Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100154**

ID профиля: **353845**

Вариант 20

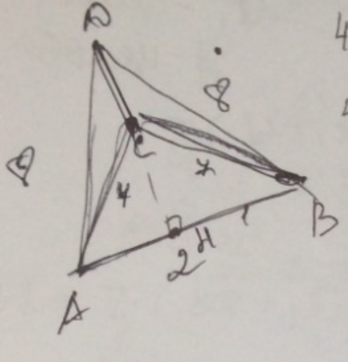
Черновик

49-1

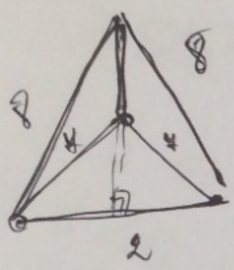
48 = 6·8

$4\sqrt{3}$

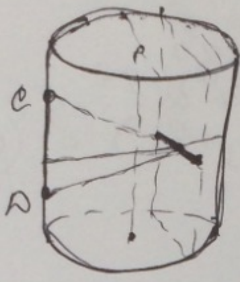
$\boxed{CH = 4\sqrt{3},\ DH = 3\sqrt{7}}$



1) Ребро CD ∥ оси цилиндра, и CD лежит на боковой поверхности. ⇒ CD – лежит на боковой поверхности.

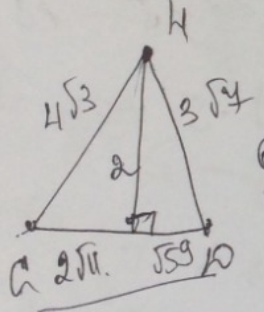


$CD \perp AB$



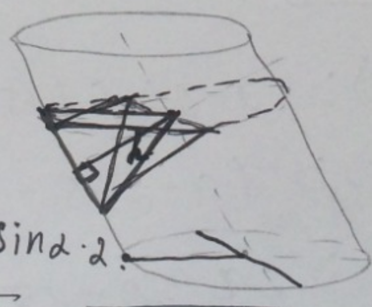
2) $CD \perp AB$. т.к. $DA = DB$ и $CA = CB$.

3) AB – хорда в окружности с радиусом радиуса цилиндра. Значит радиус цилиндра ≥ 2. Меньше он быть не может. Значит высота на CD в треуг. $DCH = 2$.



48-4

63-4 = 59



$h = \sin\alpha \cdot 2$ $\quad 2\sqrt{11} \quad \sqrt{59}$

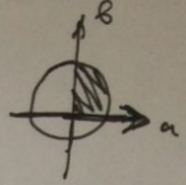
$$\sqrt{CH^2 - h^2} + \sqrt{DH^2 - h^2} = \sqrt{16\cdot 3 - 4\cdot \sin^2\alpha} + \sqrt{9\cdot 7 - 4\sin^2\alpha} =$$

$=$

$$\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; 0\right)$$

1) $\sin = \frac{1}{2}$ $\quad \sqrt{47} + \sqrt{62}$

Черновик



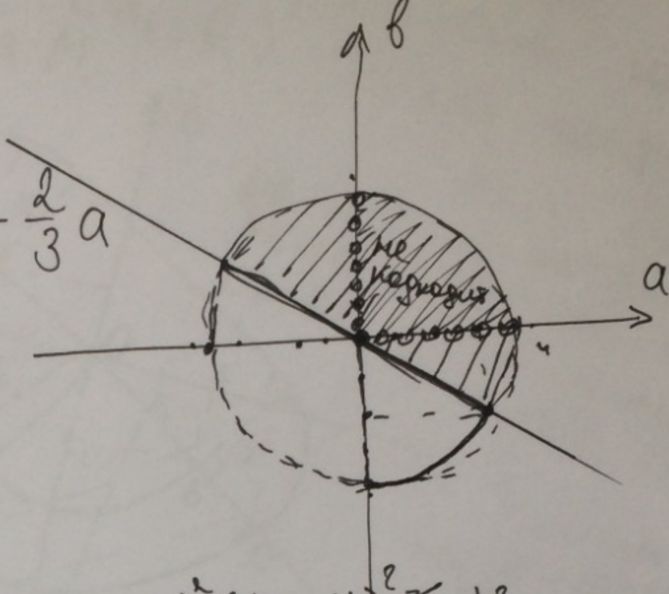
$-4a-6b \geq 0$

$-2a \geq 3b$. Пусть $a \geq 0$ $b > 0$.

