Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

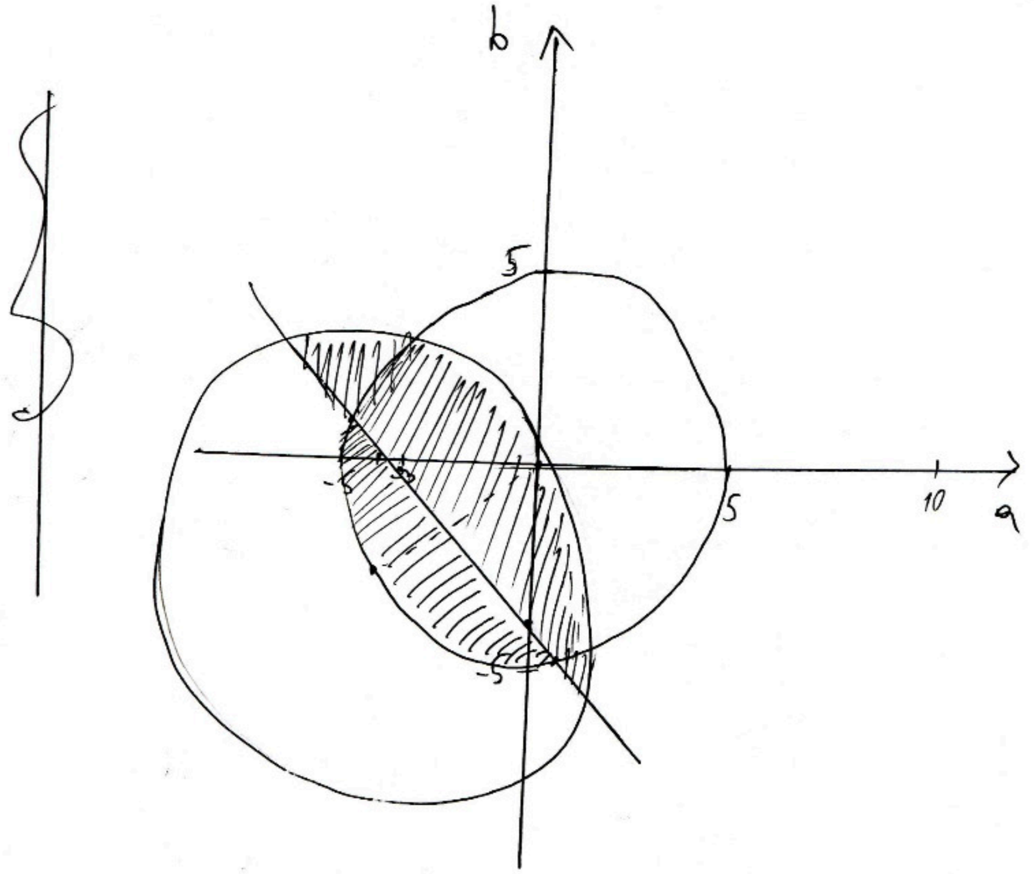
Шифр: **21104862**

ID профиля: **128018**

Вариант 19

Черновик.

$$\begin{cases} 1)\ a^2+b^2 \le 25 & \text{при } -8a-6b > 25 \quad b < \frac{-8a-25}{6} \\ 2)\ a^2+b^2 \le -8a-6b & \text{при } 8a-6b \le 25. \ ; b \ge \frac{-8a-25}{6} \end{cases}$$

