Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100236**

ID профиля: **126555**

Вариант 20

Чистовик

N1

пусть член прогрессии увелич на d, тогда

$(d \in N)$

$a_2 = a_1 + d$

$a_n = a_1 + (n-1)d$, тогда

$a_6 = a_1 + 5d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_8 = a_1 + 7d$

$a_9 = a_1 + 8d$ $\Rightarrow$

$S = \sum_{n=1}^{5} a_1 + (n-1)d = 5a_1 + 10d$

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+10d) > 5a_1+10d+15 \\ (a_1+7d)(a_1+8d) < 5a_1+10d+39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 > 5a_1+10d+15 \\ 5a_1+10d+39 > a_1^2+15a_1d+56d^2 \end{cases}$$

сложим и сократим лишнее

$39 > 15 + 6d^2$

$d^2 < 4 \Rightarrow 0 < d < 2$ (т.к. возрастает прогрес) $\Rightarrow$

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~$a_1^2+15a_1d+50d^2 > 5a_1+10d+15$~~

$5a_1+10d+15 = S_1$, тогда

$a_1^2+15a_1d+50d^2 = S_2$

① ② ③ ④

S_1 S_2 S_2+6d^2 S_1+24

← Они всегда

~~$S_2 - a_1^2$~~

~~$S_1 - a_1$~~

~~из разности ③ и ② получим~~

~~график $S_1(a_1)$; $S_1(a_1)+24$;~~
~~$S_2(a_1)$; $S_2(a_1)$~~

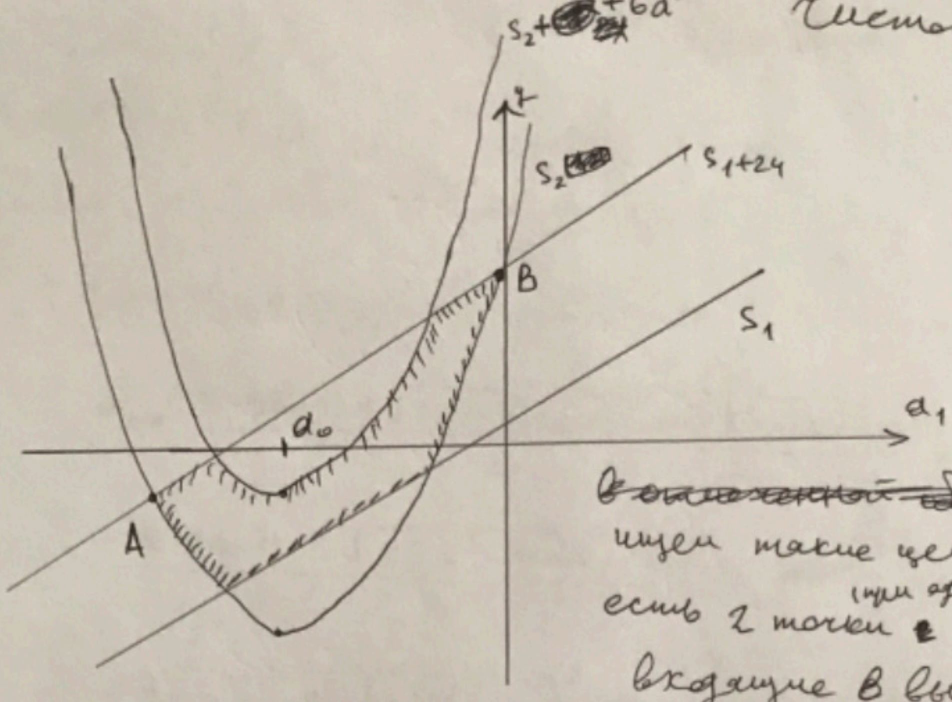
~~[illegible]~~

Изобразим это неравенство на прямоуг сист координат с осью у от a_1

1

21100236 (U126555 M1303106)

Чистовик



~~В отложенной области~~
ищем такие целые a_1, что есть 2 точки (при одном a_1) $(a_1; y)$, входящие в выделенную область

т.к. 2 параболы одинаковые, но одна поднята на $6d^2$, то крайние точки A и B + докажем, что

S_1 может быть $< S_2+6d^2$

a_0 – минимум S_2: $a_0 = -7{,}5d$

$S_2(-7{,}5d) = -\frac{25d^2}{4}$ $\qquad \underset{d=2}{-25} < S_2(-7{,}5d) < \underset{d=0}{0}$

$S_2(-7{,}5d)+6d^2 = -\frac{d^2}{4}$ $\qquad \underset{d=2}{-1} < S_2(-7{,}5d)+6d^2 < \underset{d=0}{0}$

$S_1(-7{,}5d) = 5(-7{,}5)d + 10d + 15 = -\frac{75}{2}d + 10d + 15 = -\frac{55}{2}d + 15$