$b < 0$ $a > 0$.

$\cancel{a \leq -\frac{3}{2}b}$

$\cancel{b \geq -\frac{2a}{3}}$ $b \leq -\frac{2}{3}a$



$b > 0$, $a < 0$

$-2a \geq 3b$

$b \leq -\frac{2}{3}a$

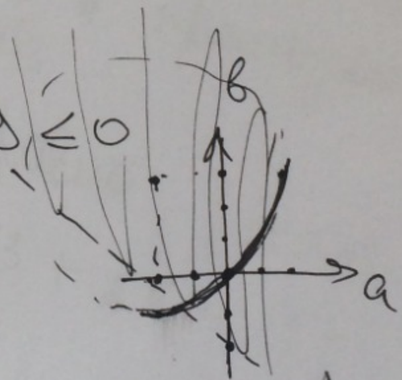
$(x+x_1)^2+(y-y_1)^2 \leq 13$.

$b < 0$, $a < 0$

$b \leq -\frac{2}{3}a$

$a^2+b^2 \leq -4a-6b$

$a^2+4a+4-4+b^2+6b+9-9 \leq 0$



$$\begin{cases} (a+2)^2+(b+3)^2 \leq 16. \\ -4a-6b \leq 13 \end{cases}$$

$-\frac{4a-13}{6} < b$

$a=0$ $-\frac{13}{6} = -2-\frac{1}{6}$

$b=0$ $-4a=13$

$a=-\frac{13}{4}=-3-\frac{1}{4}$

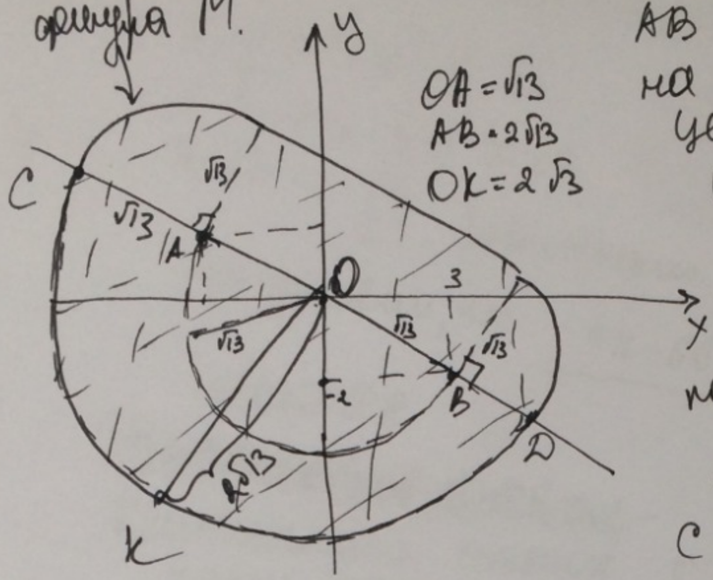
$x-y \geq 2$

$x-2 \geq y$

$2x-3y \geq 2$

Задание 3 Чистовик

5) Фигура M определяется положением крайних (a_*, b_1). То есть контуром полуокружности AB и отрезком AB, на которых лежат центры крайних окружностей с радиусом $\sqrt{13}$.



Значит за ~~полукругом~~ полуокружностью AB лежит полукруг CKD с радиусом $2\sqrt{13}$.