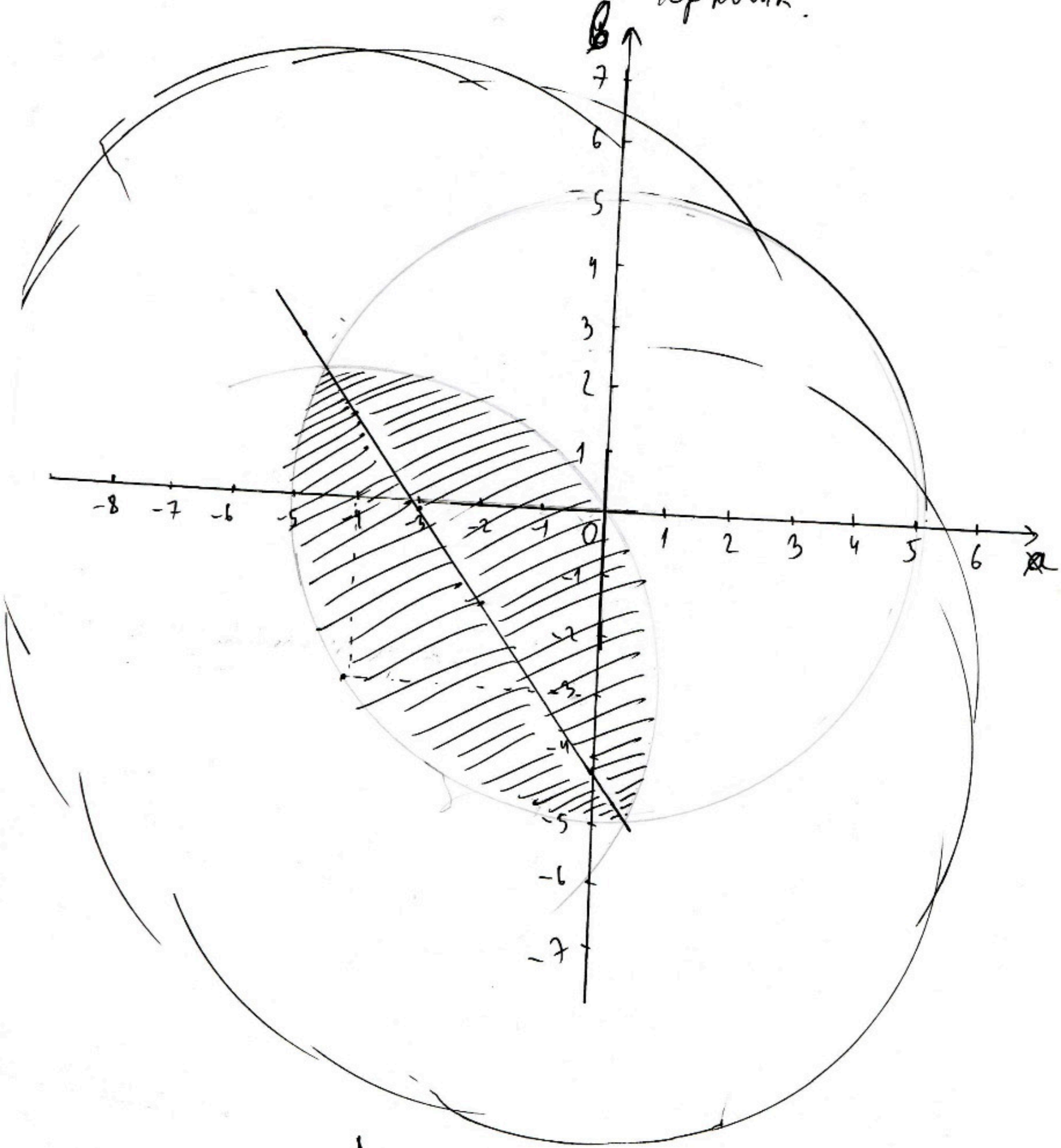


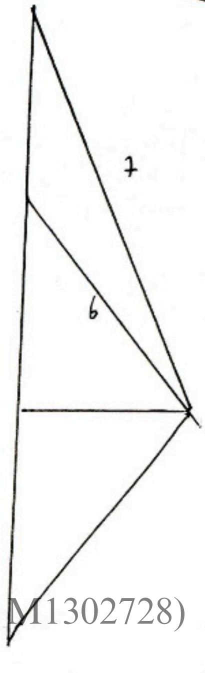
$a^2+8a+b^2+6b \le 0.$

$(a+4)^2+(b+3)^2 \le 25.$

21104862 (U128018 M1302728)

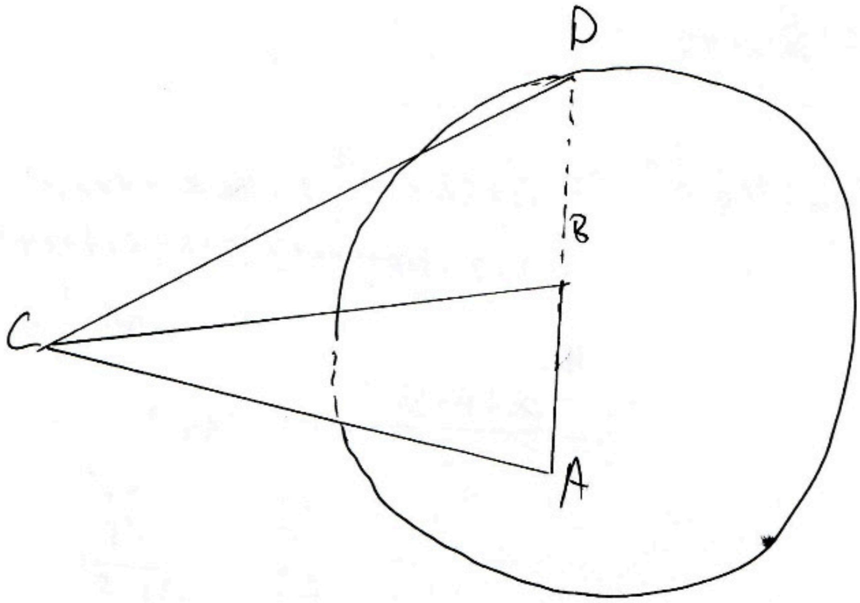
Черновик.

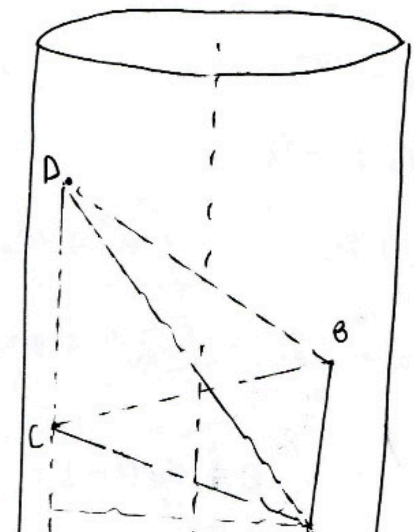




21104862 (U128018 M1302728)

Черновик.





$CD = \sqrt{7^2 - 6^2} = \sqrt{13}.$

$(a_1+8k)\cdot(a_1+16k) > S+12.$ Черновик.

