Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100145**

ID профиля: **335065**

Вариант 20

№1

Математика 11 класс
Вариант 20
Чистовик 1

1) $a_1 \in \mathbb{Z}$ (в прогрессии целые числа)

$a_2 = a_1 + d$

$d > 0$ (прогрессия возрастающая)

$d \in \mathbb{N}$ (в прогрессии целые числа)

$a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5a_1 + 10d$

2) Известно, что

$$\begin{cases} a_6 a_{11} > S + 15 \\ a_8 a_9 < S + 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1 + 5d)(a_1 + 10d) > S + 15 \\ (a_1 + 7d)(a_1 + 8d) < S + 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15da_1 + 50d^2 > S + 15 \\ a_1^2 + 15da_1 + 56d^2 < S + 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15da_1 + 50d^2 - S > 15 \\ a_1^2 + 15da_1 + 50d^2 - S < 39 - 6d^2 \end{cases}$$

$15 < 39 - 6d^2$

$d^2 < 4$

$$\begin{cases} d \in (-2; 2) \\ d \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$d = 1$

Математика 11класс
Вариант 20
Чистовик 2

3) $\begin{cases} a_1^2+15a_1+50>15+5a_1+10 \\ a_1^2+15a_1+56<39+5a_1+10 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2+10a_1+25>0 \\ a_1^2+10a_1+7<0 \end{cases}$

$\begin{cases} (a_1+5)^2>0 \Rightarrow a_1\neq -5 \\ a_1^2+10a_1+7<0 \Rightarrow a_к=\frac{-10\pm\sqrt{100-28}}{2}=\frac{-10\pm 6\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$a_1\neq 5$

$a_1\in\left(-\frac{10+6\sqrt{2}}{2};\frac{-10+6\sqrt{2}}{2}\right)$

Оценим эти числа:

$\sqrt{2}\approx 1,41$

$6\sqrt{2}\approx 8,46$

$-\frac{10+6\sqrt{2}}{2}\approx-\frac{18,46}{2}=-9,23$

$\frac{-10+6\sqrt{2}}{2}\approx-\frac{1,54}{2}=-0,77$

Т.к. $a\in Z$, то

$\begin{cases} a_1\in[-9;1] \\ a_1\neq 5 \end{cases}$

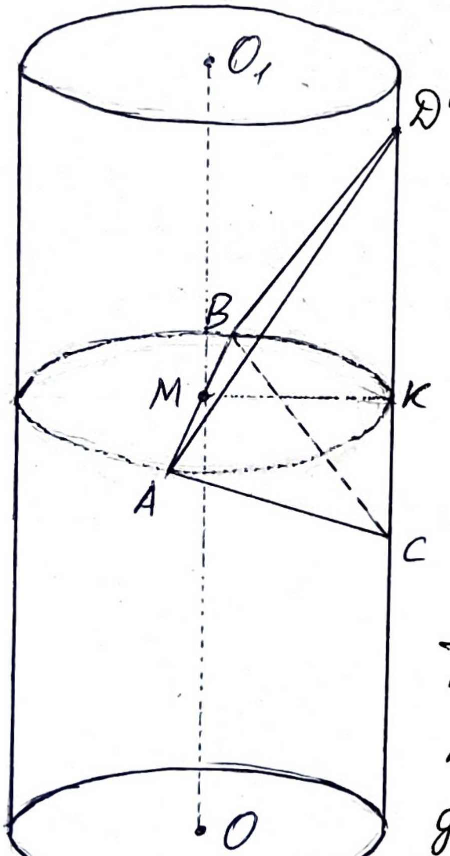
$\boxed{a_1\in\{-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1\}}$

№2

Математика 11 класс.
Вариант 20
Чистовик 3

Т.к. $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ - равнобедренные с общим основанием AB, то тетраэдр $ABCD$ симметричен сам себе относительно плоскости CDM, где M - середина AB.

Это означает, что точки A и B будут лежать на одной окружности, принадлежащей цилиндру и параллельной его основанию, т.е. $AB \perp CD$.