А за прямой AB (CD) лежат две четверти круга с радиусом $\sqrt{13}$ и прямоугольник со сторонами $\sqrt{13}$ и $2\sqrt{13}$

6) Значит площадь равна: $\frac{1}{2}\pi\cdot4\cdot13+\frac{1}{2}\pi\cdot13+2\cdot13=$

$=\frac{1}{2}\pi\cdot5\cdot13+26=\frac{65\pi}{2}+26$

$\left[\text{Ответ: } S=\frac{65\pi}{2}+26\right]$

21100154 (U353845 M1305074)

Задание 2

Чистовик.

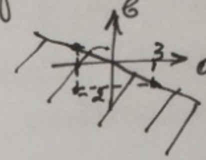
Задание 3.

1) $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b;\ 13) \quad (2) \end{cases}$ – график круга с центром в точке $(a; +b)$ и радиусом $\sqrt{13}$.

2) I. $\begin{cases} a^2+b^2 \le 13 \\ -4a-6b \ge 13 \end{cases}$ II $\begin{cases} (a+2)^2+(b+3)^2 \le 16 \\ -4a-6b < 13 \end{cases}$

(2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} I \\ II \end{array} \right.$ равносильно совокупности систем I и II

при условии, что $\underline{-4a-6b \ge 0}$.



– нижняя полуплоскость.

Решениями систем I и II будет являться все такие числа a и b, что $\begin{cases} a^2+b^2 \le 13 \\ -4a-6b \ge 0 \end{cases}$

3) Значит, $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13$ – это множество кругов с центрами в $(a; b)$, где $\begin{cases} a^2+b^2 \le 13 \\ -4a-6b \ge 0 \end{cases}$ (3)

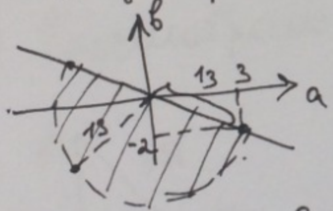
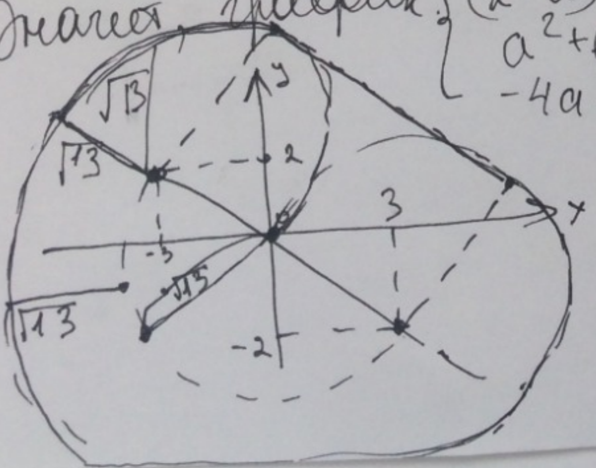


график точек $(a; b)$ – удовлетворяющих системе (3).

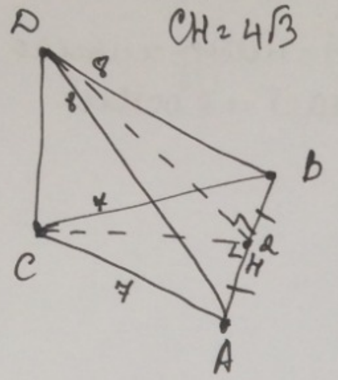
4) Возьмем (a_1, b_1) из этого множества пар точек. $(x-a_1)^2+(y-b_1)^2 \le 13$. Это круг с центром в точке $(a_1; b_1)$ с радиусом $\sqrt{13}$.

Значит, график $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le 13 \\ -4a-6b \ge 0 \end{cases}$, это

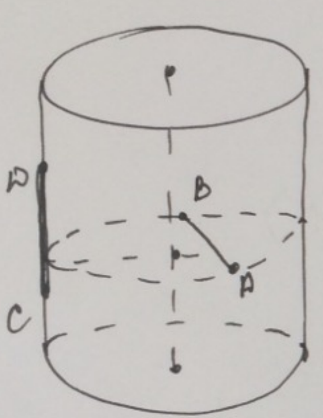


Задание 2 Чистовик

$DH = 3\sqrt{7}$
$CH = 4\sqrt{3}$



1) В тетраэдре ABCD ~~доказан~~ $AB \perp DC$, т.к. $DH \perp AB$ и $CH \perp AB$, DC лежит в плоскости пересекающихся прямых DH и DC.