$a>b \quad c>d \quad d>b.$

$10>5$

$13>9.$

$(a_1+10k)(a_1+14k) < S+47.$

$a_1^2+24ak+128k^2 > S+12.$

$a_1^2+24ak+140k^2 < S+47.$

$\cancel{S}+47+\cancel{a_1^2}+\cancel{24a}k+128k^2 > \cancel{S}+12+\cancel{a^2}+\cancel{24a}k+140k^2.$

$-4-3-2-1+0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+\ldots$

35

$35 > 12k^2.$

$S=\frac{a+a+13}{2}\cdot 14 = 14a+91$

$\frac{35}{12} > k^2.$

$k<\sqrt{\frac{35}{12}}.$

$k=1$

$91-56=35$

$4{,}5\cdot 4{,}5$: 225, 180, $20{,}25$

$4{,}7\cdot 4{,}7$: 329, 188, $22{,}09$

$$\begin{cases}(a+8)(a+16) > 14a+103.\\(a+10)(a+14) < 14a+138.\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+24a+128 > 14a+103.\\a^2+24a+140 < 14a+138\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+10a+25 > 0.\\a^2+10a+2<0.\end{cases}$$

$D=100-8=92=2\sqrt{23}.$

$$\begin{cases}(a+5)^2>0\\a\in(-5-\sqrt{23};-5+\sqrt{23}).\end{cases}$$

$a_{1,2}=\frac{-10\pm2\sqrt{23}}{2}=-5\pm\sqrt{23}$

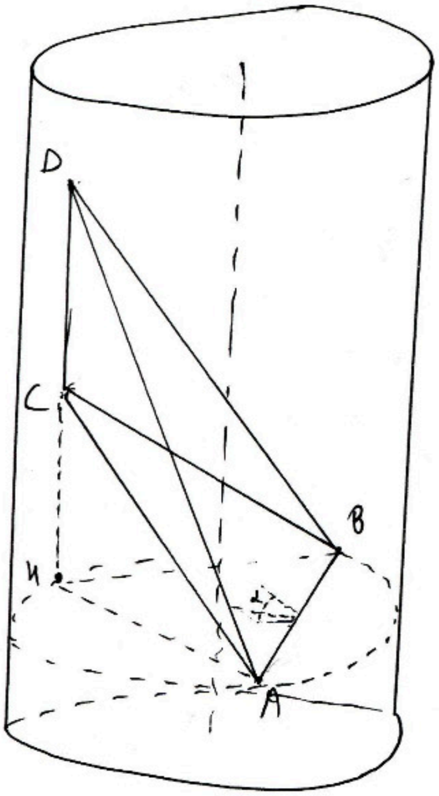
$\sqrt{23}\approx 4{,}7.$

$4{,}78\cdot 4{,}78$: 3824, 3346, 1912, $22{,}8484$

$$\begin{cases}a\neq -5.\\a\in(-9{,}7;\ 0{,}3).\end{cases}$$

$a=-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1.$

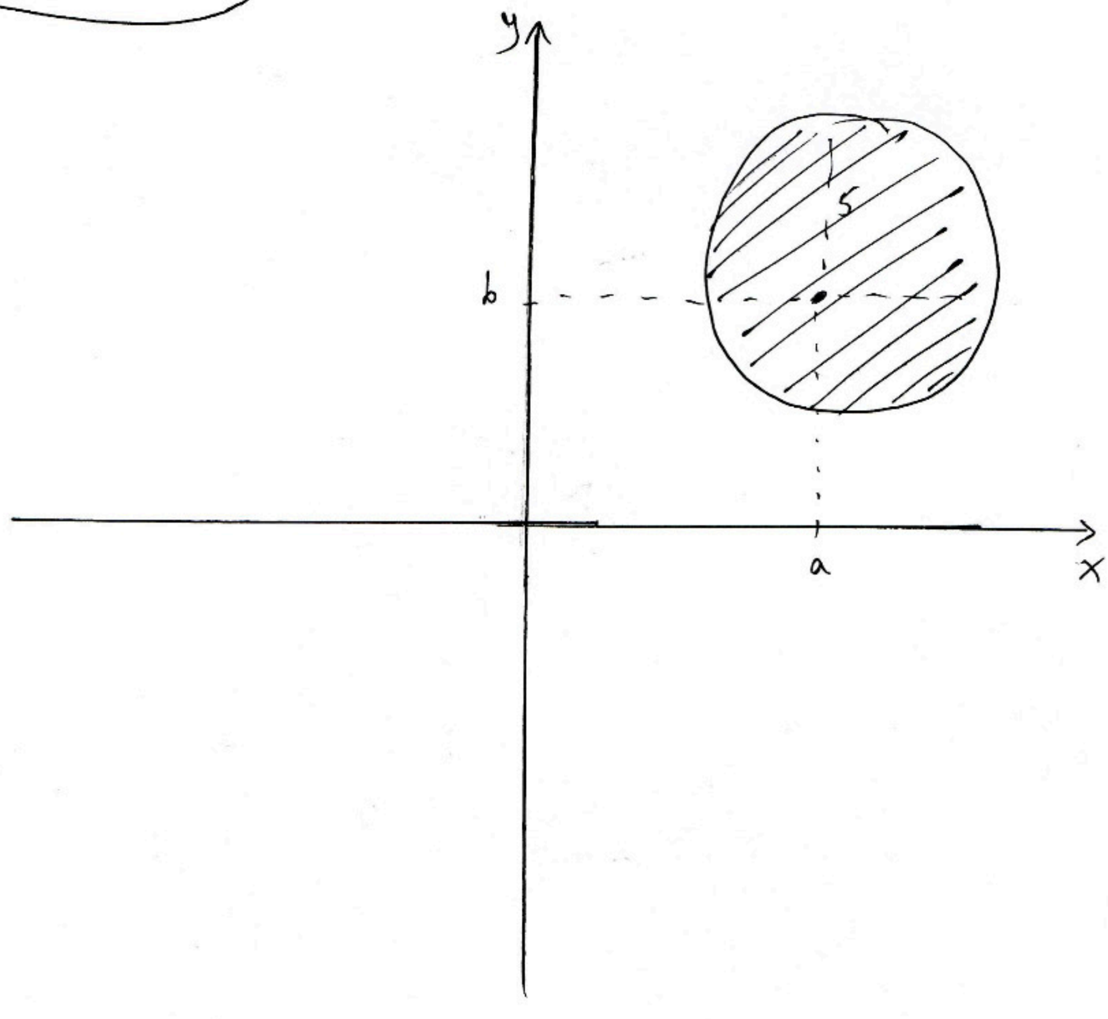
Черновик. $S_{ABC} = \sqrt{7(7-2)(7-6)(7-6)} = \sqrt{35}.$



$S_{AHB} = S_{ABC} \cdot \cos\alpha.$

$S_{AHB} =$

3.



