Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100011**

ID профиля: **219113**

Вариант 20

чистовик 1

N 1

$S = \left(\frac{2a_1 + b\cdot 4}{2}\right)\cdot 5 = (a_1+2b)5 = 5a_1+10b$

$b>0,\ b\in Z$

$a_6 = a_1+5b$

$a_{11} = a_1+10b$

$a_8 = a_1+7b$

$a_9 = a_1+8b$

I $(a_1+5b)(a_1+10b) > 5a_1+10b+15$

$a_1^2+15a_1b+50b^2-5a_1-10b-15>0$

II $(a_1+7b)(a_1+8b) < S+39$

сумм "+"

$a_1^2+15a_1b+56b^2-5a_1-10b-39<0 \mid \cdot(-1)$

$-a_1^2-15a_1b-56b^2+5a_1+10b+39>0$

$-6b^2+24>0$

$(2-b)(2+b)>0$

$-2 \quad 2 \quad b$

$b\in(-2;2)$, $b\in N$ $\Rightarrow b=1$ только чистовик ③

чистовик ②

I $(a_1+5)(a_1+10)>5a_1+25$

$a_1^2+10a_1+25>0$

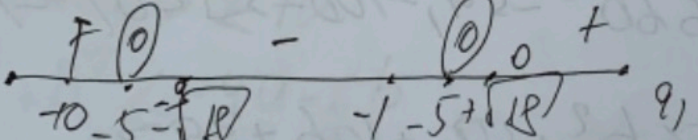
$(a_1+5)^2>0$ $\begin{cases}\forall a_1 \in R \\ a_1 \in Z\end{cases}$

II $(a_1+7)(a_1+8)<5a_1+10+39$

$a_1^2+10a_1+7<0$

$(a_1+5)^2<18$

$(a_1+5-\sqrt{18})(a_1+5+\sqrt{18})<0$



$-4<-\sqrt{18}<-5$

$-9<-\sqrt{18}-5<-10$

$4<\sqrt{18}<5$

$-1<\sqrt{18}-5<0$

Очевидно, $a_1 \in \{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1\}$

Ответ: a_1 – целые числа от −9 до −1 включительно.

21100011 (U219113 M1302096)

чистовик 3

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \quad (1)^* \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b;\ 13) \quad (2) \end{cases}$$

