Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104692**

ID профиля: **145052**

Вариант 19

Вариант 19.

Чистовик

1

1. Решение:

Пусть a_1 – первый член арифм. прогрессии, а d – её разность.

Т.к. арифм. прогрессия возрастающая состоит из целых чисел и возрастающая, то $a_1 \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N}$ $(d>0$ и $d \in \mathbb{Z})$.

По условию $a_1+\ldots+a_{14} = \frac{a_1+a_{14}}{2}\cdot 14 = 7(a_1+a_1+13d) =$
$= 7(2a_1+13d) = 14a_1+91d = S$

Также по условию $a_9 \cdot a_{17} = (a_1+8d)(a_1+16d) > 14a_1+91d+12$

$a_{11}\cdot a_{15} = (a_1+10d)(a_1+14d) < 14a_1+91d+47$

Имеем же $\begin{cases} a_1^2+24a_1d+128d^2 > 14a_1+91d+12 \\ 14a_1+91d+47 > a_1^2+24a_1d+140d^2 \end{cases}$

Сложим нер-ва: $\cancel{a_1^2}+\cancel{24a_1d}+128d^2+\cancel{14a_1}+\cancel{91d}+47 > \cancel{14a_1}+\cancel{91d}+12+\cancel{a_1^2}+\cancel{24a_1d}+140d^2$

$35 > 12d^2$

$d^2 < \frac{35}{12}$

Т.к. $d \in \mathbb{N}$ и $d^2 < \frac{35}{12}$, то $d=1$

($d=2$ уже не подходит, $4=\frac{48}{12}>\frac{35}{12}$)

Тогда все условия примут вид

- $14a_1+91 = S$
- $a_1^2+24a_1+128 > 14a_1+91+12$
- $a_1^2+24a_1+140 < 14a_1+91+47$

$\Rightarrow$ (1) $a_1^2+10a_1+25 > 0$

(2) $a_1^2+10a_1+2 < 0$

Из (1): $a_1^2+10a_1+25 = (a_1+5)^2 > 0$ – выполняется, когда $a_1 \neq -5$

Из (2): $a_1^2+10a_1+2 < 0 \Rightarrow D = 100-8 = 92 \Rightarrow a_{1,2} = \frac{-10\pm\sqrt{92}}{2} = -5\pm\sqrt{23}$

То есть $a_1 \in (-a_{1_1}; a_{1_2}) \Leftrightarrow a_1 \in (-5-\sqrt{23}; -5+\sqrt{23})$

21104692 (U145052 M1302316)

(продолжение 1.) Чистовик 2

Объединяя полученное и то, что $a_1 \in \mathbb{Z}$, ~~получаем~~ найдём все возможные значения a_1:

$4<\sqrt{23}<5 \Rightarrow a_1 \in [-5-4; 5) \cup (5; -5+4]$

Значит $a_1 = \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Ответ: $a_1 = \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Чистовик (3)

3. Решение:

Перепишем систему: $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2\le 25 & (1)\\ a^2+b^2\le \min(-8a-6b;25) & (2)\end{cases}$

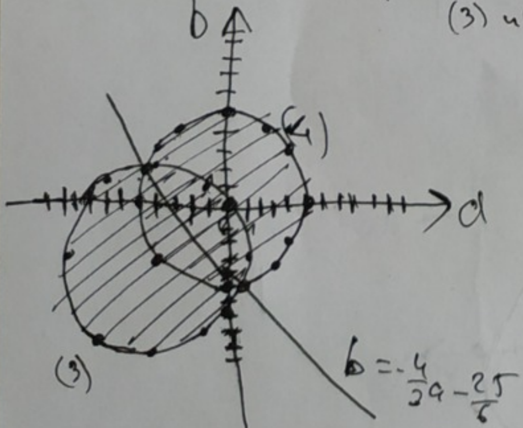
Несложно заметить, что (1) задаёт графики кругов (окр. и всех ~~точек~~ „внутри"), а (2) задаёт возможные расположение центра кругов. ~~Всего таких~~

Рассмотрим 2: $\left[\begin{array}{l} a^2+b^2\le -8a-6b \\ a^2+b^2\le 25\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} a^2+8a+16+b^2+6b+9\le 25 \\ a^2+b^2\le 25\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{ll} (a+4)^2+(b+3)^2\le 5^2 & (3)\\ a^2+b^2\le 5^2 & (4)\end{array}\right.$

Рассмотрим все подходящие $(a;b)$. Для этого начертим графики (3) и (4) в ba-координатах.