Заметим также, что наименьший радиус цилиндра будет тогда, когда AB будет диаметром, т.е. $R = \frac{AB}{2} = 1$

Тогда $M \in OO_1$ - оси цилиндра

$MD = \sqrt{AD^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{64-1} = 3\sqrt{7}$

$MC = \sqrt{AC^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{49-1} = 4\sqrt{3}$

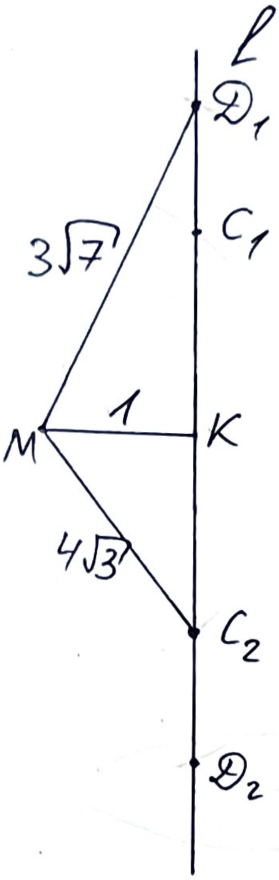
Теперь, наконец, можно определить положение точек C и D, при котором достигается наименьший радиус.

Пусть $MK \perp CD$; $K \in CD$. Тогда $MK = 1$

Рассмотрим плоскость $CKDM$. В ней:

$MK = 1$; $MD = 3\sqrt{7}$; $MC = 4\sqrt{3}$; $C; K; D \in \ell$

Математика 11 класс
Вариант 20
чистовик 4



$$KD=\sqrt{MD^2-MK^2}=\sqrt{63-1}=\sqrt{62}$$

$$KC=\sqrt{MC^2-MK^2}=\sqrt{48-1}=\sqrt{47}$$

$$\left[\begin{array}{l} CD=KD-KC \\ CD=KD+KC \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} CD=\sqrt{62}-\sqrt{47} \\ CD=\sqrt{62}+\sqrt{47} \end{array}\right.$$