$(1)^*$ круг ~~окр~~ с ц. $(a;b)$ и $R=\sqrt{13}$

(2) I $-4a-6b \ge 13$

$$\begin{cases} 4a+6b \le -13 \\ a^2+b^2 \le 13 \end{cases}$$

$(a+2)^2-4+(b+3)^2-9 \le 0$

$(a+2)^2+(b+3)^2 \le (\sqrt{13})^2$

круг с ц. $a=-2, b=-3$ и $R=\sqrt{13}$

II
$$\begin{cases} -4a-6b \le 13 \\ a^2+b^2 \le -4a-6b \end{cases}$$

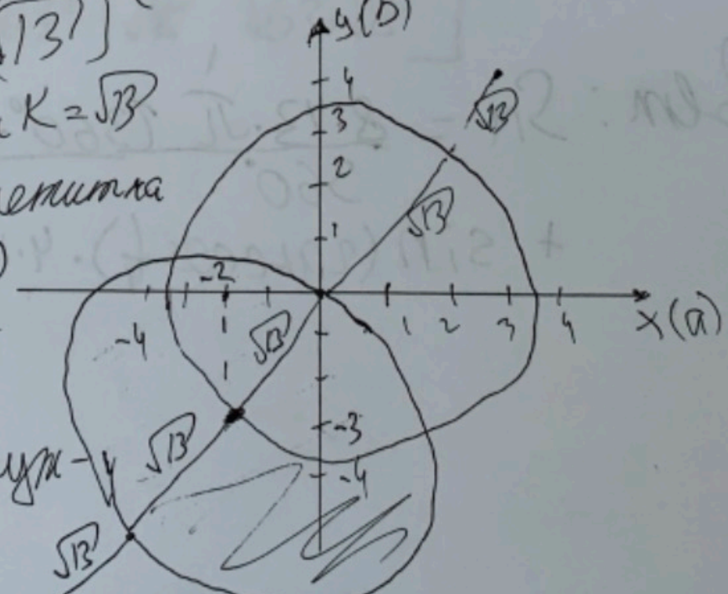
$a^2+b^2 \le (\sqrt{13})^2$

круг ~~окр~~ с. ц. $(0;0)$ и $R=\sqrt{13}$

круг ~~окр~~ с. ц. $-2;-3$ лежит на границе окр. с ц. $(0;0)$

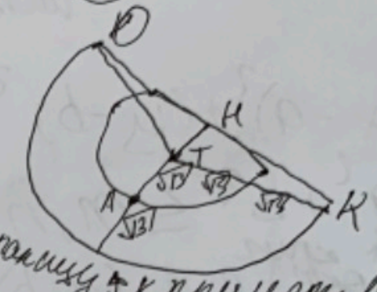
эти 2 круга ~~окружности~~ – все, что внутри,

Это центры окружностей $(1)^*$, где a и b – центры окружностей.



21100011 (U219113 M1302096)

получается так. чистовик (4)



max S - это когда ставим круга (1) на границу к примеру A

нужно найти эту S и умножить на 2, так как она симметрична второй половинке.

$\triangle TH = \frac{\sqrt{13}}{2}$

2) рассм $\triangle THK$, $TK = 2\sqrt{13}$

$TH = \frac{\sqrt{13}}{2}$

$\angle HTK = \arccos \frac{TH}{TK} = \arccos \frac{1}{4}$

$S_\triangle OKT = \frac{\sin(2\arccos\frac{1}{4}) \cdot 4 \cdot 13}{2}$

3) $S = \frac{(360° - 2\arccos\frac{1}{4}) \cdot \pi \cdot 4 \cdot 13}{360°} + \frac{\sin(2\arccos\frac{1}{4}) \cdot 4 \cdot 13}{2}$

$(2\sqrt{13})^2$

Ответ: $S_M = \frac{8 \cdot 13 \cdot \pi \, (360° - 2\arccos\frac{1}{4})}{360°} +$

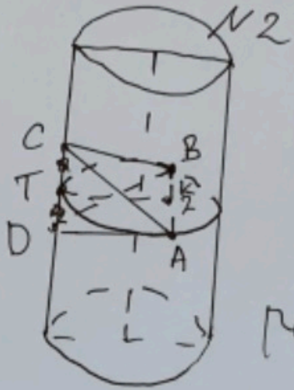
$+ \sin(2\arccos\frac{1}{4}) \cdot 4 \cdot 13$

21100011 (U219113 M1302096)

чистовик ⑤

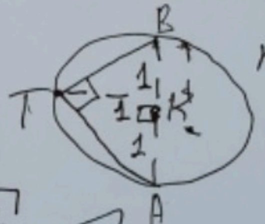
Дано:
$AB = 2$
$AC = CB = 7$
$AD = DB = 8$

$CD_{наим} = ?$



т. к. $r_ц$ - наим, то $AB \parallel$ основаниям, поэтому $CB = CA$ и $DB = DA$

рассм. сечение



$r_{наим} = 1$

$CK = \sqrt{\cancel{8^2} 7^2 - 1^2} = \sqrt{48}$

$DK = \sqrt{8^2 - 1^2} = \sqrt{63}$

в $\triangle$ CDK

$CD \geq \sqrt{63} - \sqrt{48}$

$CD \leq \sqrt{63} + \sqrt{48}$

Ответ: $CD \in [\sqrt{63} - \sqrt{48}; \sqrt{63} + \sqrt{48}]$

21100011 (U219113 M1302096)

черновик ⑥

21100011 (U219113 M1302096)