Это ~~окружности~~ круги с центрами в $(0;0)$ и $(-4;-3)$ и $R=5$.

Фактически все значения ba находятся внутри этих окружностей.

Рассмотрим, когда $-8a-6b\le 25$, а когда $-8a-6b\ge 25$:

- $8a+6b\ge -25$

  $6b\ge -8a-25$

  $b\ge -\frac{4}{3}a-\frac{25}{6}$

- $8a+6b\le -25 \Rightarrow b\le -\frac{4}{3}a-\frac{25}{6}$

(Нетрудно понять, что $b=-\frac{4}{3}a-\frac{25}{6}$ проходит через точки пересечения этих окр.)

(продолжение 3). Чистовик 4

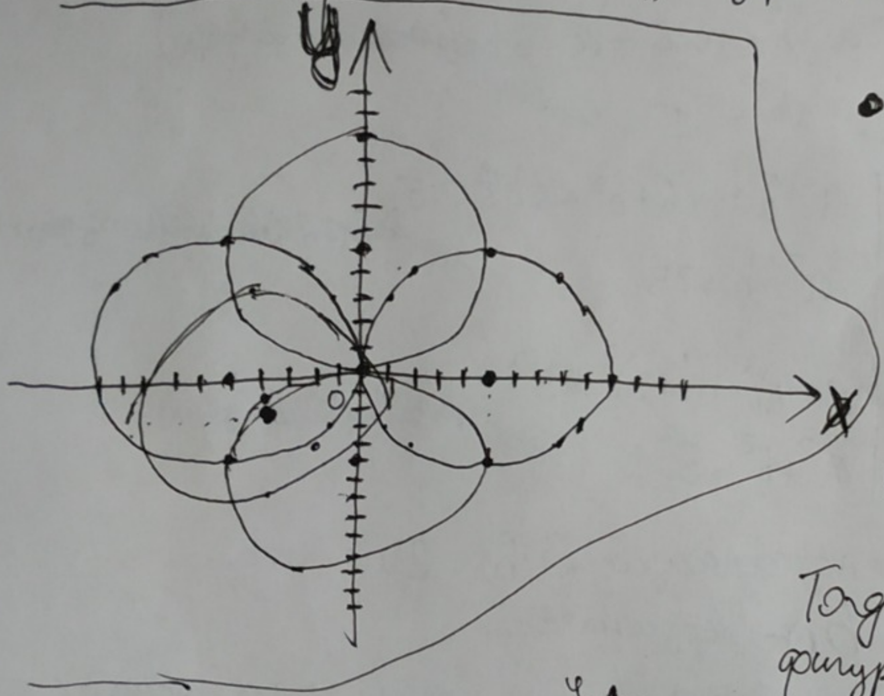
Выходит, что реализуются все значения $(a;b)$ внутри кругов на рисунке (включая сами „окружности", т.к. „$\leq$").

Напишем для удобства „крайние значения" $(a;b)$:

