Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104780**

ID профиля: **873553**

Вариант 19

Чистовик 1 Вариант 19

Задача 1

Пусть первый член прогрессии равен a_1. по усл. a_1 - целое

Пусть разность прогрессии равна d

d также целое, т.к. иначе $a_2 = a_1 + d$ не целое.

т.к. прогрессия возр., $d > 0$

$S = \frac{2a_1 + 13d}{2} \cdot 14 = 14a_1 + 91d$

$a_9 a_{17} = (a_1 + 8d)(a_1 + 16d) = a_1^2 + 24da_1 + 128d^2$

$a_{11} a_{15} = \cancel{(a_1 + 9d)(a_1 + 1}\cdot (a_1 + 10d)(a_1 + 14d) = a_1^2 + 24da_1 + 140d^2$

По усл:

$$\begin{cases} a_9 a_{17} > S + 12 \\ a_{11} a_{15} < S + 47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24da_1 + 128d^2 > 14a_1 + 91d + 12 \\ a_1^2 + 24da_1 + 140d^2 < 14a_1 + 91d + 47 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24da_1 + 128d^2 + 35 > 14a_1 + 91d + 47 \\ a_1^2 + 24da_1 + 140d^2 < 14a_1 + 91d + 47 \end{cases}$$

$a_1^2 + 24da_1 + 128d^2 + 35 > 14a_1 + 91d + 47 > a_1^2 + 24da_1 + 140d^2$

$\Rightarrow$ $a_1^2 + 24da_1 + 128d^2 + 35 > a_1^2 + 24da_1 + 140d^2$

$128d^2 + 35 > 140d^2$

$12d^2 < 35$

$d^2 < \frac{35}{12}$

$0 < d < \sqrt{\frac{35}{12}}$

$\sqrt{\frac{35}{12}} \overset{<}{\vee} 2$

$\frac{35}{12} \overset{2}{\vee} 4$

$d = 1$

Чистовик (2) Вариант 19

Задача 1 (продолжение)

Если $d = 1$, то

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 91\cancel{1} + 12 \\ a_1^2 + 24a_1 + 140 < 14a_1 + 91 + 47 \end{cases}$$ (подставили в (1))

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0 \end{cases}$$

$a_1^2 + 10a_1 + 2 = 0$ $\quad \frac{D}{4} = 25 - 2 = 23$

$a_1 = -5 \pm \sqrt{23}$

$$\begin{cases} (a_1 + 5)^2 > 0 \\ -5 - \sqrt{23} < a < -5 + \sqrt{23} \end{cases}$$

$4 < \sqrt{23} < 5$

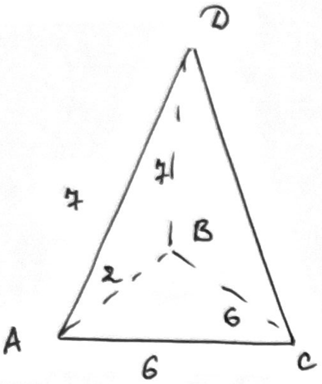
$$\begin{cases} a_1 \neq -5 \\ -10 < a_1 < 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} a_1 = -9 \\ a_1 = -8 \\ a_1 = -7 \\ a_1 = -6 \\ a_1 = -4 \\ a_1 = -3 \\ a_1 = -2 \\ a_1 = -1 \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

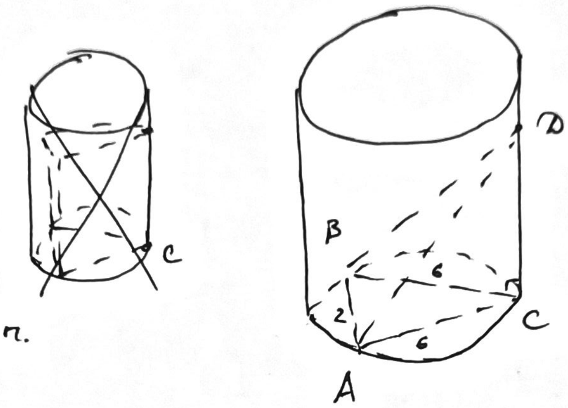
Чистовик ③ Вариант 19

Задача 2



по усл. прямая CD перп. основанию цилиндра и лежит на боковой поверхности. Пусть радиус цилиндра равен R