21104862 (U128018 M1302728)

1. a - первое число Чистовик.

k - разность прогрессии

$(a+8k)(a+16k) > S+12$

$S+47 > (a+10k)(a+14k)$

$S+47+a^2+14ak+128k^2 > S+12+a^2+24k+140k^2$

$35 > 12k^2$

$k < \sqrt{\frac{35}{12}}$. Т.к. все числа целые, и функция возрастает, то $k=1$.

$S = \frac{a+a+13}{2} \cdot 14 = 14a + 91$.

$$\begin{cases}(a+8)(a+16) > 14a+103 \\ (a+10\cancel{k})(a+14\cancel{k}) < 14a+138\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+10a+25>0 \\ a^2+10a+2<0\end{cases} \quad \begin{cases}(a+5)^2>0 \\ a \in (-5-\sqrt{23}; -5+\sqrt{23}).\end{cases} \quad \sqrt{23} \approx 4,8.$$

$$\begin{cases}a \neq -5 \\ a \in (-9,8; -0,2)\end{cases}; \; a \in Z.$$

Ответ: $a = -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1.$

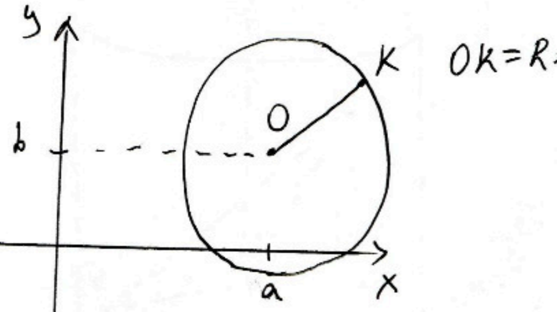
21104862 (U128018 M1302728)

Чистовик

3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 25\\ a^2+b^2\le \min(-8a-6b;\,25).\end{cases}$$

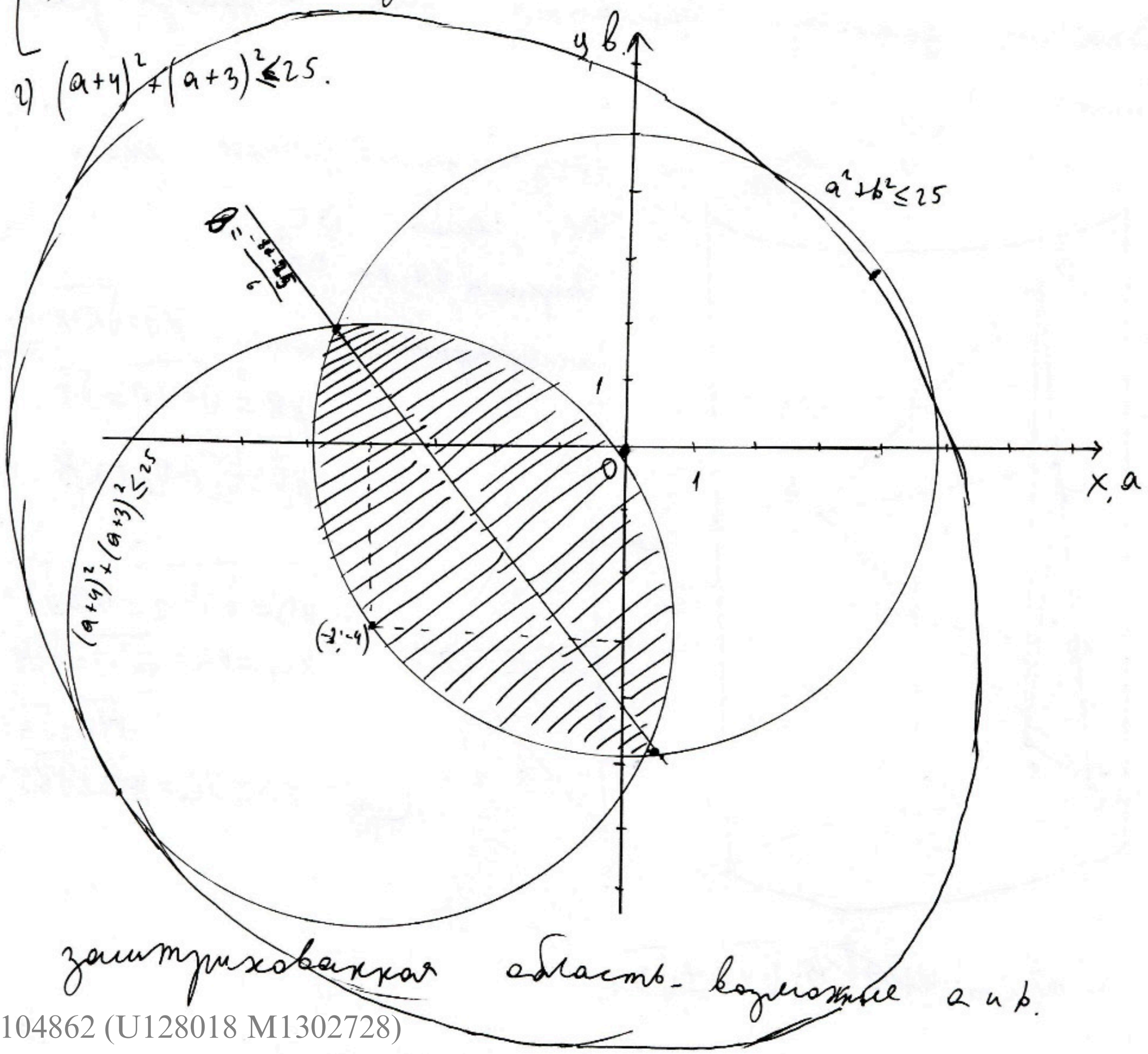
1) Первое условие даёт нам:



2) ~~На этих же чертежа~~ В осях $OX;OY$ изображаем второе условие:

$$\begin{cases}1)\ a^2+b^2\le 25 \text{ при } -8a-6b>25\ \left(b<\frac{-8a-25}{6}\right)\\ 2)\ a^2+b^2\le -8a-6b \text{ при } -8a-6b\ge 25\ \left(b\ge\frac{-8a-25}{6}\right).\end{cases}$$

2) $(a+4)^2+(a+3)^2\le 25.$

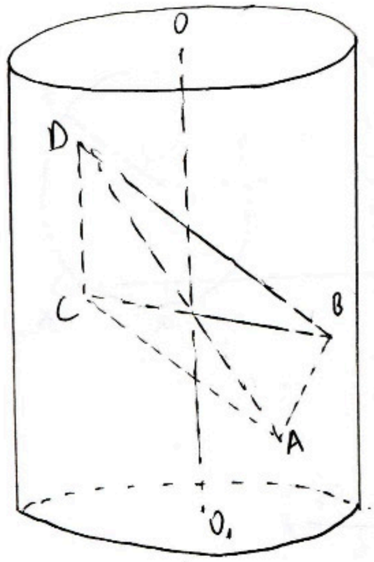


заштрихованная область - возможные a и b.

Чистовик

3. Таким образом, все точки, лежащие на расстоянии 5 или меньше от заштрихованной фигуры - искомая область.

2.



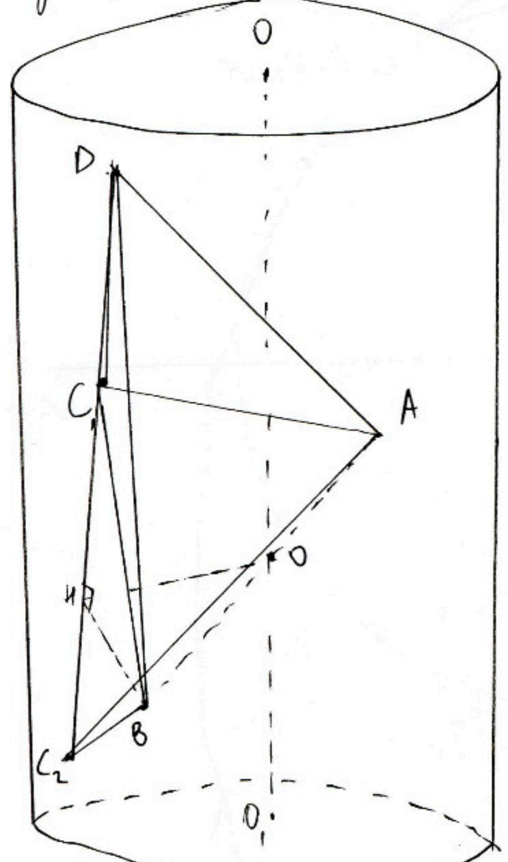
1) Т.к. $CD \parallel OO_1$, ~~то CD~~ а OO_1 параллельна боковой поверхности, то $CD \in$ боковой поверхности и ~~парал~~ перпендикулярна основанию.

Т.к. $CA = CB$; $DA = DB$, то из соображений симметрии $AB \parallel$ ~~области~~ основанию.

Значит, диаметр основания как минимум равен AB.

Тогда:

1)



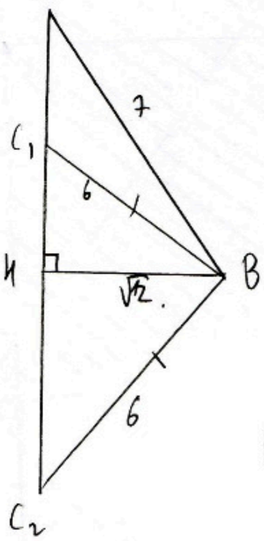
Возможные длины либо DC_1, либо DC_2.

Опустим BH на DC_2.

Посмотрим сбоку. $HB = \sqrt{R^2 + R^2}$ - по т. Пифагора

$HB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

$HB = \cancel{\frac{1}{2}AB} = 1 = R$.



$HD = \sqrt{7^2 - 2} = \cancel{4\sqrt{3}}\ \sqrt{47}$

$HC_1 = HC_2 = \sqrt{6^2 - 2} = \sqrt{34}$.

$\sqrt{47} \pm \sqrt{34}$.

$C_{1,2}D = HD \pm HC_1 = \cancel{4\sqrt{3} \pm \sqrt{35}}$.

Ответ: $\cancel{4\sqrt{3} \pm \sqrt{35}}$. $\sqrt{47} \pm \sqrt{34}$.