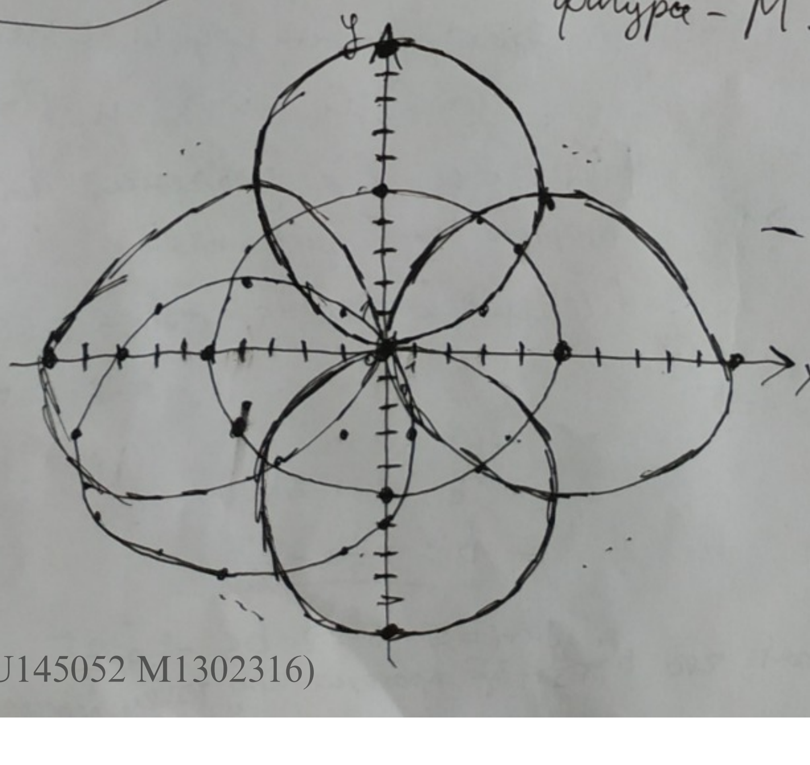
$(5;0)$; $(-5;0)$; $(0;5)$; $(0;-5)$; $(-4;2)$; $(-4;-8)$; $(-9;-3)$; $(1;-3)$

Рассмотрим (1):

Окружности с центрами во всех возможных $(a;b)$ и $R=5$ (со всеми точками „внутри").



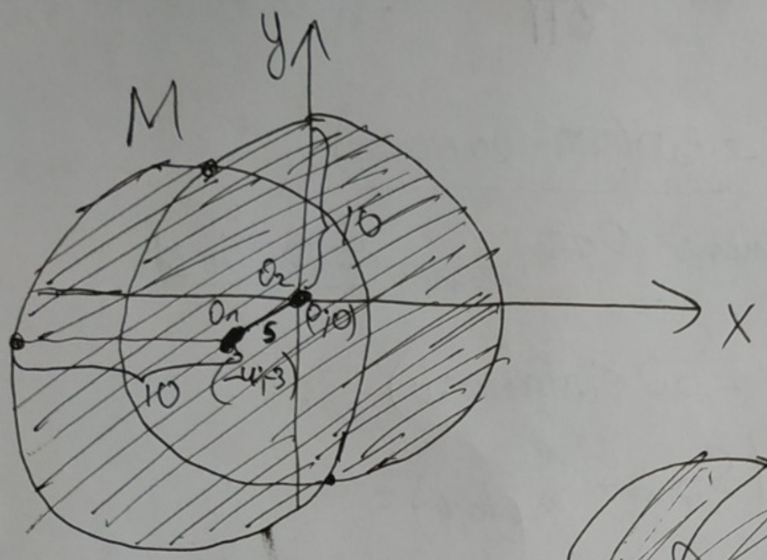
• Построим все возможные круги таким образом: поместим в точки графика $a;b$ центры окружностей радиусом 5. Тогда вся получившаяся фигура – M.



– построение M

Продолжение 3 Чистовик (5)

То есть графиком (1) получается 2 круга, центрами в $(-4;-3)$ и $(0;0)$ и радиусами 10.

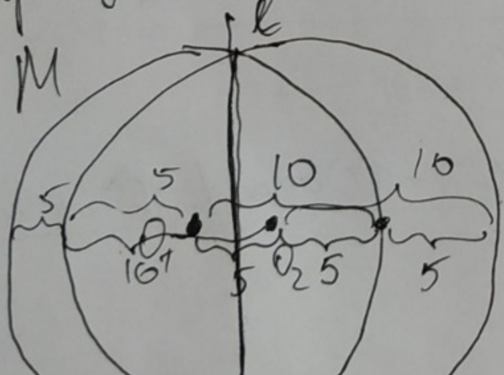


Расстояние между центрами − 5

$\cancel{\sqrt{4^2+3^2}}$

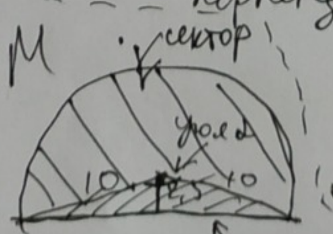
$\sqrt{(4-0)^2+(3-0)^2}=\underline{5}$

Нарисуем M:



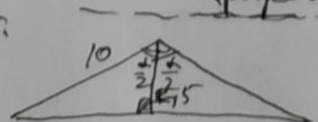
O_1; O_2 − центры кругов

Заметим, что M симметрична отн-но прямой l, проходящей через середину O_1O_2 перпендикулярно отрезку.