1) $\angle ACD = 90^\circ \; (= \angle BCD)$



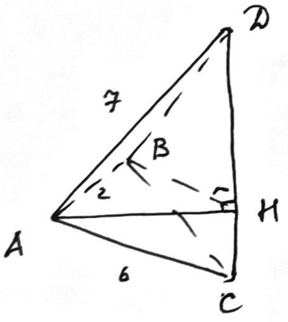
R = радиус окр-ти, оп. около $\triangle ABC$

по т. косинусов $\cos\angle BCA = \dfrac{36+36-4}{2\cdot 6\cdot 6} = \dfrac{68}{72} = \dfrac{34}{36} = \dfrac{17}{18}$

$\Rightarrow \sin\angle BCA = \sqrt{1 - \cancel{169}\ \dfrac{289}{324}} = \sqrt{\dfrac{324-289}{324}} = \dfrac{\sqrt{35}}{\cancel{17}\,18}$

по т. синусов $R = \dfrac{2}{2\sin\angle BCA} = \dfrac{1}{\sin\angle BCA} = \dfrac{18}{\sqrt{35}}$

2) $\angle ACD < 90^\circ$



Опустим перп. из A и B на DC

т.к. $\triangle ADC = \triangle BDC$ по трём сторонам, основания перп. совпадут.

$AH \perp DC$, $BH \perp DC$ *

Тогда R = радиус оп. окружности $\triangle ABH$

$R = \dfrac{2}{2\sin\angle BHA} = \dfrac{1}{\sin\angle BHA}$ т.к. $0 < (\sin\angle BHA) \leq 1$,

мин. значение ~~до~~ R достигается при $\sin\angle BHA = 1$ $(R = 1)$

Тогда $\angle BHA = 90^\circ$, $\triangle ABH$ - р/б и прямоуг.,

$\Rightarrow AH = BH = \sqrt{2}$.

* $H \in$ отр. DC, т.к. $\angle ADC < 90^\circ$

Такого $\triangle$ не сущ., т.к. против большего угла лежит большая стор.

по т. Пифагора $HC = \sqrt{36-2} = \sqrt{34}$, $HD = \sqrt{49-2} = \sqrt{47}$

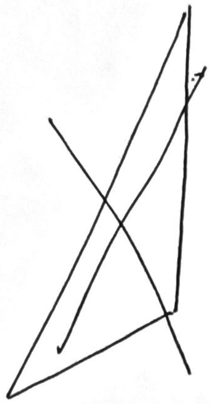
$\Rightarrow CD = \sqrt{34} + \sqrt{47}$

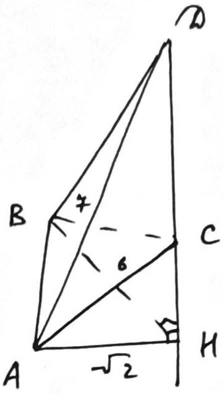
Чистовик (2) Вариант 19

(4)

Задача 2 (продолжение)

3) $\angle ACD > 90^\circ$





Аналогично 2)
опускаем перпендикуляры
(H будет вне отр. CD)

$R = R_{оп.}\ \triangle ABH$

мин. $R = 1$, $\triangle ABH$ – прямоуг.