черновик ⑤

$-4a-6b < 13$

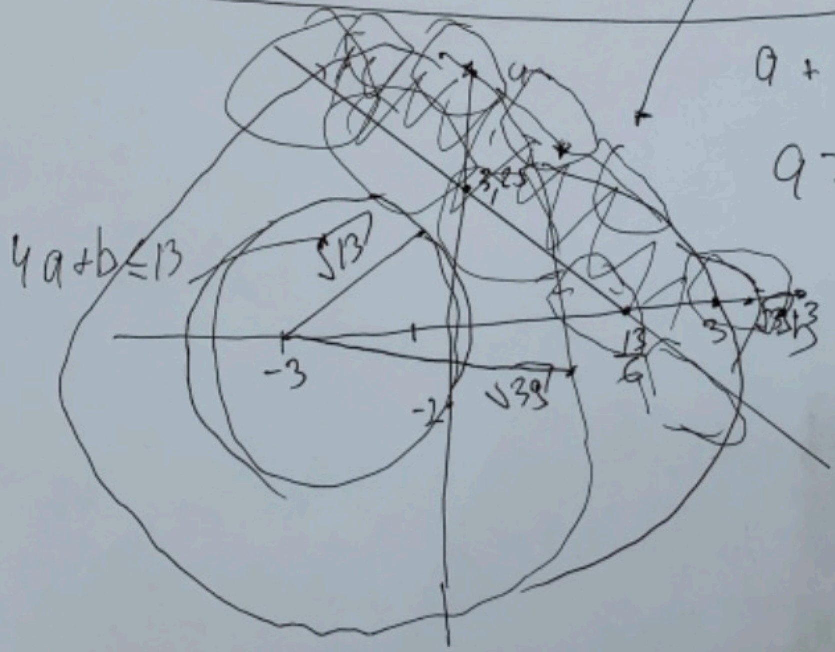
$\cancel{4a+6b > 13}$

$a^2+b^2 < -4a-6b$

$a^2+4a+b^2+6b<0$

$a^2+2\cdot 2a+4-4+b^2+2\cdot 3b+9-9<0$

$(a+2)^2+(b+3)^2<13 \qquad 4a+6b>13$



$a+\frac{3}{2}b > 3,25$

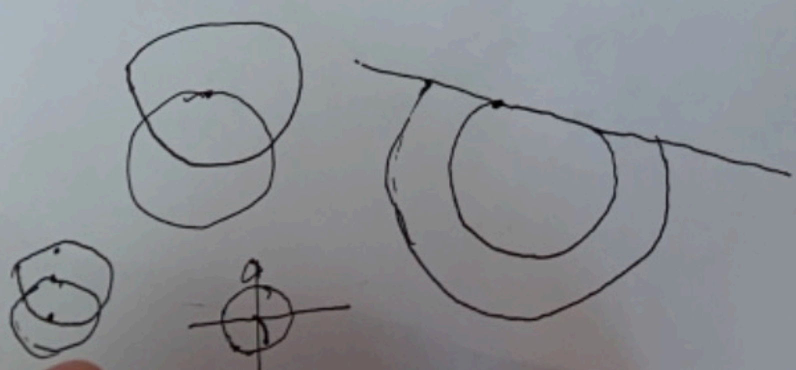
$a > -\frac{3}{2}b+3,25$

$a > -1,5b+3,25$

$-1,5b = -3,25$

$b=\frac{3,25}{1,5}=$

$=\frac{13}{6}$



черновик ②

$$S=\frac{(2a_1+b(n-1))5}{2}=\frac{(2a_1+4)5}{2}=5a_1+10^{?}$$

a_1+5b

I $(a_1+5b)(a_1+10b)>5a_1+10b+15$

$(a_1+5)(a_1+10)>5a_1+25$

$a_1^2+15a_1+50-5a_1-25>0$

$a_1^2+10a_1+25>0$

$(a_1+5)^2>0$

II $(a_1+7)(a_1+8)<5a_1+10+39$

$a_1^2+15a_1+56<5a_1+10+39$

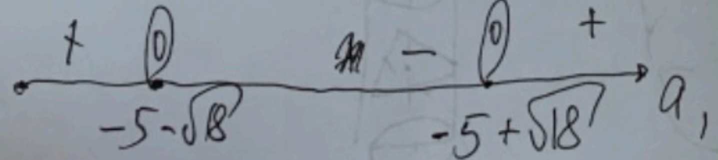
$a_1^2+10a_1+56-49<0$

$a_1^2+10a_1+7<0$

$a_1^2+2\cdot a_1\cdot 5+25-25+7<0$

$(a_1+5)^2<18$

$(a_1+5-\sqrt{18})(a_1+5+\sqrt{18})<0$



21100011 (U219113 M1302096)