Тогда из симметрии площадь M − это 2 площади таких секторов и 2 тр-ков.

Посчитаем угол α:



$\frac{\alpha}{2}=\arccos\frac{1}{4}$

$\underline{\alpha=2\arccos\frac{1}{4}}$

(Продолжение 3) ~~Листовик~~ Чистовик

6

Посчитаем площадь сектора:

$$S_{\text{сектора}} = \pi\cdot(10)^2\cdot\frac{(2\pi-\alpha)}{2\pi} = \frac{100\pi}{2\pi}\cdot\left(2\pi-2\arccos\frac{1}{4}\right) =$$

$$= \underline{50\left(2\pi-2\arccos\frac{1}{4}\right)}$$

$S_{\text{треугольника}}$: ~~10·10~~ $S_{\text{тр-ка}} = \frac{10\cdot10\cdot\sin\alpha}{2} =$

$$= 50\sin\left(\arccos\frac{1}{4}\right)$$

Значит $S_M = 2\left(S_{\text{тр-ка}} + S_{\text{сектора}}\right) =$

$$= 2\left(50\left(2\pi-\arccos\frac{1}{4}\right) + 50\sin\left(\arccos\frac{1}{4}\right)\right) =$$

$$= 2\left(100\pi - 50\arccos\frac{1}{4} + 50\sin\left(\arccos\frac{1}{4}\right)\right) =$$

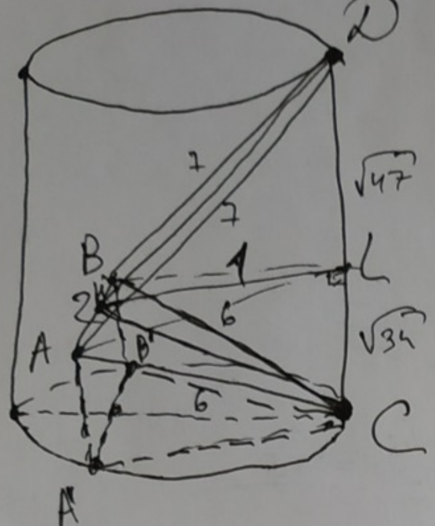
$$= \underline{200\pi - 100\arccos\frac{1}{4} + 100\sin\left(\arccos\frac{1}{4}\right)}$$

Ответ: $200\pi - 100\arccos\frac{1}{4} + 100\sin\left(\arccos\frac{1}{4}\right)$

21104692 (U145052 M1302316)

Чистовик

2.



Дано: тетраэдр $ABCD$

$AB=2$

$AC=BC=6$

$AD=BD=7$

$ABCD$ вписан в цилиндр, все вершины на бок. пов.

R - наименьший

Найти: $CD=?$

Решение:

Заметим, что $AC=BC$, $AD=BD \Rightarrow \triangle ABD$ и $\triangle ABC$ - равнобедренные. Значит существует плоскость, относительно которой $ABCD$ симметричен (найти её можно, например, опустив $DK \perp AB$ и $CK \perp AB \Rightarrow (CKD)$).

Будем для удобства считать, что CD - ~~высота цилиндра~~ образующая, (т.к. по условию C, D лежат на бок. пов. и $CD \parallel$ оси цилиндра)

Спроецируем A и B на нижнюю плоскость $\Rightarrow A'B'$ лежит на окружности.

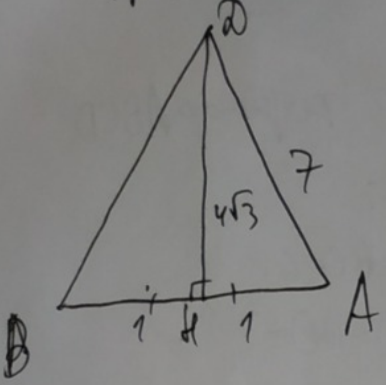
$A'B' = AB = 2$ (т.к. A и B симметричны отн-но DKC; $CD \perp$ нижней плоскости (образующая) $\Rightarrow DKC \perp$ нижн. плоскости) $\Rightarrow$
$\Rightarrow AB \parallel$ нижней плоскости, т.к. $AB \perp (DKC)$.