$\boxed{\text{Ответ: } CD\in\{\sqrt{62}-\sqrt{47};\ \sqrt{62}+\sqrt{47}\}}$

№3

Матем 11кл
Чистовик 5
Вар 20

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b;\ 13)\end{cases}$$

1. Найти ограничения на a и b

$a^2+b^2\ge 0$

$-4a-6b\ge 0$ Иначе $a;b\in\varnothing$

$\boxed{b\le -\frac{2}{3}a}$

$y_в$ $x_в$

1) $-4a-6b\le 13$ $\Rightarrow a^2+b^2\le -4a-6b$

$b\ge -\frac{13}{6}-\frac{2}{3}a$

$(a^2+4a+4)+(b^2+6b+9)\le 13$

$(\underset{x}{a}+2)^2+(\underset{y}{b}+3)^2\le 13$

$y_в$ $\frac{2}{3}x=-\frac{13}{6}$

$x=-\frac{13}{4}$

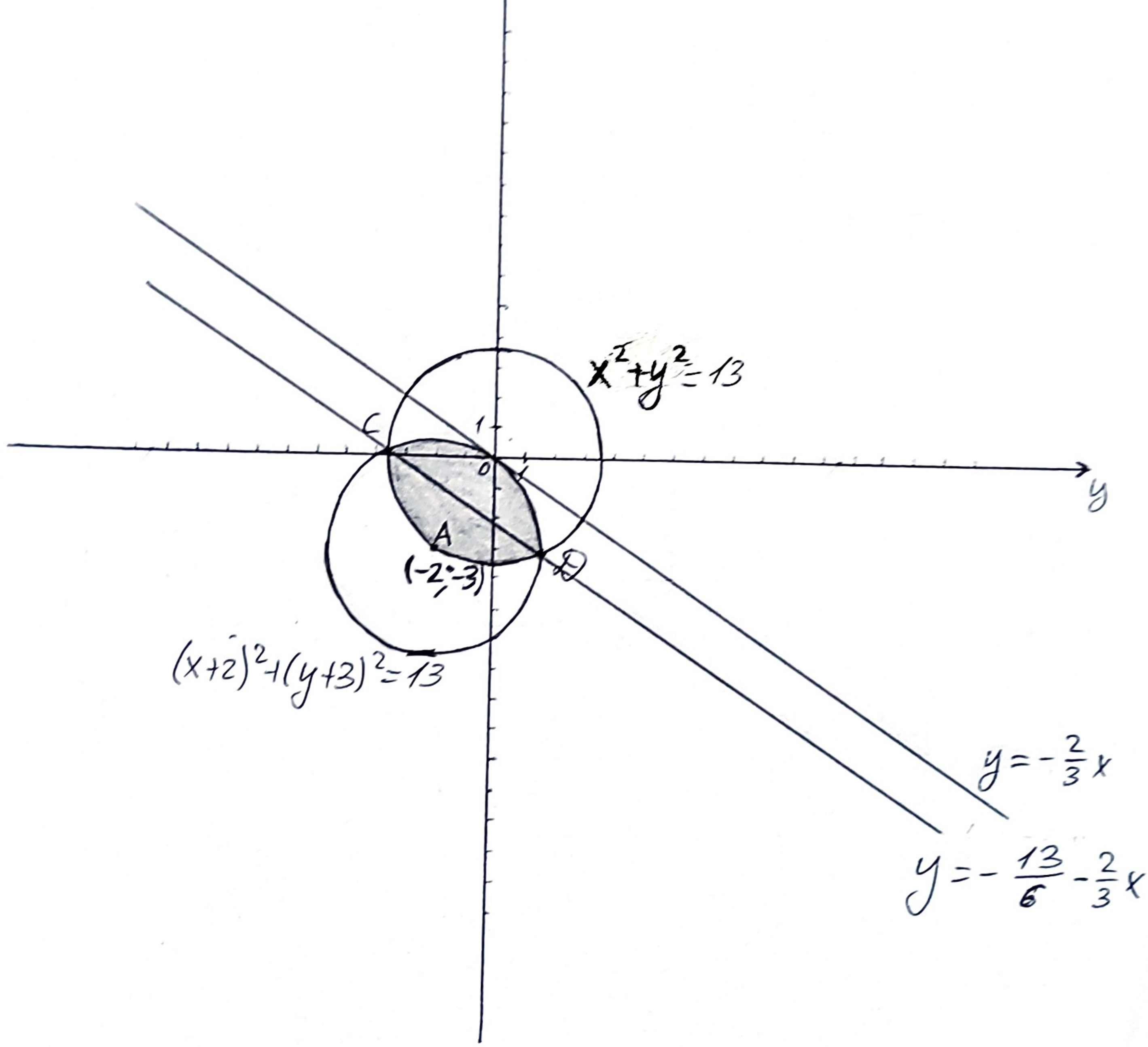
2) $-4a-6b>13$ $\Rightarrow a^2+b^2\le 13$

$b<-\frac{13}{6}-\frac{2}{3}a$

С помощью этих преобразований и графика мы нашли множество центров окружностей, заданных ф-лой: $(x-a)^2+(y-b)^2\le 13$

Матем 11 кл
Вар 20
Чистовик 6

Серым на графике отмечено множество возможных значений а и в



a_1
a_2
a_3
a_4
a_5 $\Bigg] \Sigma = S$ $S = a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + (a_1+3d) + (a_1+4d) =$
$= 5a_1 + 10d$

$a_2 = a_1 + d$; $d > 0$
$a_1 \in Z$; $d \in Z$

Черновик

1) $\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+10d) > S+15 \\ (a_1+7d)(a_1+8d) < S+39 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15 \\ a_1^2 + 15a_1d + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39 \end{cases}$