$AH = BH = \sqrt{2}$

по т. Пифагора $CH = \sqrt{34}$

$DH = \sqrt{47}$

$CD = \sqrt{47} - \sqrt{34}$

Ответ: $\sqrt{34} + \sqrt{47}$ или $\sqrt{47} - \sqrt{34}$

Чистовик (5) Вариант 19

Задача 3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 25 & (1) \\ a^2+b^2 \le \min(-8a-6b, 25) & (2) \end{cases}$$

$$\cancel{\begin{aligned} -8a-6b &\ge 25 \\ 8a+6b &\le -25 \\ 6b &\le -25-8a \\ b &\le -\frac{25}{6}-\frac{4}{3}a \end{aligned}}$$

(2): $a^2+b^2 \le \min(-8a-6b; 25)$

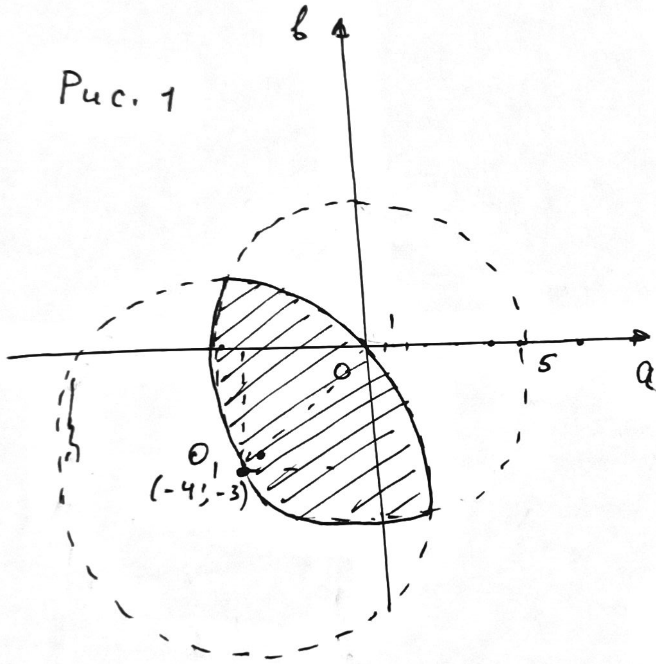
$$\begin{cases} a^2+b^2 \le -8a-6b \\ a^2+b^2 \le 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+8a+16+b^2+6b+9 \le 25 \\ a^2+b^2 \le 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+4)^2+(b+3)^2 \le 25 \\ a^2+b^2 \le 25 \end{cases}$$

– пересечение двух кругов радиусов 5 и с центрами в $(0;0)$ и $(-4;-3)$

Рис. 1



(1): из этого ~~ур-я~~ нер-ва следует, что фигура M – объед. всех кругов с центрами в заштр. области рис. 1 и радиусом 5.

На рис. 2 (3) и (5) – ~~границу~~ части окр-ностей радиуса ~~10~~ 5, а (4) и (6) – границы окр-тей радиуса 10. (Фигура M огр. дугами 3 – 6)

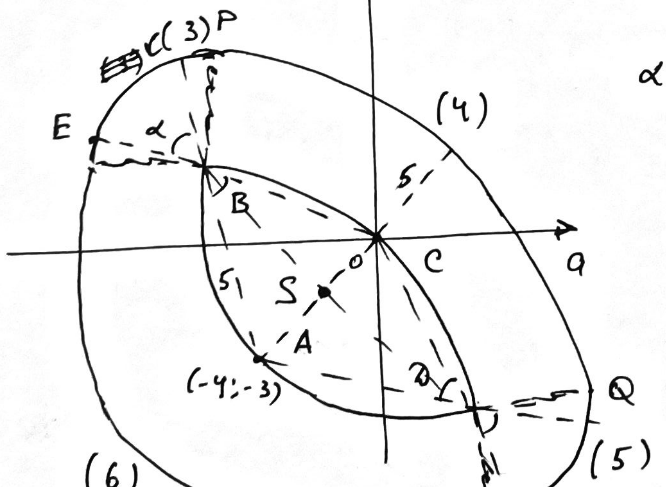


Рис. 2

$\alpha = 60^\circ$ ($\angle ABC$) т.к. ABC – р/ст. $\triangle$ со стороной 5

$S_{EBP} = \frac{60}{360} \cdot \pi \cdot 5^2 = \frac{25}{6}\pi$

~~S_{PBCDQ}~~ $= S_{PAQ} = \frac{120}{360} \cdot \pi \cdot 10^2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 = \frac{100}{3}\pi$

