов
 для z 17 вариантов
 для k 17 вариантов
 для x 16 вариантов

Начиная, это выбор m и произведений тогда всего получим

Всего	9 · 16 · 17 · 16 · 17	вариантов	
③	④	④	③
16	17	256	2294
<u>16</u>	<u>17</u>	<u>9</u>	<u>289</u>
36	119	2204	20646
<u>16</u>	<u>17</u>		<u>2294</u>
256	289		8
			<u>18352</u>
			662966

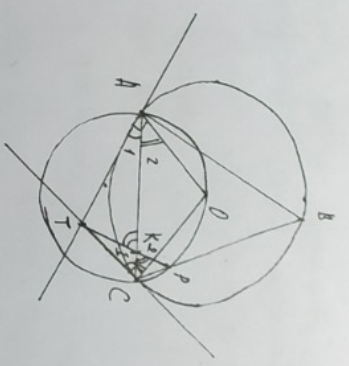
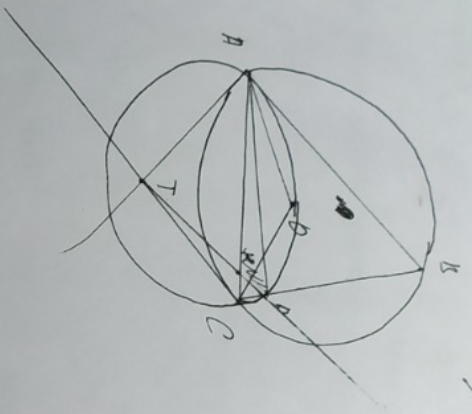
Ответ: 662 966

6)



См. 10
См. 8

Минимум



1) $AT \cdot TC$ как расстояние к ω из точки A , $AT \cdot TC$ как расстояние

2) $\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$, м.к. AO, OC - радиусы AT, TC , касательная

3) O - точка пересечения диаметров AC, BT .

4) $\triangle APO$ и $\triangle CPO$ равны по двум кат. $\frac{AO}{CO} = \frac{PO}{PO} = \frac{AP}{CP} = \frac{1}{1}$

5) $\angle APC = 180^\circ$

6) $AO = OP$ как радиусы, $\triangle AOP$ - равнобедр.

7) $\angle CAT = \angle 1$ $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$

$\angle AOT = \angle OCT = 90^\circ$
 $\angle AOC = \angle AOT + \angle TOC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Около $ATCT$ вписана
окружность $AOCT$ с центром O
таким образом

значит, T лежит на дуге AC окружности $AOCT$

8)

$$HOK(5; 30) = 5$$

$$HOK(5; 30) = 30$$

$$HOD(8; 26) = 2$$

$$HOK(8; 26) = 104$$

$$12 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 5$$

$$20 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3$$

$$30 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 = 2$$

$$HOK(12; 20; 30) = 60$$

$$HOD(12; 20; 30) = 2$$

$$0, 1, 2$$

$$2-0-1$$

$$21 = 7 \cdot 3$$

$$70 = 7 \cdot 10$$

$$7 = 7$$

Числовик

$$\begin{matrix} 26 \\ 3 \\ \hline 78 \end{matrix}$$

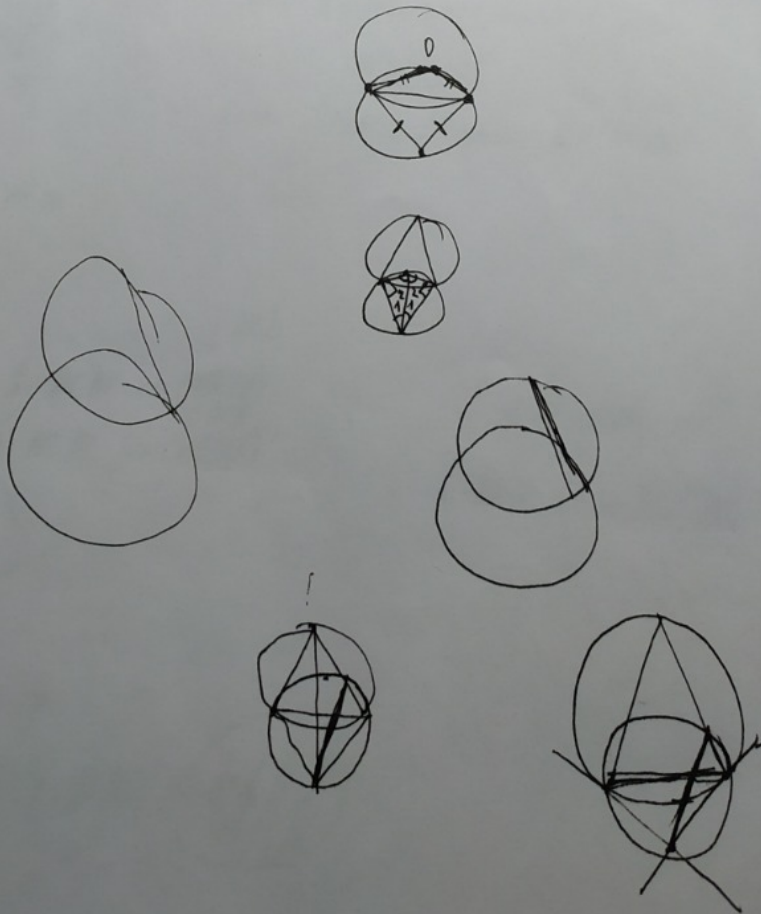
$$\begin{matrix} 26 \\ 4 \\ \hline 104 \end{matrix}$$

$$HOD(21; 70) = 7$$

$$HOK(21; 70) = 210$$

$$HOD(21; 70; 7) = 7$$

$$HOK(21; 70; 7) = 210$$



6-

7