2) Ребро CD ∥ оси цилиндра, точки C и D лежат на боковой поверхности. Значит, CD – лежит на боковой поверхности.

3) Т.к. $AB \perp CD$, AB является хордой в сечении цилиндра, которое является кругом, параллельным основанию. Значит R сечение = R цилиндра.

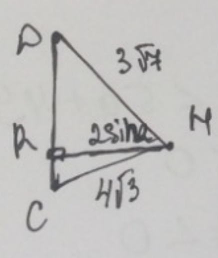
4) Т.к. хорда ≤ диаметру окружности, то $2R$ сечение ≥ AB. Значит R цилиндра будет наименьшим тогда, когда он будет равен AB/2

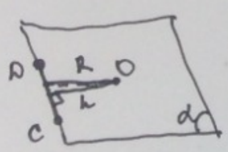
5) Рассмотрим осевое сечение: AB = 2, R цил = 1.

RH – высота в △DCH.

Т.к. цилиндр может быть наклонным, это не обязательно всегда радиус.

$RH = 1 \cdot \sin\alpha$, где α – угол наклона цилиндра





$h = R \sin\alpha$.

Значит, $DC = \underbrace{\sqrt{48 - \sin^2\alpha}}_{DR} + \underbrace{\sqrt{63 - \sin^2\alpha}}_{RC} - f(\alpha)$

где $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$f(\alpha)$ – монотонная функция. Значит. $DC \in \left(f(0), f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{47} + \sqrt{62}$ $f(0) = \sqrt{48} + \sqrt{63}$. Значит $DC \in \left(\sqrt{48}+\sqrt{63}; \sqrt{47}+\sqrt{62}\right]$

[Ответ: $DC \in \left(\sqrt{48}+\sqrt{63}; \sqrt{47}+\sqrt{62}\right]$]

21100154 (U353845 M1305074)

Чистовик

Задача 1

Пусть a – первый член прогрессии, тогда d – шаг прогрессии.
a, d – целые числа, d – натуральное.
Т.к. прогрессия возрастает и состоит из целых чисел.

1) $S = \dfrac{a + a + 4d}{2} \cdot 5 = (a+2d) \cdot 5.$

$a_6 \cdot a_{11} = (a+5d)(a+10d)$

$a_8 \cdot a_9 = (a+7d)(a+8d)$

2) По условию:

$$\begin{cases} (a+5d)(a+10d) > (a+2d)\cdot 5 + 15 & \Big| \cdot(-1) \\ (a+7d)(a+8d) < (a+2d)\cdot 5 + 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a^2 - 15ad - 50d^2 < -5a - 10d - 15 \\ a^2 + 15ad + 56d^2 < 5a + 10d + 39 & \Big| + \end{cases}$$

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4$

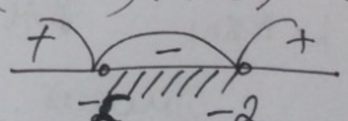
$\begin{cases} -2 < d < 2 \\ d > 0 \\ d \in N \end{cases}$ значит $\underline{d = 1}$.