$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$

$S_{PBDQ} = \frac{100\pi}{3} - \frac{25\sqrt{3}}{4}$

Чистовик 6 Вариант 19

Задача 3 (продолжение)

8) Площадь фигуры M равна $2S_{EPB}+2S_{PBDQ}=$

$$= 2\cdot\frac{25}{6}\pi+2\cdot\left(\frac{100\pi}{3}-\frac{25\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{25\pi}{3}+\frac{200\pi}{3}-\frac{25\sqrt{3}}{2}=$$

$$=\frac{225\pi}{3}-\frac{25\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $\frac{225\pi}{3}-\frac{25\sqrt{3}}{2}$

Черновик Вариант 19

51

$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{12}} \vee 2$

35

a_1, d

$S = \frac{2a_1+13d}{2}\cdot 14 = 14a_1 + 91d$

$a_9 a_{17} = (a_1+8d)(a_1+16d) = a_1^2 + 8da_1 + 16da_1 + 128d^2 =$

$= a_1^2 + 24da_1 + 128d^2$

$a_{11} a_{15} = (a_1+10d)(a_1+14d) = a_1^2 + 24da_1 + 140d^2$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24da_1 + 128d^2 > 14a_1 + 91d + 12 \\ a_1^2 + 24da_1 + 140d^2 < 14a_1 + 91d + 47 \end{cases}$$

~~12d~~

$a_1^2 + 24da_1 + 128d^2 + 35 > 14a_1 + 91d + 47 > a_1^2 + 24da_1 + 140d^2$

$128d^2 + 35 > 140d^2$

$12d^2 < 35$

$d^2 < \frac{35}{12}$

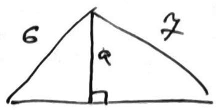
$|d| < \sqrt{\frac{35}{12}}$

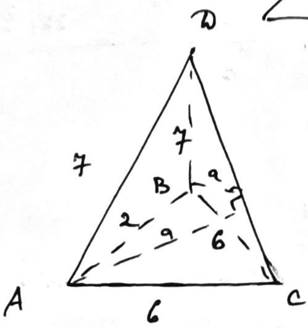
d	1	2
d^2	1	4

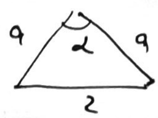
$d = 1$

$d > 0$

$d = 1$







$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 91 + 12 \\ a_1^2 + 24a_1 + 140 < 14a_1 + 91 + 47 \end{cases}$$

$\cos\alpha = \frac{a^2+a^2-4}{2a^2} = \frac{a^2-2}{a^2}$

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0 \end{cases}$$

~~sin~~ =

$\frac{D}{4} = 25 - 2 = 23$ $a_1 = -5 \pm \sqrt{23}$

$(a_1+5)^2 > 0$ $a_1 \neq -5$

$a_1 \in (-5-\sqrt{23}; -5+\sqrt{23})$

$a \neq -5$

$4 < \sqrt{23} < 5$

$-9, -8, -7, -6, -4, -3, -2, -1$

$a_1 = -1$

$d = 1$

$\frac{-2+13}{2}\cdot 14 = 77$

~~$7\cdot 15 = 105$~~ ✓

$9\cdot 13 = 117$

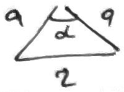
$3\cdot 11 = 33$

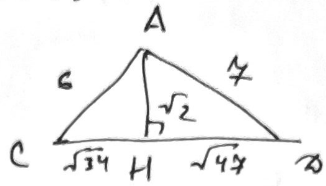
$a_1 = -5$

$d = 1$

$\frac{-10+13}{2}\cdot 14 = 21$

Черновик Вариант 19





$$\cos\alpha = \frac{2a^2-4}{2a^2} = \frac{a^2-2}{a^2}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{a^2-2}{a^2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1-\frac{a^4-4a^2+4}{a^4}} = \sqrt{\frac{a^4-a^4+4a^2-4}{a^4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4a^2-4}{a^4}} = \frac{2\sqrt{a^2-1}}{a^2}$$

$$R = \frac{2}{2\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2-1}} = f(a)$$