Черновик ④

3) $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \ ^{(1)} \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b,\ 13) \end{cases}$

(1) окружность с ц. $(a;\ b)$ и $R=\sqrt{13}$

(3) $-4a-6b \geq 13$

$4a+6b \le 13$

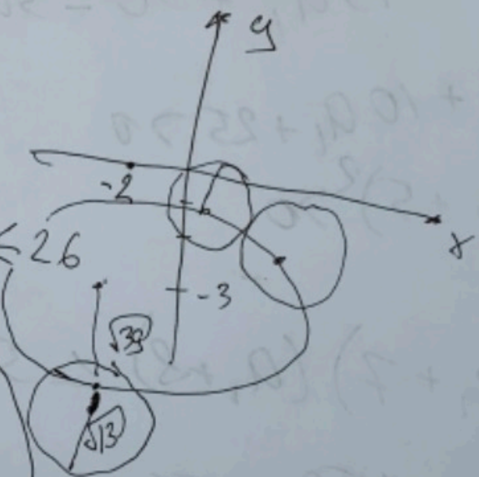
$a^2+b^2 \le 13$

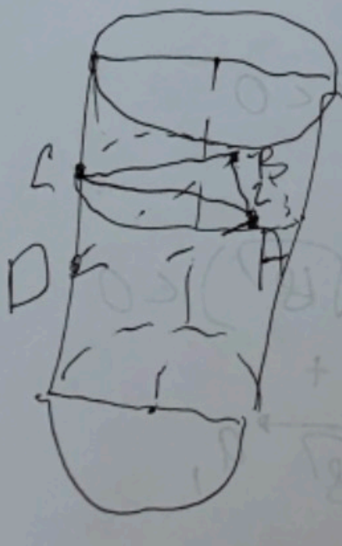
$a^2+4a+b^2+6b \le 26$

$(a+2)^2-4+(b+3)^2-9 \le 26$

$(a+2)^2+(b+3)^2 \le 39$

$4a+6b \le 13$





черновик (4)

черновик ①

3) {

$S = \left(\frac{2a_1 + b(n-1)}{2}\right) \cdot 5$, $b > 0$

$\left(\frac{2a_1 + 4b}{2}\right)5 = S = (a_1 + 2b)5 = 5a_1 + 10b$

$a_6 = a_1 + 5b$ $\quad a_8 = a_1 + 7b$

$a_{11} = a_1 + 10b$ $\quad a_9 = a_1 + 8b$

I $(a_1 + 5b)(a_1 + 10b) > 5a_1 + 10b + 15$

$a_1^2 + 15a_1b + 50b^2 - 5a_1 - 10b - 15 > 0$

II $(a_1 + 7b)(a_1 + 8b) < S + 39$

$a_1^2 + 15a_1b + 56b^2 - 5a_1 - 10b - 39 < 0$

сумм

$-a_1^2 - 15a_1b - 56b^2 + 5a_1 + 10b + 39 > 0$

$-6b^2 + 24 > 0$

$4 - b^2 > 0$

$(2 - b)(2 + b) > 0$

$-$ $\quad -2 \quad$ $+$ $\quad 2 \quad$ $-$ $\quad b$

$b \in \{-1; 0; 1\}$ $\quad b > 0$ $\quad \Rightarrow b = 1$

3) $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \quad (1) \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b,\ 13) \end{cases}$

черновик ③.

$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$

$-10 \quad -5-\sqrt{18} \quad -1 \quad -5+\sqrt{18} \quad a_1$

$-4 < -\sqrt{18} < -5$

$-9 < -\sqrt{18}-5 < -10$

$4 < \sqrt{18} < 5$

$-1 < \sqrt{18}-5 < 0$

$Z\ a_1 = \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100011**

ID профиля: **219113**

Вариант 20

чистовик (1)

№ 4

$$\begin{cases} НОД(a; b; c) = 10 \\ НОК(a; b; c) = 2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases} \Rightarrow a, b, c$$ при разложении на простые множители имеют в записи только „2" и „3"