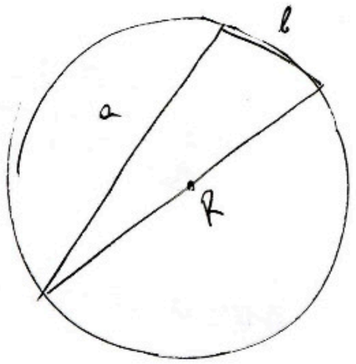
Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104862**

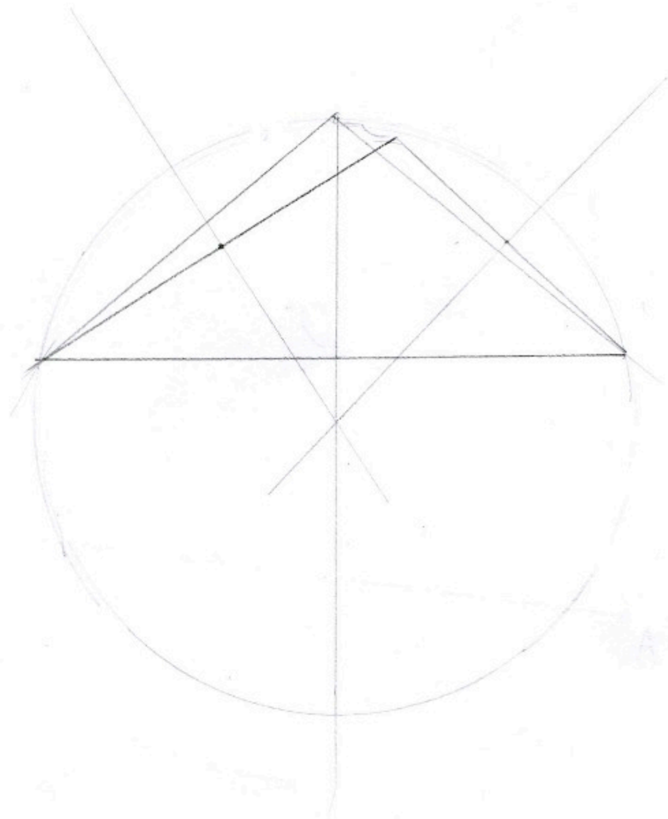
ID профиля: **128018**

Вариант 19



$$S = \frac{ab \cdot 2R}{4R} = \frac{ab}{2}.$$

$\log_{0,5^2} \frac{5}{4}$



$\log_3^2 27 = 9$ $\quad \log_3 27^3 = \log_3 3^9 = 9.$

$\log$

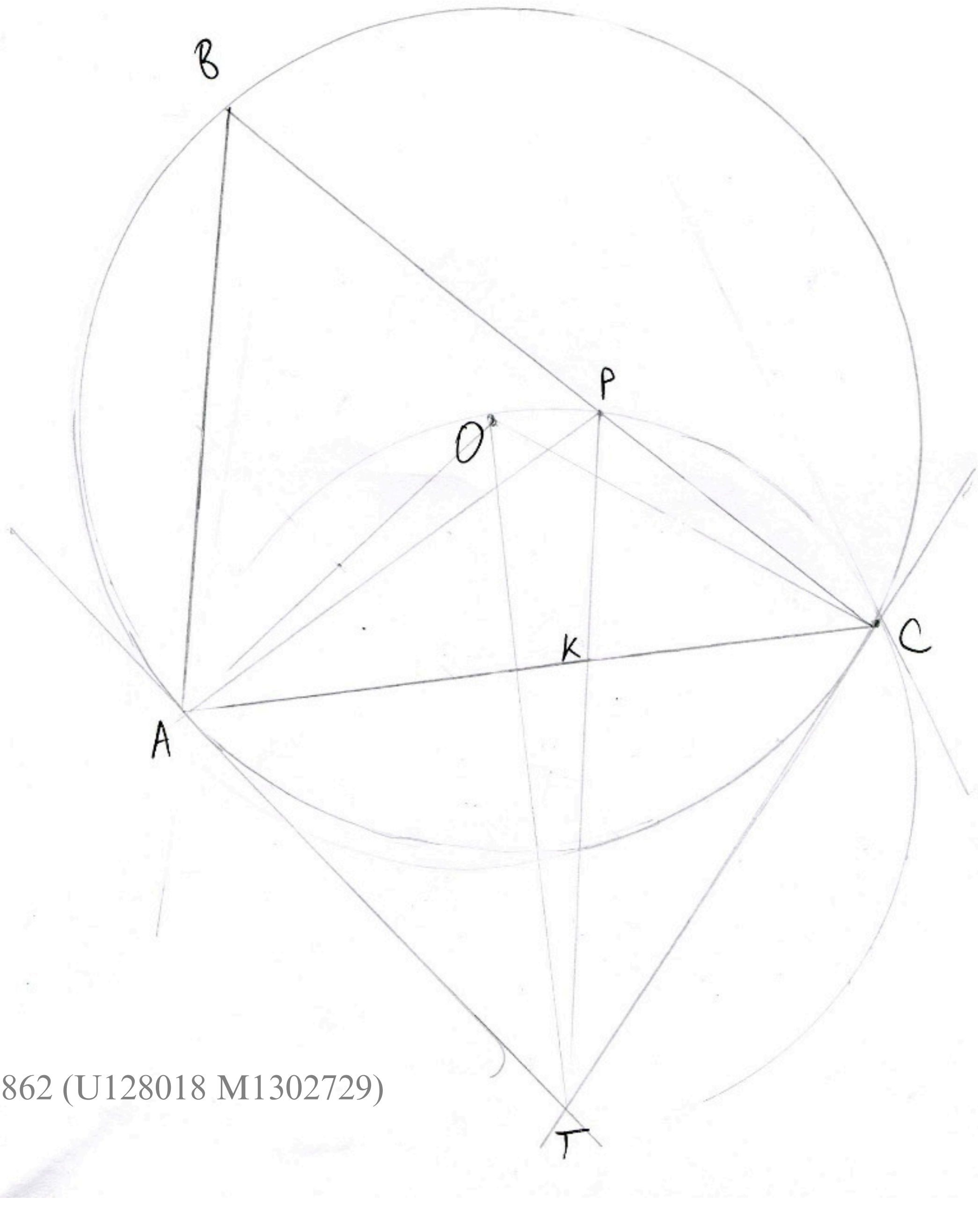
$a = b^c.$

$\frac{x}{2} - 1 = \left(x - \frac{11}{4}\right)^{\frac{x}{2} - \frac{1}{4}}$

$S_{AOC} = \frac{AO \cdot OC \cdot x}{4R}$

$AO \cdot OC = AP \cdot PC.$

$S_{APC} = AP \cdot PC \cdot \sin\alpha \cdot \frac{1}{2}.$



21104862 (U128018 M1302729)