$a > 1$

$$\cancel{(x^{-1})' = -x^{-2}}$$

$$f'(a) = \frac{\cancel{2}a\cdot\cancel{2}\sqrt{a^2-1} - a^2\cdot\cancel{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}\cdot\cancel{2}}{\cancel{4}(a^2-1)} =$$

$$(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{a\cdot\sqrt{a^2-1} - a^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}}{a^2-1} = \frac{\frac{2a(a^2-1)-a^2}{2\sqrt{a^2-1}}}{a^2-1}$$

$$\frac{x}{2\sqrt{x-1}} = g(x)$$

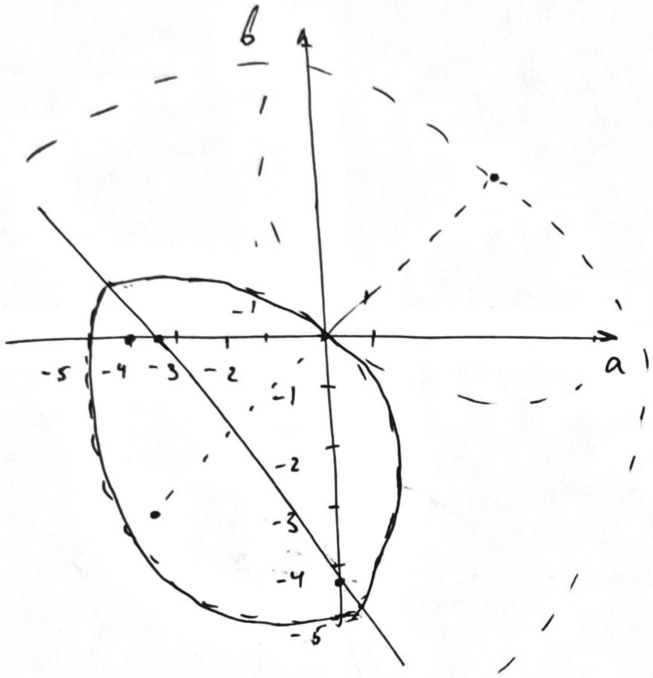
$$g'(x) = \frac{1\cdot 2\sqrt{x-1} - x\cdot 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{4(x-1)} =$$

$$= \frac{2\sqrt{x-1} - x\cdot\frac{1}{\sqrt{x-1}}}{x-1} = \frac{\frac{2(x-1)-x}{\sqrt{x-1}}}{(x-1)} = \frac{2x-2-x}{(x-1)^{\frac{3}{2}}} \qquad x = 2$$

$a = \sqrt{2}$

Черновик Вариант 19

$$\begin{cases} (x-a)^2+(\cancel{}\,y-b)^2 \le 25 \\ a^2+b^2 \le \min(-8a-6b, 25) \end{cases}$$



$-\frac{25}{6}-\frac{4}{3}a=0$

$\frac{4}{3}a=-\frac{25}{6}$

$a=\frac{3}{4}\cdot\frac{-25}{6}=-\frac{25}{8}$

$a^2+b^2\le -8a-6b$

$a^2+8a+16+b^2+6b+9\le 25$

$(a+4)^2+(b+3)^2\le 25$

$$\begin{cases} a^2+b^2=25 \\ -8a-6b=25 \end{cases}$$

$\cancel{}^2$

$a^2+8a+16+b^2+6b+9=25$

$(a+4)^2+(a+3)^2=25$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104780**

ID профиля: **873553**

Вариант 19

Чистовик 1 Вариант 19

Задача 5

Пусть $\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=m$

$\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)=n$

$\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=p$

$\frac{x}{2}-1=a \quad \frac{x}{2}-\frac{1}{4}=b \quad x-\frac{11}{4}=c$ $\qquad a>0 \quad b>0 \quad c>0$; $a\neq1 \quad b\neq1 \quad c\neq1$