т.к. $НОД(a; b; c) = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ мы можем представить числа как

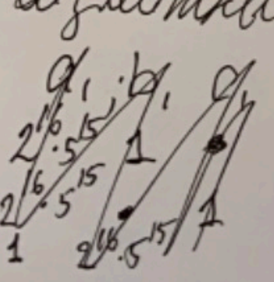
$$\left.\begin{aligned} a &= a_1\cdot 10 \\ b &= b_1\cdot 10 \\ c &= c_1\cdot 10 \end{aligned}\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $НОД(a_1; b_1; c_1) = 1$

$$НОК(a_1; b_1; c_1) = \frac{2^{17}\cdot 5^{16}}{10} = 2^{16}\cdot 5^{15}$$

~~Эт~~ Отсюда следует, что одно из чисел равно 1, а второе — $2^{16}\cdot 5^{15}$, третье имеет вид $2^m\cdot 5^n$, где m — ~~целые~~ целые числа от 0 до 16, n — от 0 до 15

возможны $3\cdot 2 = 6$ случаев, а именно $(2^{16}\cdot 5^{15} = const)$



чистовик (2)

a_1	b_1	c_1	
const	1	•	(1)
const	•	1	(2)
1	const	•	(3)
1	•	const	(4)
•	1	const	(5)
•	const	1	(6)

Заметим, что у нас есть повт-щиеся случаи
(1) и (2) (когда оба "•" = 1)
(3) и (4), • = const
(3) и (6), • = 1
(1) и (5), • = const
(2) и (6), • = const
~~(3) и (6)~~
(4) и (5), • = 1

⇒ 6 пов-торений − 3

Перебрали всевозможные комбинации, ~~подходят те, где одно из чисел в паре совпадо~~ где одно из чисел (const или 1) равно в строках, там могут быть повторения

Вместо ~~тех~~ • может стоять (m от 0 до 16 и n от 0 до 15)

17·16 чисел, в 6 строчках ⇒ 17·16·6 − 6 повторений = 6·(17·16 − 1) =

= 271·6 = 1626 случаев

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 16 \\ \hline 102 \\ +\ 17 \\ \hline 272 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 271 \\ \times\ 6 \\ \hline 1626 \end{array}$$

1626

Ответ: 1626 троек чисел возможно.

чистовик ③

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 2\log_{2(x-4)}(x-4)$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26) = \cancel{\tfrac{1}{2}(5x-26)}\ \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = 2\log_{(5x-26)}(2(x-4))$

~~x≥4~~ замена: $x-4=a$

$5x-26=b$

$2\log_{2a}(a)^{(1)} = y$

$\frac{1}{2}\log_a b = z$

$2\log_b(2a)^{(2)} = w$

$(1)\cdot(2) = 4\cdot\log_b a \Rightarrow \frac{1}{(1)\cdot(2)} = \frac{\log_a b}{4}$

$\frac{2}{yw} = z$

$y\neq 0,\ w\neq 0$

$ywz = 2$

в общем виде, если 2 числа „=“, а одно больше другого, то это

$d^2(d+1) = 2$

$d^3+d^2 = 2$ $\quad d=1$ – 1 решение, т.к.

$f(x) = d^3+d^2-2$

$f'(x) = 3d^2+2d = 0$ $\quad f'(x)$

$d(3d+2) = 0$

$f'(x)$: $+$ $\left(-\frac{2}{3}\right)$ $-$ (0) $+$ $\quad d$

$f(x)$: ↗ ↘ ↗

$f\left(-\frac{2}{3}\right) < 0 \Rightarrow$ одно пересечение $\Rightarrow$

21100011 (U219113 M1302097)

чистовик (4)