3) $\begin{cases} (a+5)(a+10) > (a+2)\cdot 5 + 15 \\ (a+7)(a+8) < (a+2)\cdot 5 + 39 \end{cases}$

$a^2 + 50 + 15a > 5a + 25$ $\qquad$ $a^2 + 15a + 56 < 5a + 49$

$(a+5)^2 > 0 \rightarrow a \neq -5.$ $\qquad$ $a^2 + 10a + 7 < 0$

$(a+2)(a+5) < 0$



$\begin{cases} a \in R \\ a \neq -5 \\ a \in (-5; -2) \\ a \in Z \end{cases} \rightarrow a = \{-4; -3\}.$

[Ответ: $-4; -3.$]

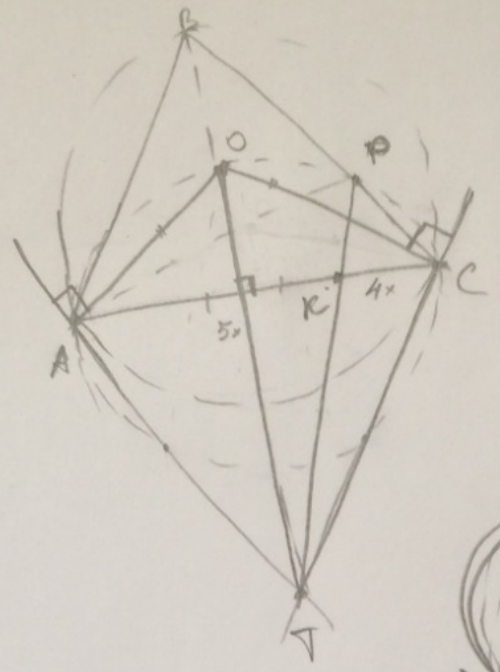
Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100154**

ID профиля: **353845**

Вариант 20

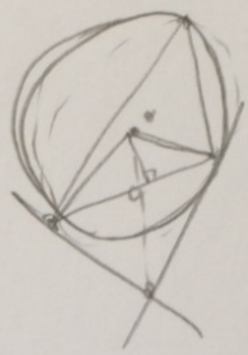


$S_{APK} = 10$

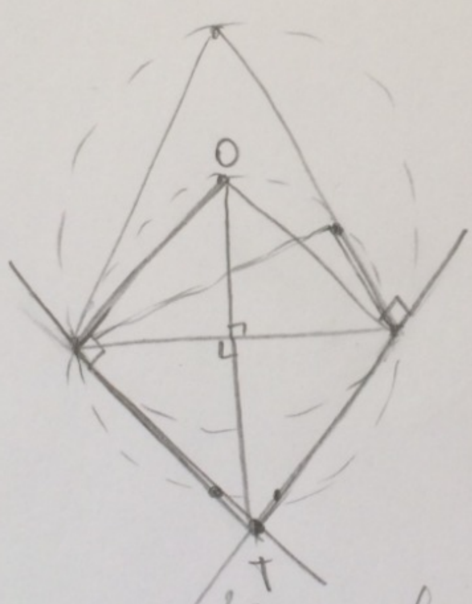
$S_{CPK} = 8$

1) S_{ABC} - ?

$\frac{AK}{KC} = \frac{5}{4}$



уч
2



$2\log_b 4a^2b = \log_{2a} a^2$

$\frac{2+\log_{2a} b}{\log_{2a} b} = 2\log_{2a} a$

$2+\log_{2a} b = 2\log_{2a} a \log_{2a} b$

$\log_{2a} b(1+2\log_{2a} a) = -2$

I $2\log_{2a} a = \frac{1}{2}\log_a b$ Шетовик

$4\log_{2x-8} x-4 = \log_{x-4} 5x-26$ $x=6$ подходит

$2\log_{2x-8}(x-4)+1 = 2\log_{5x-26} 2x-8$ $x=6$:

$2\log_{12-8}(6-4) + 1 = 2\log_{30-26} 12-8$

$2\log_4 2 + 1 = 2\log_4 4$

$2=2$

$x = 6$ подходит

II $2\log_{2x-8} x-4 + 1 = \frac{1}{2}\log_{5x-26} 5x-26$

Если $x=6$ оба графика

нет решений

III $\frac{1}{2}\log_{x-4} 5x-26 + 1 = 2\log_{2x-8} x-4$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26)(x-4)^2 = \log_{2x-8}(x-4)^2$ $\log_{2x-8}(x-4)^2 >$ при $x > 5$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26)(x-4)^2 \cdot \log_{(x-4)^2}(2x-8) = 1$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26)^{\log_{(x-4)^2}(2x-8)}(2x-8) = 1$ $\log_{(x-4)^2}(2x-8)$