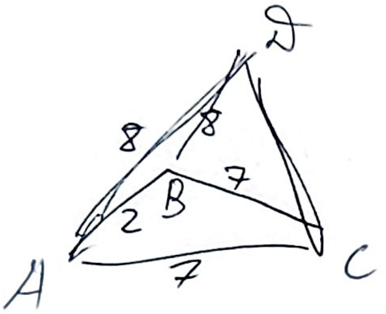
$a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15$
$a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 < 5a_1 + 10d - 6d^2 + 39$

$\cancel{5a_1} + \cancel{10d} - 6d^2 + 39 > \cancel{5a_1} + \cancel{10d} + 15$
$6d^2 < 24$
$d^2 < 4$ $(d > 0; d \in Z) \Rightarrow$
$\Rightarrow d =$

2) $d = 1$
$a_1^2 + 15a_1 + 50 > 5a_1 + 10 + 15$
$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$
$(a_1+5)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -5$
$a_1^2 + 15a_1 + 56 < 5a_1 + 10 + 39$
$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$
$a_1 \in \left(\frac{-10-6\sqrt{2}}{2}; \frac{-10+6\sqrt{2}}{2}\right)$

$\begin{array}{r} 46 \\ -\ 39 \\ \hline 7 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 72 & 4 \\ 18 & 9 \\ 2 & \end{array}$

$a_1 = \frac{-10 \pm \sqrt{100-28}}{2} = \frac{-10 \pm 6\sqrt{2}}{2}$

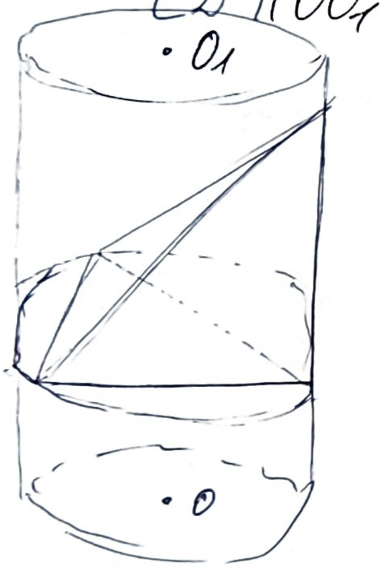


№2

Черновик

62/92 #34

$CD \parallel OO_1$



Пусть CM — медиана $\triangle ABC$.
Тогда тетраэдр $ABCD$ симметричен сам себе относительно пл-сти CDM

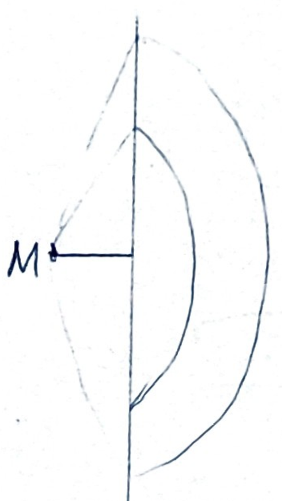
~~Это~~ означает, что точки A и B будут лежать на одной окружности, параллельной основанию цилиндра, т.е. $AB \perp CD$

$CM = \sqrt{7^2-1^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$DM = \sqrt{8^2-1^2} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$

Заметим также, что наименьший радиус цилиндра достигается, когда AB — диаметр одной из окружностей цилиндра, т.е. $R=1$

Рассмотрим пл-сть CDM. В ней $M \in OO_1$, расстояние от M до прямой CD равно 1



$\sqrt{2} \approx 1{,}41$

$$\begin{array}{r} \times\ 1{,}41 \\ 6 \\ \hline 8{,}46 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\ 2{,}00 \\ 0{,}46 \\ \hline 1{,}54 \end{array}$$

Черновик

$$\begin{array}{r|l} -\,1{,}54 & 2 \\ \cline{2-2} 14 & 0{,}77 \\ \hline 14 & \end{array}$$