$\underset{d=2}{-40} < S_1(-7{,}5d) < \underset{d=0}{15}$

$-40 < -25 \Rightarrow$ есть d при кот $S_1 < S_2$

~~Видно, что, чем больше d, тем больше зона~~

~~S_1 опускается ниже~~

Рассмотрим т. A и т. B

2

Чистовик

$S_1 + 24 = S_2$

$5a_1 + 10d + 39 = a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2$

$a_1^2 + 5(3d-1)a_1 + 50d^2 - 10d - 39 = 0$

$$a_1 = \frac{-5(3d-1) \pm \sqrt{25(9d^2-6d+1) - 200d^2 + 40d + 156}}{2} =$$

$$= \frac{-5(3d-1) \pm \sqrt{25d^2 - 110d + 181}}{2}$$

$\sqrt{25d^2 - 110d + 181}$ ↓ при $d \in (0;2)$
(минимум в т. $d = \frac{11}{5} > 2$ =>

a_1 max будет при + и мин d ($d \neq 0$ (неравен, просто выколем т. B и т. A))

$$a_{1B} = \frac{5 + \sqrt{181}}{2}$$

a_1 мин будет при − и макс d ($d \neq 2$)

$$a_{1A} = \frac{-25 - \sqrt{61}}{2} \Rightarrow \left(-15d - \sqrt{25d^2 - 110d + 181}\right)' < 0$$

(−15d убывает быстрее)

$$-\frac{25 + \sqrt{61}}{2} < a_1 < \frac{5 + \sqrt{181}}{2} \Rightarrow$$ т.к. $7 < \sqrt{61} < 8$, $13 < \sqrt{181} < 14$

Ответ: $-16 \le a_1 \le 9$

$$\boxed{a_1 = \{-16; -15; -14; -13; -12; -11; -10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}}$$

N3 чистовик

Наложим 2 плоскости друг на друга xoy и aob, тогда,

рассмотрим

$a^2+b^2 \le \min(-4a-6b;\ 13)$

если $-4a-6b<13$, то

$a^2+b^2 \le -4a-6b \Leftrightarrow (a+2)^2+(b+3)^2 \le 13$

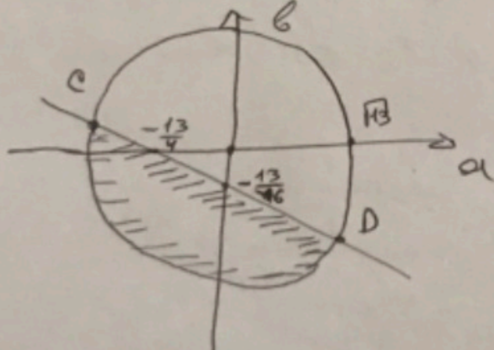
круг с центром $(-2;-3)$ ~~$(-3;-2)$~~ и радиусом $\sqrt{13}$

при $-4a-6b \ge 13$

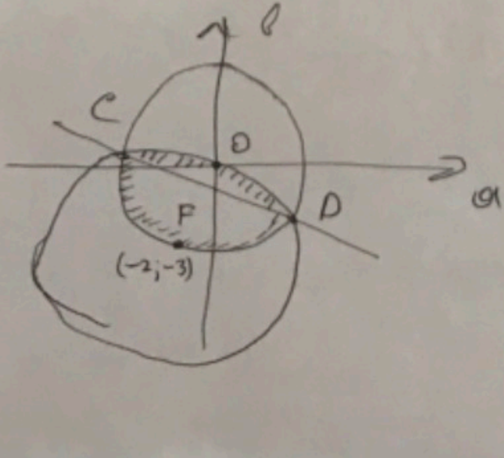
$a^2+b^2 \le 13$ — круг с центром $(0;0)$ и рад $\sqrt{13}$

$-4a-6b \ge 13$

$b \le -\frac{2}{3}a-\frac{13}{6}$



$$\begin{cases} b \ge -\frac{2}{3}a-\frac{13}{6} \\ (a+2)^2+(b+3)^2 \le 13 \end{cases}$$ (центр $\in$ окр $a^2+b^2=13$) и перес в т. C и т. D



получаем пересечение 2-х кругов ~~окружностей~~

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 13 \\ (a+2)^2+(b+3)^2 \le 13 \end{cases}$$