$m=\log_{a^2}b=\frac{1}{2}\log_a b$

$n=\log_{\sqrt{c}}a=2\log_c a$

$p=\log_b c^2=2\log_b c$

Заметим, что $m\cdot n\cdot p=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\cdot\log_a b\cdot\log_c a\cdot\log_b c=$
$=2\cdot\log_a a\cdot\log_b b\cdot\log_c c=2$

Если два числа из трёх равны, а третье больше их на 1, то три числа можно представить в виде $q,\ q,\ q+1$

$q\cdot q\cdot(q+1)=2$ $\qquad \cancel{q^3+2q=2}$ $\qquad$ Разложим на множители, пользуясь схемой Горнера

$q^3+q^2-2=0$

$(q-1)(q^2+2q+2)=0$

$D<0$

	1	1	0	-2
1	1	2	2	0

$\underline{q=1}$ Тогда расcмотрим три случая:

1) $m=1,\ n=1,\ p=2$

$\begin{cases}\log_{a^2}b=1\\ \log_{\sqrt{c}}a=1\\ \log_b c^2=2\end{cases}$ $\begin{cases}a^2=b\\ \sqrt{c}=a\\ b^2=c^2\end{cases}$ $\begin{cases}a^2=b\\ c=a^2\\ b=c\end{cases}$ (1)

$b=c$:

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=x-\frac{11}{4}$

$\frac{x}{2}=\frac{10}{4}$ $\quad \underline{x=5}$

Тогда $\begin{cases}a=1,5\\ b=\frac{9}{4}\\ c=\frac{9}{4}\end{cases}$ – подходит для системы (1)

Случай подходит.

Чистовик ② Вариант 19

Задача 5 (продолжение)

2) $m = 1 \quad n = 2 \quad p = 1$

$\begin{cases} \log_{a^2} b = 1 \\ \log_{\sqrt{c}} a = 2 \\ \log_b c^2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 = b \\ c = a \\ b = c^2 \end{cases}$

$a = c$:

$\frac{x}{2} - 1 = x - \frac{11}{4}$

$\frac{x}{2} = \frac{7}{4} \quad \underline{x = \frac{7}{2}}$

Тогда $\begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = \cancel{\frac{13}{4}}\ \frac{6}{4} \\ c = \frac{3}{4} \end{cases}$ $b \neq c^2$, не подходит.

3) $m = 2 \quad n = 1 \quad p = 1$

$\begin{cases} \log_{a^2} b = 2 \\ \log_{\sqrt{c}} a = 1 \\ \log_b c^2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a^4 = b \\ \sqrt{c} = a \\ b = c^2 \end{cases}$ $\begin{cases} b = a^4 \\ b = c^2 \\ a^2 = c \end{cases}$

$a^2 = c$:

$\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 = x - \frac{11}{4}$

$\frac{x^2}{4} + 1 - x = x - \frac{11}{4}$

$\frac{x^2}{4} - 2x + \frac{15}{4} = 0$

$x^2 - 8x + 15 = 0$

$(x-5)(x-3) = 0$

$\left[\begin{aligned} x &= 3 \\ x &= 5 \end{aligned}\right.$

$x = 3$: $\begin{cases} a = 0{,}5 \\ b = 1{,}25 \\ c = 0{,}25 \end{cases}$ $b \neq c^2$, не подходит

$x = 5$: $\begin{cases} a = \cancel{3{,}5}\ 1{,}5 \\ b = 2{,}25 \\ c = 2{,}25 \end{cases}$ $b \neq c^2$, не подходит

(но ~~5~~ $x = 5$ подходит в первом случае)

Ответ: 5

Чистовик (3) § Вариант 19

Задача 4

В разложении каждого из чисел a, b и c на простые множители нет множителей, отличных от 3 и от 7.

Т.е. каждое из чисел a, b и c представимо в виде $3^m \cdot 7^n$, где m и n – неотрицательные целые числа.