$a = 3^x \cdot 7^y$ $\quad 1 \cdot 17 \cdot 17 \quad 1 \cdot 17 \cdot 1$

$b = 3^z \cdot 7^e$ $\quad 1 \quad 1 \quad 17 \quad 1 \cdot 1 \cdot 17$

$c = 3^d \cdot 7^f$ $\quad 17 \cdot 1 \cdot 1 \quad 17 \cdot 1 \cdot 1$

x, z, d

$y, e, f.$

17.

$17 \times 17 = 119 + 17 = 289$

289×17: $2023 + 289 = 4913$; $4913 - 6 = 4907$

4907×3369: $44163 + 29442 + 14721 + 14721 = 16531683$

225×15: $1125 + 225 = 3375$; $3375 - 6 = 3369$

$17 \cdot 2 \cdot 1$

$2 \cdot 17 \cdot 1.$

$2 \cdot 17.$

$17 \times 6 = 102$; $102 - 6 = 96$

$90 - 6 = 84.$

96×84: $384 + 768 = 8064$

x, z, d: 1, 1, 2

2, 1, 2

1, 1, 2

1, 2, 2

21104862 (U128018 M1302729)

~~Чистовик~~. Черновик

Для того, чтобы НОК $= 3^{17} \cdot 7^{15}$ макс. степень 3 для одного из чисел должна $= 17$, а степень $7 =$ ~~17~~ равняться 15.

Тогда:

Пусть $3^x \cdot 7^y = a$; $b = 3^z \cdot 7^e$; $c = 3^d \cdot 7^f$.

$(3 \cdot 17 \cdot 2 - 6)$.

$\cancel{(2 \cdot 17 - 6)}\cancel{(2 \cdot 17}$

$x, z, d \in [1; 17]$, для них вариантов 17^3 ~~−14~~ (6 повторяются). (где одно из чисел 1, а другое 17)

$y, e, f \in [1; 15]$, для них вариантов ~~15^3 −20~~ $(3 \cdot 15 \cdot 2 - 6)$. (где одно из чисел 1, а другое 15).

И всего вариантов: $\cancel{(17^3 - 6) \cdot (15^3 - 6)} = \cancel{16531683}$.

$(3 \cdot 17 \cdot 2 - 6)(3 \cdot 15 \cdot 2 - 6) =$

$= 8064$

Ответ: ~~16531683~~ 8064.

повторятся варианты: (1, 1, 17),

(1, 17, 1),

(17, 1, 1),

(17, 17, 1),

(17, 1, 17),

(1, 17, 17),

21104862 (U128018 M1302729)

~~Чистовик~~ Черновик.

~~Итого: $224 \cdot 4 = 896$ вар.~~

~~Поскольку $a \neq b$; $b \neq c$; $a \neq c$, то~~

~~Всего таких вариантов 6: (a, b, c); (a, c, b) ... (c, b, a).~~

~~Итого:~~

~~1) Предположим, все числа различны. Логично, что~~

если два числа равны, то они равны 21 (иначе НОК

Предположим, среди a, b, c нет 21.

Тогда:

Пусть $a = 3 \cdot 7^x$

$b = 7 \cdot 3^y$

$c = 3^z \cdot 7^e$.

~~Пусть~~ Тогда $x \in [2; 15]$; $y \in [2; 17]$; $z \in [1; 17]$; $e \in [1; 15]$,

но если $z = 1$; $e \neq 1$.

~~Тогда вариантов:~~

~~Если~~ Одно из $x, e = 15$ и одно из $y, z = 17$.

Тогда:

1) $x = 15$; $y = 17$: $z \in [1; 17]$; $e \in [1; 15]$ но $(z; e) \neq 1 \Rightarrow 15 \cdot 17 - 1 = 254$ вар.

2) $x = 15$; $z = 17$: $14 \cdot 17 = 238$ вар.

3) $e = 15$; $y = 17$: $15 \cdot 16 = 240$ вар.

4) $e = 15$; $z = 17$: $14 \cdot 16 = 224$ вар.

21104862 (U128018 M1302729)