4

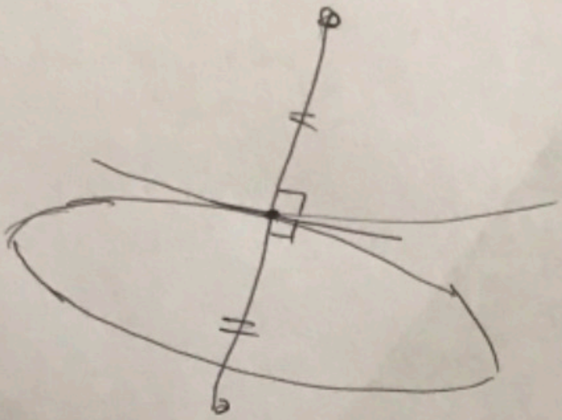
Чистовик

рассмотрим $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13$ –

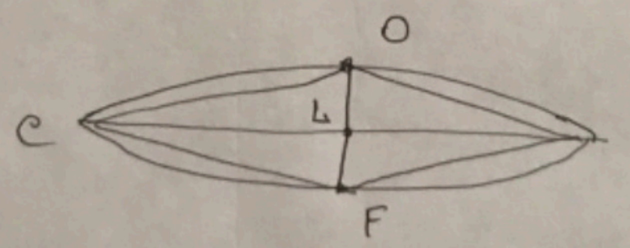
~~окружность~~ круг с центром $(x;y)$ и рад $\sqrt{13}$ =>

край M, когда $(x-a)^2+(y-b)^2=13$ касается фигуры из 1ой части решения н.с.

В обоих частях радиус равен $\sqrt{13}$, то все размеры M будут в 2 раза больше



~~Площадь~~ Найдём S фигуры из 1ой части и умножим на $2^2=4$ ($S \sim k^2$, где k – коэф подобия)



$OF=\sqrt{13}$

O и F – центры окружностей =>

$OC = CF = FD = DO = OF = \sqrt{13}$ =>

$\angle OFD = 60^\circ$ =>

$S = \left(\frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot OF^2 - S_{\Delta LFD}\right) \cdot 4$; $S_{\Delta LFD} = FL \cdot LD$

$FL = \frac{\sqrt{13}}{2}$

$LD = FD \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{13}$ =>

$S = \left(\frac{\pi \cdot 13}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 13\right) \cdot 4 = 13(\pi - \sqrt{3})$ =>

5

$S_M = 4S = 52(\pi - \sqrt{3})$

21100236 (U126555 M1303106)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100236**

ID профиля: **126555**

Вариант 20

№4 Чистовик

НОД$(a;b;c)=10$

НОК$(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16}$ ⇒

~~a, b, c : только~~ a, b, c состоят только из 2 и 5 ⇒ (иначе в НОК ещё 1 множитель(и) отлич от 2 и 5)

$a=10\cdot 2^{\alpha_1}\cdot 5^{\alpha_2}$ $\alpha_1;\alpha_2;\beta_1;\beta_2;\gamma_1;\gamma_2$ – не отриц. целые числа

$b=10\cdot 2^{\beta_1}\cdot 5^{\beta_2}$ тогда НОД$=10\cdot 2^{\min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)}\cdot 5^{\min(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)}$

$c=10\cdot 2^{\gamma_1}\cdot 5^{\gamma_2}$ НОК$=10\cdot 2^{\max(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)}\cdot 5^{\max(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)}$

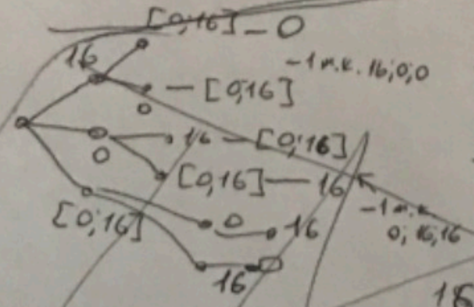
$$\begin{cases}\min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)=0\\ \min(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)=0\\ \max(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)=16\\ \max(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)=15\end{cases}$$

⇒ один из $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ равен 0, один 16, третий любому от 0 до 16 вкл. для $\alpha_2;\beta_2;\gamma_2$: 0; 15 и [0;15]

~~Разно~~ $\alpha_1;\beta_1;\gamma_1$ и $\alpha_2;\beta_2;\gamma_2$ независимы ⇒ найдём для каждого и перемножим (1)

$\alpha_1;\beta_1;\gamma_1$

~~$17+17+17+17+2\cdot 17^2=6\cdot 17^2=$~~



$=102-2=100$

Для $\alpha_2;\beta_2;\gamma_2$ аналогично, но [0;16] заменя на [0;15]

$16+16+16+16+2\cdot 16=6\cdot 16=$
$=96$ ⇒

всего $102\cdot 96=9792$

$$\begin{array}{r}96\\ \times 102\\ \hline 192\\ 96\\ \hline 9792\end{array}$$

Ответ: 9792.

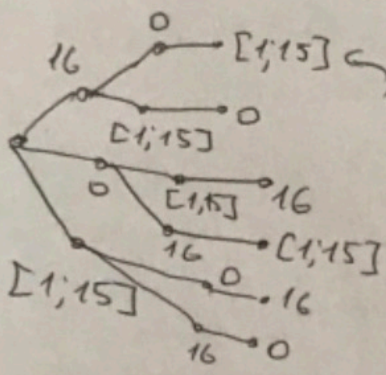
Чистовик.