2 числа = 1, третье = 2 – 3 варианта

(1) $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 1$

$\sqrt{2x-8} = x-4 \qquad x-4 \geq 0$

$2x-8 = x^2 - 8x + 16$

$x^2 - 10x + 24 = 0$

$D = 100 - 96 = 2^2$

$x = \frac{10 \pm 2}{2} = \{4; 6\}$

(2) $\log_{(x-4)^2}(5x-26) = 1$

$(x-4)^2 = 5x - 26$

$x^2 - \cancel{16}8x + 16 = 5x - 26$

$x^2 - 13x + 42 = 0$

$D = 169 - 168 = 1^2$

$x = \frac{13 \pm 1}{2} = \{6; 7\}$

(3) $\log_{\sqrt{5x-26}} \cancel{4}(2x-8) = 2$

$\cancel{5x-26 = 4x^2 - 32x + 64}$

$\cancel{4x}$ $\quad 5x - 26 = 2x - 8 \qquad x \geq 4$

$3x = 26 - 8$

$3x = 18 \Rightarrow x = 6$

Подходит $x = 6$

чистовик ⑤

(4) $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=2$

$2x-8=x-4$

$x=4$ по огр. $5x-26>0$

$x=4$ - не подх. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{\sqrt{2x+8}}=1$ и только

~~(5) $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$~~

(5) $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=1$

$\sqrt{5x-26}=2x-8$ $\qquad 5x-26\geq 0$

$5x-26=4x^2-4\cdot 8x+64$

$4x^2-32x-5x+64+26=0$

$4x^2-37x+90=0$

$D=37^2-16\cdot 90<0$ $\qquad \Rightarrow x=\varnothing$

$$\begin{array}{r} 37 \\ \times\ 37 \\ \hline 259 \\ +\ 111 \\ \hline 1369 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16 \\ \times\ 90 \\ \hline 1440 \end{array}$$

~~(5) = 2~~

$\log_{\sqrt{5x-26}}=$ только 2.

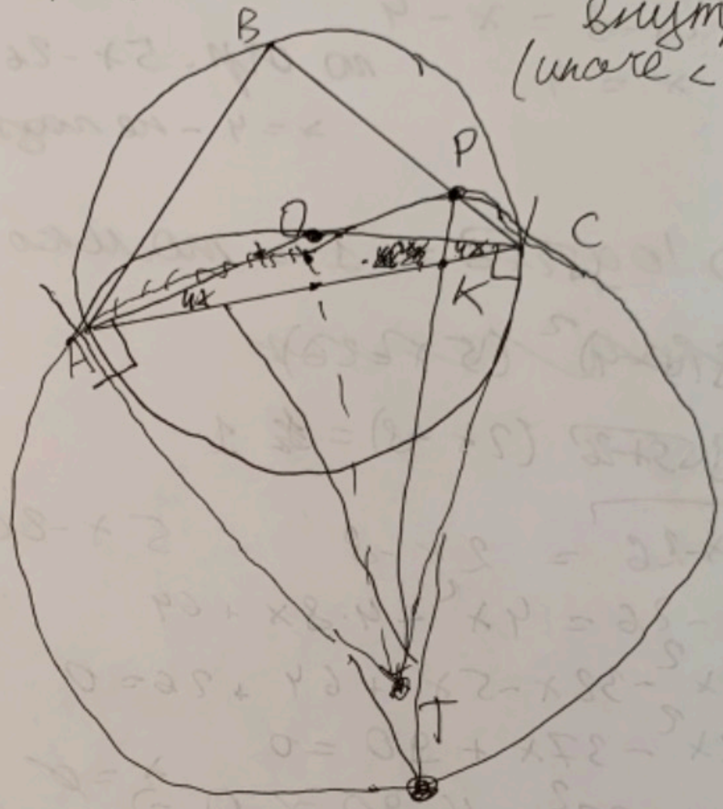
Ответ: $x=6$

№6 чистовик (6)

Дано:
$\triangle ABC$
ω с ц. O
и т. д.

$S_{\triangle ABC}$ - ?
AC - ?