$\log_{a^2} c;\ \log_{b^2} a^2;\ \log_c b^2$

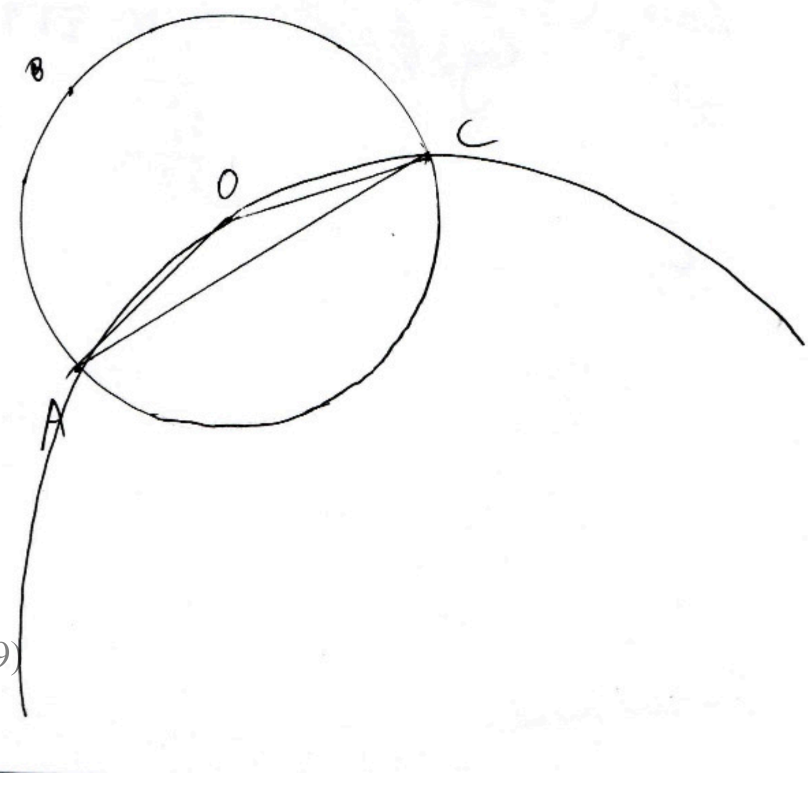
$$\log_b a^2 = \log_c b^2$$

$$\frac{\log_c a^2}{\log_c b} = \log_c b^2.$$

$$\log_c a^2 = 2\log_c^2 b.$$

$$\log_c a^2 - \log_c^2 b^2 = 0.$$

$$\log_c a - \log_c^2 b = 0.$$



4. $\cancel{3}\cdot\cancel{7}$.

$3^{19}\cdot 7$

$3\cdot 7^{10}$

$3\cdot 7^{4}$

$a = 3\cdot 7^{x}$

$b = 7\cdot 3^{y}$

$c = 3^{17-y-1}\cdot 7^{15-x-1}$

$a = 3\cdot 7^{x}$

$b = 7\cdot 3^{y}$

$c = 3^{a}\cdot 7^{b}$.

1) $x=15;\ y=17$:

$a\in[1;17];\ b\in[1;15]$. $\Rightarrow$ $17\cdot 15$ вар.

2) $x=15;\ a=17$:

$y\in[1;17];\ b\in[1;15]$ $17\cdot 15:4 = 60\cdot 17$

$17\cdot 60 = 1020$

5. $\frac{x}{2}-1 = a$

$x-\frac{11}{4} = b$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4} = c$.

$\log_{a^2} c;\ \log_{b^{0,5}} a;\ \log_{c} b^2$

$\log_{b^{0,5}} a = 2\log_{b} a = \log_{b} a^2 = \frac{1}{\log_{a^2} b}$

$\log_{a^2} C = \frac{1}{\log_{a^2} b}$.

$16\cdot 14$

$14\cdot 16 = 224$

$16\cdot 14 = 224$

$896\cdot 6 = 5376$

$16\cdot 17 = 272$

$224\cdot 4 = 896$

$15\cdot 16 = 240$

$15\cdot 17 = 255$

$17\cdot 14 = 238$

21104862 (U128018 M1302729)

Чистовик

4. НОД $(a,b,c) = 21 \Rightarrow$ каждое из чисел a, b, c <u>имеет</u> множители 7^x и 3^y, где $x, y \in$ ~~Z~~ N.

НОК $(a,b,c) = 3^{17} \cdot 7^{15} \Rightarrow$ у чисел a, b и c множители <u>только</u> 3^x и 7^y, причём ~~максимальная~~ значение $x = 17$; $y = 15$.

Предположим, среди чисел a, b, c нет числа, у которого во множителе 3^x $x = 1$. тогда для любого числа из a, b, c $x \geq 2$.

Но в этом случае $a \vdots (3^2 \cdot 7)$; $b \vdots (3^2 \cdot 7)$; $c \vdots (3^2 \cdot 7) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ НОД $(a; b; c)$ как минимум 63. Противоречие.

Значит, одно из чисел имеет множитель 3^1.

Аналогично, одно из чисел имеет множитель 7^1.

1) Предположим, что это разные числа.

Тогда:

Пусть $a = 3 \cdot 7^x$

$b = 7 \cdot 3^y$

$c = 3^z \cdot 7^e$

Чтобы числа не пересекались, пусть каждое $\in [2]$; из $x, y, z, e \in [2] \geq 2$, то есть среди чисел нет ни одного, равного 21.

1) Одно из чисел x, y, z, e обязательно равняется 15, а одно из $y, z = 17$.

Тогда:

1) $x = 15$; $y = 17$. $z \in [2; 17]$; $e \in [2; 15] \Rightarrow 16 \cdot 14 = 224$. – варианта

2) $x = 15$; $z = 17$ – 224 вар.

3) $e = 15$; $y = 17$ – 224 вар.

4) $e = 15$; $z = 17$ – 224 вар.

Чистовик

Для того, чтобы НОК $= 3^{17} \cdot 7^{15}$, из чисел должна равняться макс. степень 3 одного 17, а степень 7 равняться 15.

Тогда:
$a = 3^x \cdot 7^y$; $b = 3^z \cdot 7^e$; $c = 3^d \cdot 7^f$, где два из $(x, z, d) = 1$ и 17, а оставшееся $\in [1; 17]$ и два из $(y, e, f) = 1$ и 15, а оставшееся $\in [1; 15]$.

Тогда вариаций x, z, d: $(17 \cdot 2) \cdot 3 - 6$ повторившихся:
$(1, 1, 17)$; $(1, 17, 1)$; $(17, 1, 1)$, $(17, 17, 1)$, $(17, 1, 17)$, $(1, 17, 17)$.

Для y, e, f вариаций: $(3 \cdot 15 \cdot 2) - 6$ (аналогично).

Тогда всего вариантов:

$$(3 \cdot 15 \cdot 2 - 6)(3 \cdot 17 \cdot 2 - 6) = 8064.$$

Ответ: 8064

21104862 (U128018 M1302729)