т.к. НОД $(a; b; c) = 3 \cdot 7$, то хотя бы в одном из чисел a, b и c $m = 1$ и хотя бы в одном $n = 1$.
Также $n \geqslant 1$ и $m \geqslant 1$, т.к. при $m = 0$ или $n = 0$ НОД не может быть равен 21

т.к. НОК $(a; b; c) = 3^{17} \cdot 7^{15}$, макс. значение $m = 17$, а $n - 15$.
Причем эти значения встречаются хотя бы раз.
(т.е. хотя бы у одного числа $m = 17$ и хотя бы у одного $n = 15$)

Кол-во перестановок:

$$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 15 \cdot 17$$

для $n = 1$; для $m = 1$; для $n = 15$; для $m = 17$; для оставшихся n; для оставшихся m

$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 15 \cdot 17 = 36 \cdot 255 = 9180$

$$\begin{array}{r} \times\; 255 \\ 36 \\ \hline 1530 \\ 765 \\ \hline 9180 \end{array}$$

Дубли:

	a	b	c	
1)	$3^{17} \cdot 7^{15}$	$3^1 \cdot 7^1$	$3^m \cdot 7^n$	– 6 дублей
2)	$3^{17} \cdot 7^n$	$3^m \cdot 7^{15}$	$3^1 \cdot 7^1$	– 6 дублей
3)	$3^{17} \cdot 7^1$	$3^1 \cdot 7^{15}$	$3^m \cdot 7^n$	– 0
4)	$3^{17} \cdot 7^1$	$3^m \cdot 7^{15}$	$3^1 \cdot 7^n$	– 6
5)	$3^{17} \cdot 7^n$	$3^1 \cdot 7^{15}$	$3^m \cdot 7^1$	– 6
6)	$3^{17} \cdot 7^{15}$	$3^1 \cdot 7^n$	$3^m \cdot 7^1$	– 0

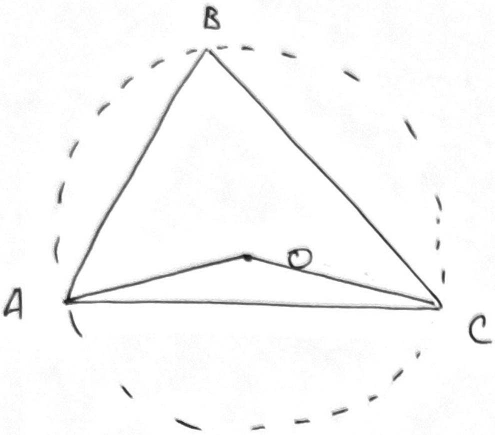
Всего 24 дубля.

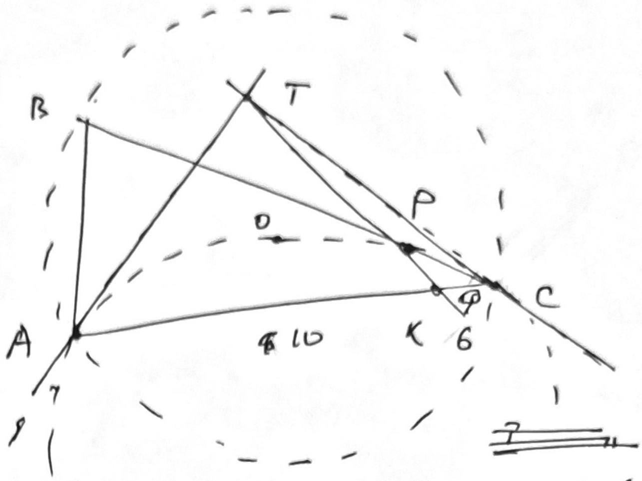
$9180 - 24 = 9156$

Ответ: 9156

Черновик Вариант 19

б)