остроугольный => ц. O лежит внутри $\triangle ABC$ (иначе $\angle$ будет $>90°$)



1) $S_{\triangle ATP} = 10$

$S_{\triangle CPK} = 8$

2) ~~$\triangle APT \sim \triangle CPT$ по углу~~

2) $S_{\triangle APK} = 10$, $S_{\triangle PKC} = 8$ =>

=> $\frac{AK}{KC} = \frac{5}{4}$ (через $S_\triangle$) $AK = 5x$, $KC = 4x$

3) $\triangle ATC$ - р/б $AT = TC$ (кас. из одной т.) =>

=> $M \in AC$ $AM = KC = 4x$

$MK = x$

4) т. T лежит на окр-сти ∈ т.к. $\angle OAT + \angle OCT = 180°$

черновик (1) №4

НОД $(a; b; c) = 10$

НОК $(a; b; c) = 2^{17} \cdot 5^{16}$

$a = 10 \cdot a_1$

$b = 10 \cdot b_1$

$c = 10 \cdot c_1$

НОД $(a_1; b_1; c_1) = 1$

НОК $(a_1; b_1; c_1) = \frac{2^{17} \cdot 5^{16}}{2 \cdot 5} = 2^{16} \cdot 5^{15}$

$\Downarrow$

числа кратны только 2 и 5

~~I 2 числа $= 2^{16} \cdot 5^{15}$ из 3 → 1 3 число~~

среди чисел $a_1; b_1; c_1$ одно из них $= 1$, иначе НОД$(a; b; c) > 10$

I 1 число $= 2^{16} \cdot 5^{15}$

2 число $= 2^{\text{от } 0 \text{ до } 16} \cdot 5^{\text{от } 0 \text{ до } 15}$

$17 \cdot 16 \cdot 3 \cdot 2 - 5 - 5$

$17 \cdot 16 \cdot 3 \cdot 2 - 5$

черновик Е

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$ N 5

$\log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$2x-8=a=2b$

$x-4=b$

$5x-26=c$

$\log_{\sqrt{a}}(b)=2\log_a b$

(1) $\log_{b^2}(c)=2\log_b c$

(2) $\log_{\sqrt{c}}(a)=2\log_c a$

3)

(4)

$2\log_{2b} b=2\dfrac{\log_c b}{\log_{2b} c}$

$2\log_b c$

$2\log_c 2b$ ~~2log~~

$\dfrac{2\log_{2b} b}{x}$; $\dfrac{2\log_b c}{z}$; $\dfrac{2\log_c 2b}{y}$

~~xyz~~

$x\cdot y=2\cdot 2\cdot \log_{2b} b\cdot \log_c 2b=4\log_c b$

$\dfrac{8}{xy}=\dfrac{8\log_b c}{4}=2\log_b c=z$

$\dfrac{8}{xy}=z \qquad 8=zxy$

21100011 (U219113 M1302097)

черновик (3)

$$8 = zxy$$

$$\frac{8}{xy} = z \qquad \left[\begin{array}{ll} x = y, \; z = x+1 & (1) \\ x = z, \; y = x+1 & (2) \\ y = z, \; x = y+1 & (3) \end{array}\right.$$

$$x_1^2(x_1+1) = 8$$

$$x_1^3 + x_1^2 = 8$$

$$\left(\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)\right)^3 + \left(\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)\right)^2 = 8$$

$$8\log^3_{(2x-8)}(x-4) + 4\log^2_{2x-8}(x-4) = 8$$

$$2\log^3_{(2x-8)}(x-4) + \log^2_{(2x-8)}(x-4) = 2$$

черновик (4)