$-\dfrac{18{,}46}{2} = -9{,}23$

$8{,}46 - 10 = -1{,}54$

$\dfrac{-10-6\sqrt{2}}{2} \approx -9{,}23$

$\dfrac{-10+6\sqrt{2}}{2} \approx -0{,}77$

$a_1 \in \mathbb{Z}$

$a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

$$\begin{cases} a^2+b^2=13 \\ (a+2)^2+(b+3)^2=13 \end{cases}$$

Найдем координаты точек С и D

Матем 11кл
Вар 20
~~Чистовик~~ 7

$a^2+4a+4+b^2+6b+9=13$

$a^2+4a+b^2+6b=0$

$a=\frac{-4\pm\sqrt{16-4b^2-24b}}{2}=-2\pm\sqrt{-b^2-6b+4}$

Черновик

$-2\pm\sqrt{-b^2-6b+4}=\sqrt{13-b^2}$

$\cancel{-b^2}-6b+\cancel{4}=\cancel{4}+4\sqrt{13-b^2}+13\cancel{-b^2}$

$4\sqrt{13-b^2}=-6b-13$

$16(13-b^2)=36b^2+156b+169$

$-16b^2+208=36b^2+156b+169$

$52b^2+156b-39=0$

$4b^2+12b-3=0$

$b=\frac{-12\pm\sqrt{144+48}}{8}=\frac{-12\pm8\sqrt{3}}{8}=$

$=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{3}$

$a=\sqrt{13-b^2}=\sqrt{13-(-\frac{3}{2}\pm\sqrt{3})}=\sqrt{13-\frac{9}{4}\pm3\sqrt{3}-3}=$

$=\sqrt{\frac{31}{4}\pm3\sqrt{3}}$

$12\cdot13$: 36, 12, 156

$16\cdot13$: 48, 16, 208

$208-169=39$

$52:13=4$

$144+48=192$

$192 = 4\cdot16\cdot3$ (48)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

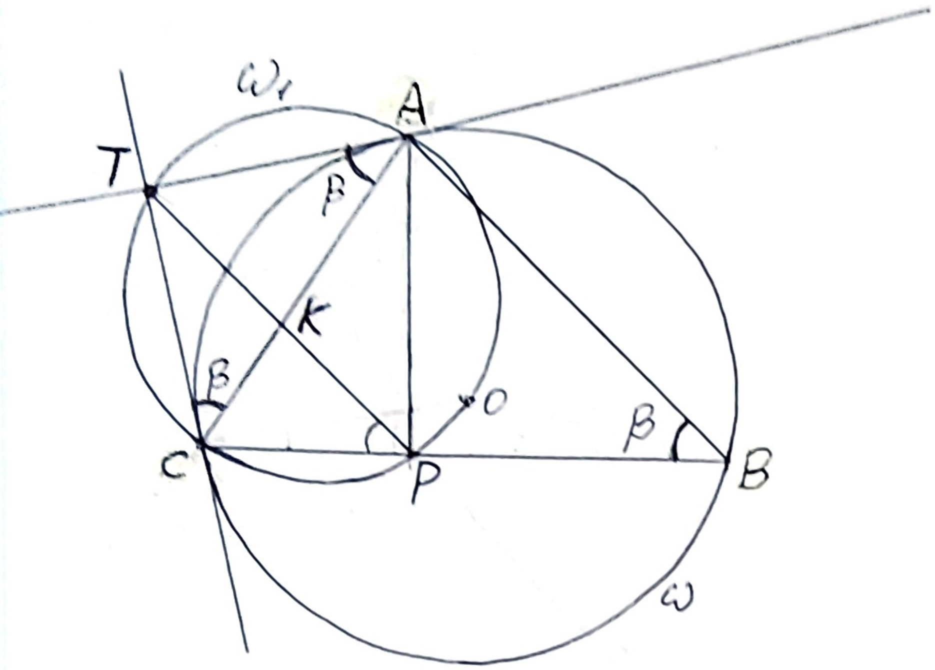
Шифр: **21100145**

ID профиля: **335065**

Вариант 20

№ 4

Матем 11кл
Вар 20
Чистовик 1



$S_{APK}=10$

$S_{CPK}=8$

1) $S_{ABC}=?$

$\angle ABC=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$

$AC=?$

1) $\frac{CK}{AK}=\frac{S_{CPK}}{S_{APK}}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