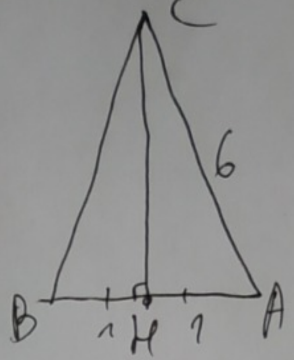
Заметим, что проекции $(\triangle ABD)$ и $(\triangle ABC)$ на нижнюю плоскость совпадают.

~~Посчитаю~~ Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle ABC$:

21104692 (U145052 M1302316)

(продолжение 2) Чистовик





$DH=\sqrt{49-1}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$

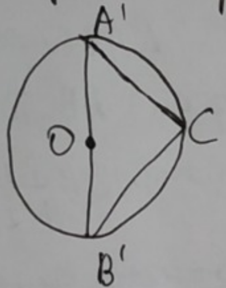
~~CAZ~~

$S_{\triangle ABD}=\frac{4\sqrt{3}\cdot 2}{2}=4\sqrt{3}$

$CH=\sqrt{36-1}=\sqrt{35}$

$S_{\triangle CHA}=\frac{2\cdot\sqrt{35}}{2}=\sqrt{35}$

Рассмотрим, когда радиус наименьший:



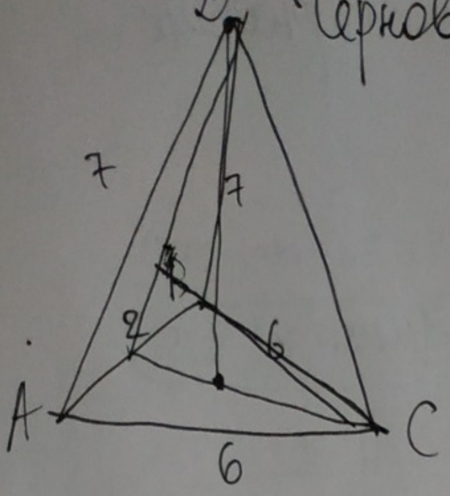
Понятно, что это произойдёт, когда $A'B'$ — диаметр $\Rightarrow AH=1$ — радиус

Опустим $HL\perp CD \Rightarrow HL=1$

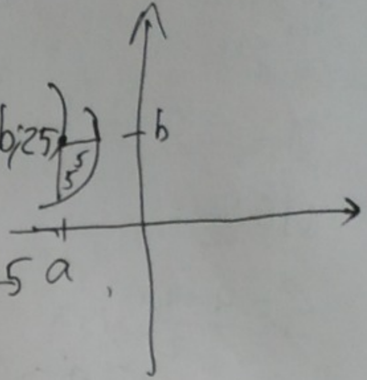
Тогда $CD=DL+CL=\sqrt{48-1}+\sqrt{35-1}=\sqrt{47}+\sqrt{34}$
(из прямоуг. тр-ков)

Ответ: $\sqrt{47}+\sqrt{34}$

Черновик



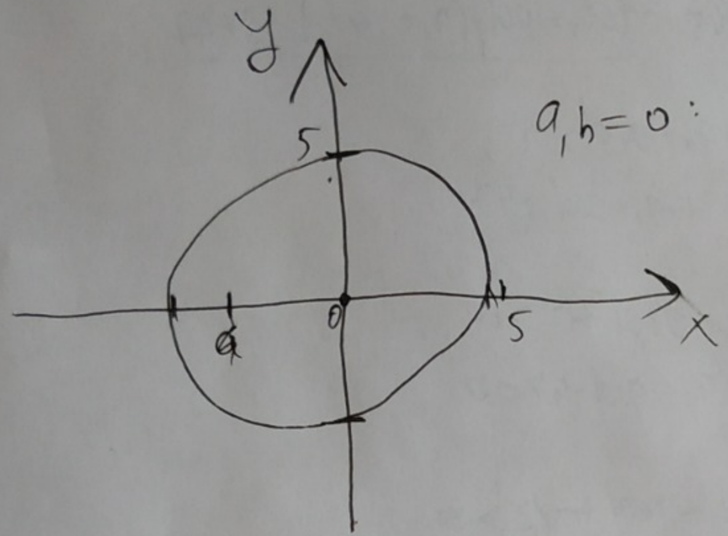
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 25\\ a^2+b^2 \le \min(-8a-6b;25)\end{cases}$$