3×1

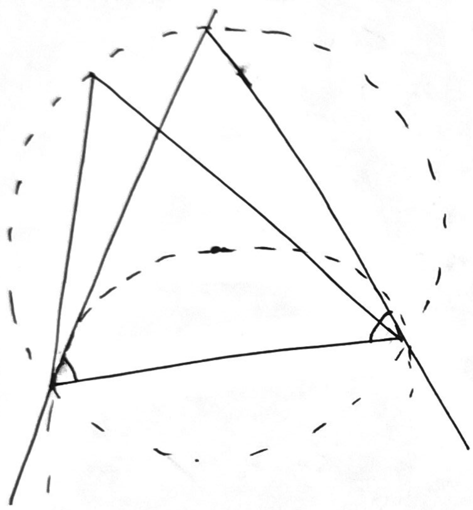
7×1

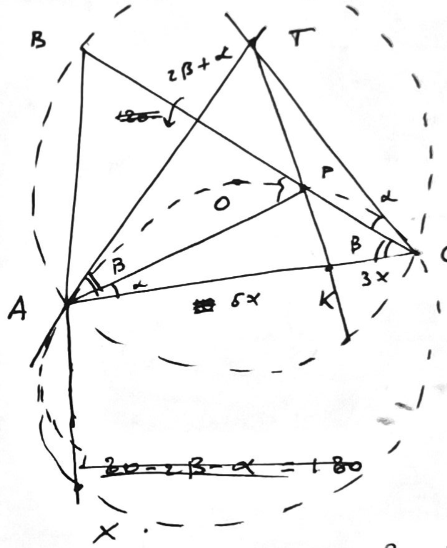
3×15

7×15

a b c

37 37 37





$\frac{x}{2} - 1 = x - \frac{11}{4}$ $\frac{x}{2} = \frac{11}{4} - 1 = \frac{11-4}{4}$

$\frac{x}{2} = \frac{7}{4}$ $x = \frac{7}{2}$

$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2} (\frac{x}{2} - \frac{1}{4})$ $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}} (\frac{x}{2} - 1)$ $\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}} (x - \frac{11}{4})^2$

a^2 b $\sqrt{c}$

$\cancel{3 \cdot 3}$

$3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2$

$+$

$3 \cdot 3 \cdot 2$

$+$

$3 \cdot 3$

$+ 3 \cdot 2 \cdot 3$

$\log_{a^2} b$, $\log_{\sqrt{c}} a$ $\log_b c^2$ $\frac{1}{2} \log_a b$, $2 \log_c a$ $2 \log_b c$

m n p

$m \cdot n \cdot p = 2$

$m = n$, $p = n + 1$ $a, b, c > 0 \neq 1$

$m^2 \cdot (m+1) = 2$

$m^3 + m^2 - 2 = 0$

$m = 1$ $D < 0$

$(m-1)(m^2 + 2m + 2)$

1 1 0 −2

1 1 2 2 0

1) $\begin{cases} a^2 = b \\ \sqrt{c} = a \\ b^2 = c^2 \end{cases}$ $b = a^2$, $b = c^4$, $c = a^2$, $b = c$, $\cancel{c = c^4}$

2) $\begin{cases} a^2 = b \\ \sqrt{c} = a^2 \\ b = c^2 \end{cases}$ $b = a^2$, $c = a^4$, $b = c^2$ $a = c$, $c = c^4$

3) $a^2 = b^2$, $\sqrt{c} = a$, $b = c^2$ $\begin{cases} b = a \\ b = c^2 \\ c = a^2 \end{cases}$ $c = \sqrt{a}$, $\sqrt{a} = a^2$, $a = a^4$

$a(1 - a^3) = 0$

~~Чистовик~~

Задача 4 Черновик Вариант 19

В разложении каждого из трёх чисел на простые множители ~~есть только множители 3~~ ~~и 7 (в каких-то степенях, включая нулевую степень)~~ нет множителей, отличных от 3 и от 7.

т.е. каждое из чисел a, b и c представимо в виде ~~$3^m \cdot 8^a \cdot 7^n$~~, $3^m \cdot 7^n$, где ~~m и n - либо натуральны~~ каждое из чисел m и n либо натуральное, либо ноль.

$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 15$ $36 \cdot 17 \cdot 15 = 36 \cdot 255 = 9180$

m = 1 3

n = 1 3

m = 17 2

n = 15 2

17×15: 85, 17

255×36: 1530, 765, 9180

3	1	1	17
7	1	1	15
	1	1	