2) $\angle OAT=90^{\circ}=\angle OCT$

$\angle OAT+\angle OCT=180^{\circ}\Rightarrow O;A;C;T$ лежат на одной окружности. Но $A;O;C$ уже лежат на ω_1. Значит $T\in\omega_1$. При этом TO-диаметр ω_1, т.к. $\angle OAT=90^{\circ}$

3) $\triangle AOC$-р/б с основанием AC; т.к. $O\in$ сер. пер. к AC
Значит $AO=CO$; $\angle OAC=\angle ACO$

4) В ω: $\angle TAC=\angle ACT=\angle ABC$

В ω_1 $\angle TAC=TPC$ т.к. опираются на дугу CT

5) $\angle TPC=\angle ABC\Rightarrow TP\parallel AB\Rightarrow\frac{CP}{BC}=\frac{CK}{AC}=\frac{4}{9}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{APC}}=\frac{BC}{CP}\Rightarrow S_{ABC}=S_{APC}\cdot\frac{BC}{CP}=\frac{9}{4}\cdot(10+8)=\boxed{\frac{81}{2}}$

Матем 11кл

Вар 20

Чистовик 2

6) $\frac{S_{APK}}{S_{ATK}}=\frac{PK}{TK}=\frac{AK}{KC}=\frac{5}{4}$

$S_{ATK}=\frac{4}{5}S_{APK}=8$

$S_{CTK}=S_{ATK}\cdot\frac{CK}{AK}=8\cdot\frac{4}{5}=\frac{32}{5}$

$S_{ACT}=S_{ATK}+S_{CTK}=8+\frac{32}{5}=\frac{72}{5}$

7) В ω_1:

$\frac{AC}{\sin(180°-2\beta)}=\frac{AT}{\sin\beta}\Rightarrow AT=\frac{AC\cdot\sin\beta}{\sin 2\beta}$

$S_{ACT}=\frac{1}{2}\cdot AT\cdot AC\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot\frac{AC\sin\beta}{\sin 2\beta}\cdot\sin\beta=$

$=\frac{AC^2\cdot\sin\beta}{4\cos\beta}=\frac{AC^2}{4}\cdot tg\beta=\frac{AC^2}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{AC^2}{8}=\frac{72}{5}$

$\boxed{AC=\frac{24}{\sqrt{5}}}$

Ответ: $S_{ABC}=\frac{81}{2}$

$AC=\frac{24}{\sqrt{5}}$

$a; b; c \in N$ №1

Математика 11кл
Вариант 20
Чистовик 3

НОД $= 10 = 2\cdot 5$
НОК $= 2^{17}\cdot 5^{16}$

$abc =$ НОК · НОД $= 2^{18}\cdot 5^{17} \Rightarrow a; b; c$ делятся только на 2 и на 5.

Среди a, b, c обязано быть число, имеющее степень 2^1; 5^1 (это могут быть разные числа) и степень 2^{17}; 5^{16} (это могут быть разные числа). Каждое число должно делиться и на 5 и на 2; степень 2 не превышает 17, степень 5 не превышает 16.

2	5	2^{17}	5^{16}

1-е: $2\cdot 5$
2-е: существует $17\cdot 16 = 272$ вар-та
3-е: $2^{17}\cdot 5^{16}$
| 2 повторяющиеся ситуации (2 числа равны)

1-е: 2 существует 16 вар-тов
2-е: 5 существует 17 вар-тов
3-е: $2^{17}\cdot 5^{16}$
} $\exists$ 272 вар-та | 1 повторяющаяся ситуация (2 числа равны)

1-е: $2\cdot 5$
2-е: 2^{17} существует 16 вар-тов
3-е: 5^{16} существует 17 вар-тов
} $\exists$ 272 вар-та | 1 повторяющаяся ситуация

Также учтем перестановки a, b, c:

$(272\cdot 3 - \underbrace{4}_{\text{отвечает за повторяющиеся числа}})\cdot 3! = 4872$ вар-та