$-8a-6b=25$ a

$\cancel{2ab \le a^2+b^2}$

$\boxed{25\pi}$



$a, b = 0:$

25π

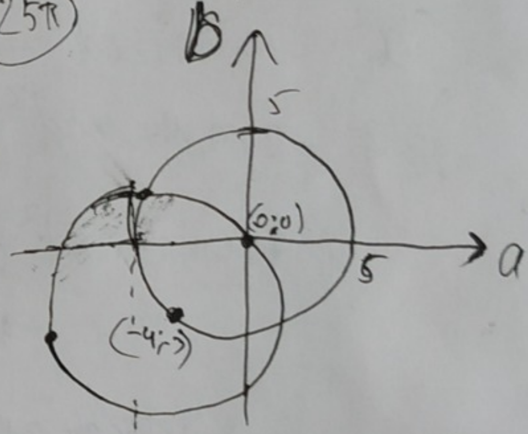
1) $a^2+b^2\le -8a-6b$

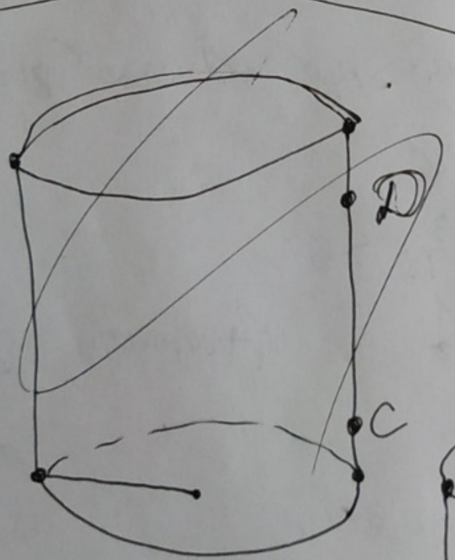
$a^2+8a+b^2+6b\le 0$

$(a^2+8a+16)+(b^2+6b+9)\le 25$

$(a+4)^2+(b+3)^2\le 5^2$

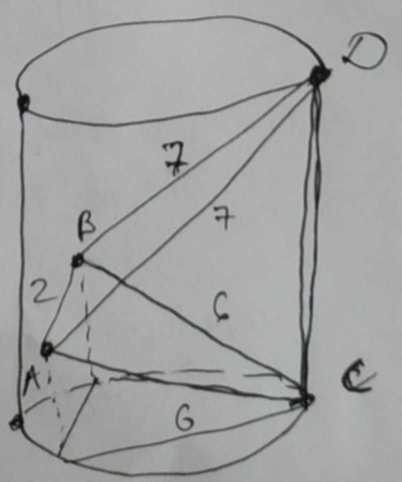
2) $a^2+b^2\le 5^2$





$\frac{4}{3}a=-\frac{25}{6}$

$a=-\frac{25\cdot 3}{6\cdot 4}=-\frac{25}{8}$



~~$k\le14$~~ $\quad$ ~~$a_9a_{17}>S+12$~~ $\quad$ ~~$a_9=a_1+8d$~~ $\quad$ Черновик

~~$d>0$~~ $\quad$ ~~$a_{11}a_{15}<S+47$~~ $\quad$ ~~$a_{17}=a.$~~

~~$a_1\in\mathbb{Z}$~~

~~$d\in\mathbb{Z}$~~

$$a_1+a_2+\ldots+a_{14}=\frac{a_1+a_{14}}{2}\cdot14=7(a_1+a_1+13d)=$$

$$=(2a_1+13d)\cdot7=\boxed{14a_1+91d=S}$$

~~$S=\frac{a_1+a_{14}}{2}\cdot14=7a$~~

$$a_9\cdot a_{17}=\underline{(a_1+8d)(a_1+16d)>S+12}$$

$a_1=?$

$$a_{11}\cdot a_{15}=\underline{(a_1+10d)(a_1+14d)<S+47}$$

$$\begin{cases}a_1^2+8a_1d+16a_1d+128d^2>14a_1+91d+12\\ a_1^2+10a_1d+14a_1d+140d^2<14a_1+91d+47\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+24a_1d+128d^2-14a_1-91d-12>0\\ a_1^2+24a_1d+140d^2-14a_1-91d-47<0\end{cases}$$