рассмотрим когда

$0; 16; [1;15]$ и $0;16;16$ и $0;0;16$

$\downarrow$ 3 вар-та

$\downarrow$ 3 вар-та



15 вар-ов

$15+15+15+15+2\cdot 15 =$
$= 15\cdot 6 = 90$

всего

$90+6=96$

аналогично для $\alpha_2; \beta_2; \gamma_2$:

$14+14+14+14+2\cdot 14 = 6\cdot 14 = 84$

$$\begin{array}{r} 96 \\ \times\ 90 \\ \hline 8640 \end{array}$$

$84+6=90 \Rightarrow$ всего

$96\cdot 90 = 8640$

Ответ: 8640

2

№5 Чистовик.

Пусть: $a = \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$

$b = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$; $c = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$$\begin{cases} 2x-8>0 \\ 2x-8\neq 1 \\ x-4>0 \\ x\neq 5 \\ x\neq 3 \\ 5x-26>0 \\ 5x-26\neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x>4 \\ x\neq 4,5 \\ x>4 \\ x\neq 5 \\ x\neq 3 \\ x>\frac{26}{5} \\ x\neq\frac{27}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} x>\frac{26}{5} \\ x\neq\frac{27}{5} \end{cases}$$

$b = \log_{(x-4)^2}(5x-26) = \log_{x-4}\sqrt{5x-26}$

$a\cdot b\cdot c = \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)\cdot\log_{x-4}\sqrt{5x-26}\cdot\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) =$

$= \log_{\sqrt{2x-8}}(2x-8) = 2$

Пусть $x, y, z = a; b; c$, но не известно какое чему, но известно, что $x=y$; $z=x+1=y+1$,

тогда

$x\cdot y\cdot z = 2 = x\cdot x(x+1)$

③

$x^3+x^2-2=0$

$x^3-x^2+2x^2-2x+2x-2=0$

$(x-1)(x^2+2x+2)=0$

$$\left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^2+2x+2=0 \end{array}\right.$$

$x^2+2x+2=0$ – нет решений

$D=4-8<0$

$x=1 \Rightarrow x=1; y=1; z=2 \Rightarrow$ 2 числа равны

1 из 3^е равно 2.

всего 3 вар-та:

1; 1; 2; 1; 2; 1; 2; 1; 1 проверим все 3.

21100236 (U126555 M1303107)

Чистовик.

1) $\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=1 \\ \log_{x-4}\sqrt{5x-26}=1 \\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=2 \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{2x-8}=x-4 \\ x-4=\sqrt{5x-26} \\ 5x-26=2x-8 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x-8=x^2-8x+16 \\ x^2-8x+16=5x-26 \\ 5x-26=2x-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-26=2x-8 \\ x^2-8x+16=2x-8 \end{cases}$

4

$\begin{cases} 3x=18 \\ x^2-10x+24=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=6 \\ \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=4 \end{array}\right. \end{cases}$

$x=6$

2) $\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=1 \\ \log_{(x-4)}\sqrt{5x-26}=2 \\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=1 \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{2x-8}=x-4 \\ (x-4)^2=\sqrt{5x-26} \\ \sqrt{5x-26}=2x-8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ ~~$\sqrt{2x-8}=x-4$~~

$\begin{cases} 2x-8=x^2-8x+16 \\ (x-4)^4=5x-26 \\ 5x-26=4x^2-32x+64 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-10x+24=0 \\ 4x^2-37x+90=0 \\ (x-4)^4=5x-26 \end{cases}$

$\begin{array}{r} \times\ 37 \\ 37 \\ \hline 259 \\ 111 \\ \hline 1369 \end{array}$

$\begin{array}{r} 90 \\ 16 \\ \hline 540 \\ 900 \\ \hline 1440 \end{array}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=6 \end{array}\right. \\ \varnothing \\ (x-4)^4=5x-26 \end{cases}$ $\Leftarrow$ т.к. для $4x^2-37x+90=0$

$D=37^2-16\cdot 90=$

$=1369-1440<0$

3) $\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=2 \\ \log_{(x-4)}\sqrt{5x-26}=1 \\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-8=x-4 \\ (x-4)^2=5x-26 \\ (2x-8)^2=5x-26 \end{cases}$

4

$\begin{cases} x=4 \\ (x-4)^2=4(x-4)^2 \\ (x-4)^2=5x-26 \end{cases}$ $\begin{cases} x=4 \\ x=4 \\ (x-4)^2=5x-26 \end{cases}$ $\Leftarrow$ $x=4$ – не решение $\Rightarrow$ корней нет $\Rightarrow$

Ответ: $x=6$ $\Leftarrow$ подходит по ОДЗ.

21100236 (U126555 M1303107)