Ответ: 4872 тройки чисел

4 =

$$\frac{S_{AKT}}{S_{APK}} = \frac{TK}{KP} = \frac{4}{5}$$

$\frac{1}{2}$ lo

$$S_{AKT} = \frac{4}{5} S_{APK} = 8$$

$\boxed{S_{\Delta PCT}}$

$$\frac{CP}{BP} = ?$$

lo

$$\frac{S_{CTK}}{S_{ATK}} = \frac{CK}{AK} = \frac{4}{5}$$

(x

$$\frac{CP}{BP} = QP$$

$$S_{CTK} = \frac{4}{5} S_{ATK} = 8 \cdot \frac{4}{5} = \frac{32}{5}$$

1

$$S_{AOCT} = R \cdot AT$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R}$$

$$\frac{S_{ACT}}{S_{ABC}} = \frac{AT \cdot AC}{AB \cdot BC}$$

$$S_{AOC} = S_{ACP} - \frac{1}{2} CP \cdot CO + \frac{1}{2} AP \cdot AO =$$

$$= \cancel{2 S_{ACP}} + \frac{1}{2} AC(AP - CP)$$

$\boxed{\text{Черновик}}$

$$\frac{AC}{\sin(180-2\beta)} = \frac{AT}{\sin\beta}$$

$$S_{ACT} = \frac{1}{2}\cdot AT\cdot AC\cdot \sin\beta$$

$$AC\cdot OT = S_{AOCT}$$

$$AC\cdot 2r = S_{AOCT}$$

$$2r = \frac{AC}{\sin(180-2\beta)}$$

Черновик

$$\frac{AC}{\sin 2\beta} = \frac{AT}{\sin\beta}$$

$$AT = \frac{AC\sin\beta}{\sin 2\beta}$$

$$S_{ACT} = \frac{1}{2}AT\cdot AC\sin\beta = \frac{1}{2}\cdot AC^2\cdot\frac{\sin^2\beta}{\sin 2\beta}$$

4.

$$72 \;\Big|\; \begin{matrix}36\\2\\8\end{matrix}$$

$36\cdot 16$

$$4=\log_{(x-4)}(5x-26)\log_{(x-4)}(2x-8)$$

$$\frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)=2\log_{5x-26}(2x-8)-1$$

$$\log_{(x-4)}(5x-26)=4\log_{(5x-26)}(2x-8)-2$$

$$(x-4)^4=(5x-26)^{\log_{(x-4)}(2x-8)}$$

$$1=\log_{(x-4)^2}(5x-26)\log_{(x-4)^2}(2x-8)\Rightarrow\cancel{\log_{(x-4)^2}(x-4)^2}$$

$$\log_{(x-4)^2}(5x-26)=\log_{(2x-8)}(x-4)^2$$

$$\cancel{5x-26=(x-4)^{4\log_{(2x-8)}(x-4)^2}}$$

$$4=\log_{(x-4)}(5x-26)\log_{(x-4)}(2(x-4))=$$ Черновик

$$=\log_{x-4}(5x-26)\left(\log_{(x-4)}2+1\right)=$$

$$=\log_{(x-4)}(5x-26)\log_{(x-4)}2+\log_{(x-4)}(5x-26)$$

$a; b; c \in \mathbb{N}$

НОД$(a;b;c) = 10 = 2 \cdot 5$

НОК$(a;b;c) = 2^{17} \cdot 5^{17}$

$a \cdot b \cdot c =$ НОД $\cdot$ НОК $= 2^{17} \cdot 5^{17} \Rightarrow a; b; c$ делятся только на 2 и на 5.

При этом среди a, b, c обязано быть число, содержащее только одну 2-ку и только одну 5-ку (это могут быть разные числа).