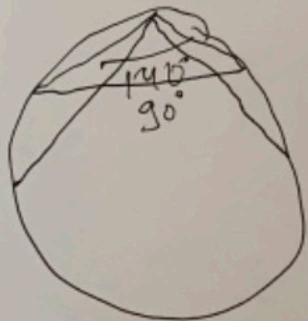
a_1 b_1 c_1

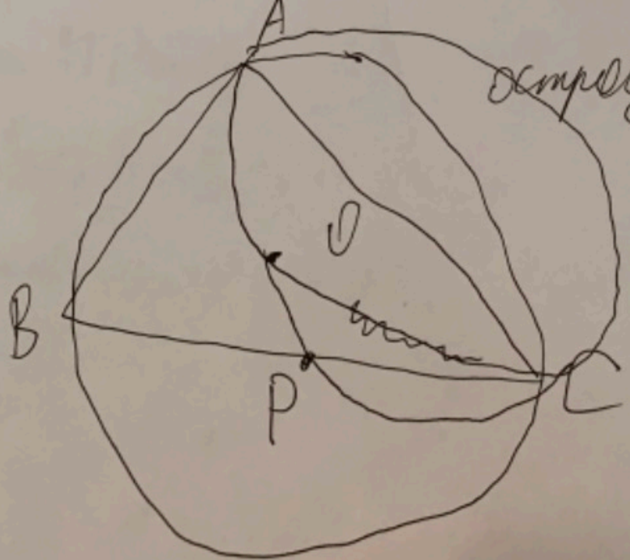
(1) $2^{16}\cdot 5^{15}$ 1 $\cdot$ | 40A одно из чисел = 1
(2) $2^{16}\cdot 5^{15}$ $\cdot$ 1 | 2-ое число $= 2^{16}\cdot 5^{15}$
(3) 1 $2^{16}\cdot 5^{15}$ $\cdot$ | 3-е число $2^{m}\cdot 5^{n}$, где
(4) 1 $\cdot$ $2^{16}\cdot 5^{15}$ | ~~m, n ∈ $\mathbb{Q}_1$~~ m от 0 до 16
(5) $\cdot$ 1 $2^{16}\cdot 5^{15}$ | n от 0 до 15
(6) $\cdot$ $2^{16}\cdot 5^{15}$ 1

когда $\cdot = 1$ или $2^{16}\cdot 5^{15}$ – считается несколько раз

−3

№ 6





остроуг ⇒ $O \in \triangle ABC$

21100011 (U219113 M1302097)

черновик ⑤

$(-2\sqrt{2})^2 = -16 + 8 = 2$

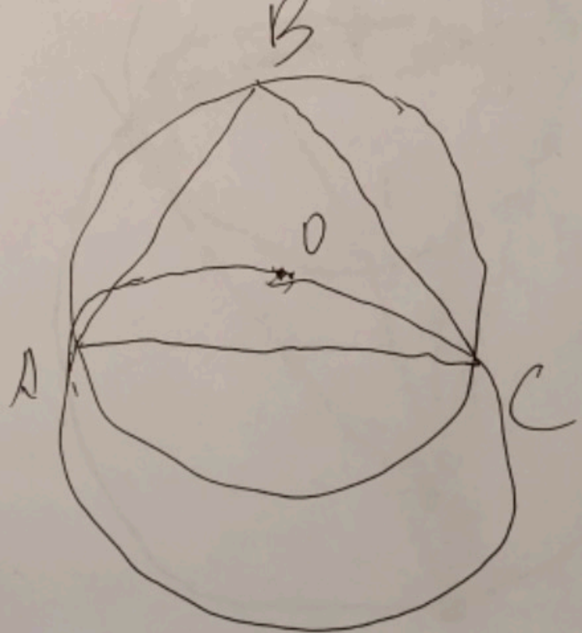
$d^3 - 2d^2 +$

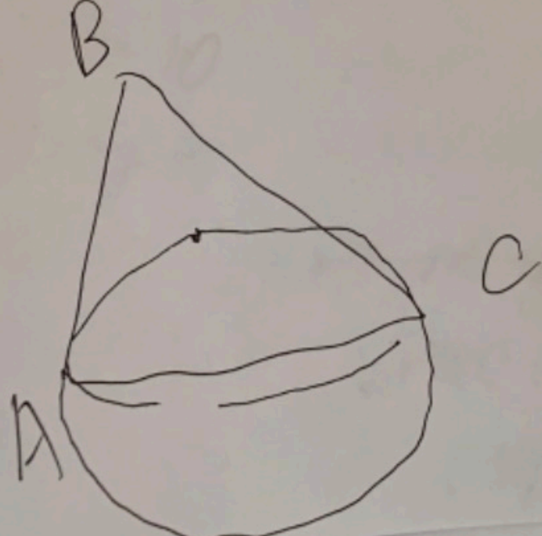
$S_{\triangle ABC} = \sin\angle ABC \cdot AB \cdot BC$

$AB \cdot BC = \frac{S_{\triangle ABC}}{\sin\angle ABC}$

№ 6 $AC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\cos\angle ABC\frac{AB \cdot BC}{2}$

$-\frac{8}{27} + \frac{4}{6}$





$AT = TC$ (кас. из одной т.

21100011 (U219113/M1302097)