$(x-4)^2 = 2(x-4)(5x-26)$

$x-4 = 2(5x-26)^{\frac{1}{2}(\log_{x-4} 2 + 1)}$

Ответ: $x=6$

Чистовик

№5

1) $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$ $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

Область допустимых значений:

$x-4>0$ $5x-26>0$

$2x-8>0$ $5x-26\neq 1$

$2x-8\neq 1$

$x>4$

$x\neq 5$

$x>5+\frac{1}{5}$

$x\neq \frac{27}{5}$

$x\neq 5$

$x-4=a$

$2x-8=2a$

$5x-26=b$

$$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 2\log_{2x-8}(x-4) = 2\log_{2a}a.$$

$$\log_{(x-4)^2}(5x-26) = \frac{1}{2}\log_{x-4}5x-26 = \frac{1}{2}\log_a b$$

$$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = 2\log_{5x-26}2x-8 = 2\log_b 2a.$$

2) I $\begin{cases} 2\log_{2a}a = \frac{1}{2}\log_a b \\ 2\log_{2a}a+1 = \frac{1}{2}\log_a b+1 = 2\log_b 2a \end{cases}$

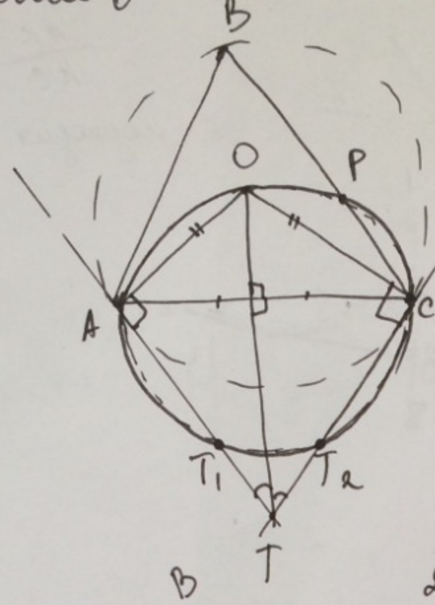
II $\begin{cases} 2\log_{2a}a = 2\log_b 2a \\ 2\log_{2a}a+1 = 2\log_b 2a+1 = \frac{1}{2}\log_a b \end{cases}$

III $\begin{cases} \frac{1}{2}\log_a b = 2\log_b 2a \\ \frac{1}{2}\log_a b+1 = 2\log_b 2a+1 = 2\log_{2a}a \end{cases}$

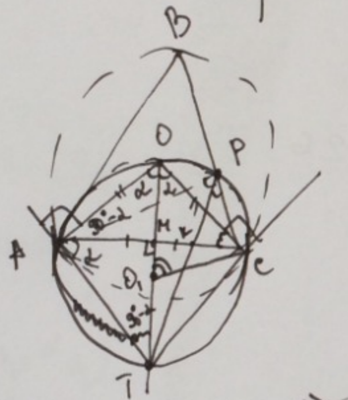
21100154 (U353845 M1305075)

Чистовик

Задание 6



1) Рассмотрим углы $\angle OAT_1$ и $\angle OCT_2$. они вписанные, прямые, значит OT_1 и OT_2 – диаметры. но диаметры т. O лежат на прямой OT. Значит OT – диаметр и T лежит на окружности прох. к/з точки A, O, C.