И должно быть число, равное $2^{17} \cdot 5^{16}$, а степени 2 и 5 в остальных не превышают

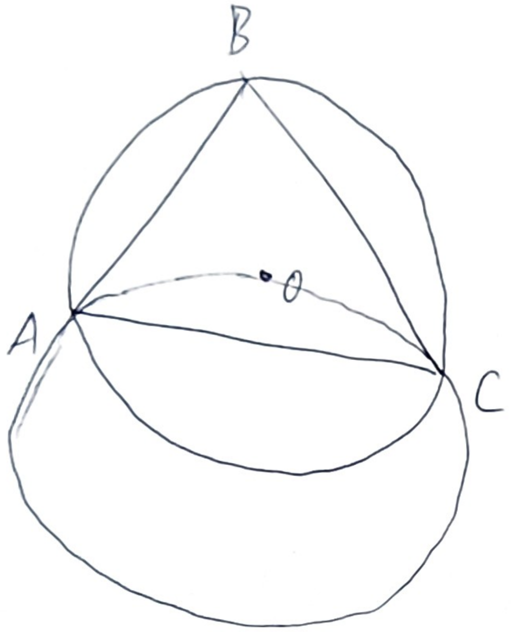
a	b	c
		$2^{17} \cdot 5^{16}$

$$272 \times 3 = 816$$

$$816 - 14 = 812$$

$$812 \times 6 = 4872$$

Черновик



Черновик

$\angle OAT = 90^\circ$

$\angle OCT = 90^\circ$

OACT лежат на одной окр.

но A; O; C уже лежат на ω_1

Значит $T \in \omega_1$

$S_{ABC} = (S_{AKP} + S_{CKP}) \cdot \frac{BC}{CP}$

$\frac{BC}{CP}$ $\frac{BP}{CP}$

$2^{17} \cdot 5^6$

$2^6 \cdot 5^6$

$2 \cdot 5$

$2^{17} \cdot 5^6$

$2^{18} \cdot 5$

$2 \cdot 5^{16}$

$17 \times 16 = 102$

$17 \dots 272$

$15 \times 13 = 45$

$15 \dots 195$

$2^{18} \cdot 5^{16}$

$272 \times 3 = 816$

$816 - 6 = 810$

$810 - 3 = 807$

$807 \times 6 = 4842$

№5

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) \\ \log_{(x-4)^2}(5x-26) \\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) \end{cases}$$

$2x-8>0 \Rightarrow x>4$ v

$x-4>0 \Rightarrow x>4$ v

$2x-8\neq 1 \Rightarrow x\neq 4{,}5$ v

$x\neq 4 \Rightarrow x\neq 4$ v

$(x-4)^2\neq 1 \Rightarrow x\neq \{5;3\}$ v

$5x-26>0 \Rightarrow x>5{,}2$ v

$5x-26\neq 1 \Rightarrow x\neq 5{,}4$ v

$x\in(5{,}2;5{,}4)\cup(5{,}4;+\infty)$

1) $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=\log_{(x-4)^2}(5x-26)=\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)-1$

$2\log_{2x-8}(x-4)=\frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)$

$$\frac{4\log_{2x-8}(x-4)}{\log_{(x-4)}(5x-26)}=1$$

$4=\log_{(x-4)}(5x-26)\log_{(x-4)}(2x-8)$

$\boxed{\text{Черновик}}$

$$AB \cdot BC = \frac{S_{ABC}}{S_{ACT}} \cdot AT \cdot AC$$

$$S_{ABC} = \frac{S_{ABC} \cdot AT \cdot AC^2}{4R \cdot S_{ACT}}$$

Черновик

$$4S_{ACT} \cdot \frac{S_{AOCT}}{AT} = AT \cdot AC^2$$

$$AT^2 \cdot AC^2 = 4S_{ACT} \cdot S_{AOCT} = x$$

$$TK \cdot TP \cdot AC^2 = x$$

$$\frac{AC}{\sin B} = 2R$$

~~2R~~ =

$$S_{ATCO} = \frac{1}{2} \cdot TO \cdot AC$$

$$TO = \frac{2S_{ATCO}}{AC}$$

$$\sin B = \frac{\frac{TO}{2}}{AT} = \frac{S_{ATCO}}{AT \cdot AC} = \frac{S_{ATCO}}{2\sqrt{S_{ACT} \cdot S_{AOCT}}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{S_{ACT} \cdot S_{AOCT}}}$$