2) $\underline{\dfrac{S_{APK}}{S_{KPC}} = \dfrac{5}{4} = \dfrac{AK}{KC}}$ (общая высота) $AK = 5x$ $KC = 4x$

$PK \cdot KT = 5 \cdot x \cdot 4 \cdot x = 20x^2$

$\angle TPC = \angle APT = \alpha$ т. к. опираются на дугу 2α $\frac{\beta}{2}$

$\underline{PT\text{ – биссектриса}}$

$\dfrac{AP}{PC} = \dfrac{5y}{4y}$

(4) $\dfrac{OM}{AM} = ctg\alpha$

3) $S_{KPC} = \sin\alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot PK \cdot 4y = 8 = \frac{1}{2} h \cdot 4x$

$S_{APK} = \sin\alpha \cdot \frac{1}{2} PK \cdot 5y = 10 = \frac{1}{2} h\, 5x$

$\sin\alpha \cdot PK \cdot y = hx$

4) O_1 – центр второй окр-сти

$O_1C = R$ второй окр. $OO_1 = \frac{1}{2} OT$.

$90^\circ - \alpha = 30^\circ$ $\alpha = 60^\circ$.

$\underline{O_1 \text{ на окр. } \omega.}$

$\underline{~~MC~~ = AC = R}$

5) $~~R~~ = \dfrac{R}{2\sin 60^\circ}$

$TC^2 = R \cdot 2R$

$TC^2 = 2R^2$

$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2R\right)^2 = 2R^2$

Чистовик

№8

1) $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$ $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

Область допустимых значений:

$x-4>0$ $5x-26>0$

$2x-8>0$ $5x-26\neq 1$

$2x-8\neq 1$

$x>4$ $x>5+\frac{1}{5}$

$x\neq 5$ $x\neq\frac{27}{5}$

$x\neq 5$

$x-4=a$

$2x-8=2a$

$5x-26=b$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 2\log_{2x-8}(x-4) = 2\log_{2a}a.$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26) = \frac{1}{2}\log_{x-4}5x-26 = \frac{1}{2}\log_a b$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = 2\log_{5x-26}2x-8 = 2\log_b 2a.$

2) I $\begin{cases} 2\log_{2a}a = \frac{1}{2}\log_a b \\ 2\log_{2a}a+1 = \frac{1}{2}\log_a b+1 = 2\log_b 2a \end{cases}$

II $\begin{cases} 2\log_{2a}a = 2\log_b 2a \\ 2\log_{2a}a+1 = 2\log_b 2a+1 = \frac{1}{2}\log_a b \end{cases}$

III $\begin{cases} \frac{1}{2}\log_a b = 2\log_b 2a \\ \frac{1}{2}\log_a b+1 = 2\log_b 2a+1 = 2\log_{2a}a \end{cases}$

Чистовик

№4

1) $\begin{cases} НОК(a;b;c) = 2^{17} \cdot 5^{16} \\ НОД(a;b;c) = 10 \end{cases}$

$НОК(a;b;c) \cdot НОД(a;b;c) = a \cdot b \cdot c.$

$a \cdot b \cdot c = 2^{18} \cdot 5^{17}.$

$a = 2^{1+\alpha_1} \cdot 5^{1+\beta_1}; \quad b = 2^{1+\alpha_2} \cdot 5^{1+\beta_2}; \quad c = 2^{1+\alpha_3} \cdot 5^{1+\beta_3}$

т.к. НОД = 10.

$abc = 2^{3+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \cdot 5^{3+\beta_1+\beta_2+\beta_3} = 2^{18} \cdot 5^{17}$

$2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \cdot 5^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} = 2^{15} \cdot 5^{14}$

$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 15 \\ \beta_1+\beta_2+\beta_3 = 14 \end{cases}$ т.к. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ целые числа и $f(x) = a^x$ - монотонна.

2) Кол-во вариантов выбрать тройку чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ - это сумма арифм. прогрессии $\frac{1+16}{2} \cdot 16 = 17 \cdot 8 = 136$

$(\beta_1; \beta_2, \beta_3)$ — $\frac{1+15}{2} \cdot 15 = 8 \cdot 15 = 120$

3) $120 \cdot 136 = 16320$

$$\begin{array}{r} 136 \\ \times\ 120 \\ \hline 272\ \\ 136\ \ \\ \hline 16320 \end{array}$$

Ответ: 16320