$$a_1^2+24a_1d+128d^2-14a_1-91d-12>0$$

$$+\quad 14a_1+91d+47>a_1^2+24a_1d+140d^2$$

$$\cancel{a_1^2}+\cancel{24a_1d}+128d^2+\cancel{14a_1}+\cancel{91d}+47>\cancel{14a_1}+\cancel{91d}+12+\cancel{a_1^2}+\cancel{24a_1d}+140d^2$$

$$35>12d^2$$

$$d^2<\frac{35}{12}=2$$

$$d=\left[\begin{array}{l}1\\ \\ \end{array}\right.\qquad a_1^2+2a_1+1+8a_1+1$$

$\begin{array}{r}147\\ \times\ 51\\ \hline 8\end{array}$

~~$14a_1+91=S$~~

$\begin{array}{r}91\\ +\ 17\\ \hline 108\end{array}$

$$14a_1+103<a_1^2+24a_1+128$$

$$a_1^2+10a_1+25>0$$

$$(a_1+5)^2>0$$

$91+47=138$

$$a_1^2+24a_1+140<94a_1+138$$

$100-$

$$a_1^2+10a_1+2<0$$

$\begin{array}{r|l}92&4\\ -4&23\end{array}$

21104692 (U145052 M1302316)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104692**

ID профиля: **145052**

Вариант 19

Чистовик

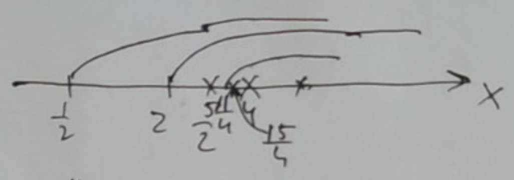
Вариант 19

5. Решение:

Перепишем все логарифмы и найдём ограничения на X:

$$\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right);\ \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right);\ \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2}-1>0 \\ \frac{x}{2}-1\neq 1 \\ \frac{2x-1}{4}>0 \\ \frac{2x-1}{4}\neq 1 \\ x-\frac{11}{4}>0 \\ x-\frac{11}{4}\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x\neq 4 \\ x>\frac{1}{2} \\ x\neq\frac{5}{2} \\ x>\frac{11}{4} \\ x\neq\frac{15}{4} \end{cases}$$



$\frac{11}{4} \vee \frac{5}{2}$ $(11>10)$

$$X\in\left(\frac{11}{4};\frac{15}{4}\right)\cup\left(\frac{15}{4};4\right)\cup\left(4;+\infty\right)$$

Т.к. $\frac{x}{2}-1>0$, то $\left|\frac{x}{2}-1\right|=\frac{x}{2}-1$
$x-\frac{11}{4}>0$, то $\left|x-\frac{11}{4}\right|=x-\frac{11}{4}$

Перемножим все логарифмы (преобразовав их):

$$\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}-1}\left(\frac{x}{2}-\frac{11}{4}\right)\cdot 2\log_{x-\frac{11}{4}}\left(\frac{x}{2}-1\right)\cdot 2\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)=$$

$$=2\ \left(\text{т.к. } \log_a b\cdot\log_b c=\log_a c\right)$$

По условию нужно найти все x, при которых 2 логарифма равны, а третий больше на один. Пусть равные логарифмы $=t$.

Тогда $t\cdot t\cdot(t+1)=2 \Leftrightarrow t^3+t^2-2=0 \Leftrightarrow t^3-t^2+2t^2-2t+2t-2=0$

То есть $t^2(t-1)+2t(t-1)+2(t-1)=0$

Или же $\left[\begin{array}{l} t^2+2t+2=0 \text{ — но } D=4-8<0 \Rightarrow \text{нет решений} \\ t-1=0 \Rightarrow \underline{t=1} \end{array}\right.$

21104692 (U145052 M1302317)

(продолжение 5) Листовик (2)

Значит нужно рассмотреть все случаи, когда какой-то логарифм равен 1:

1) $\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})=1 \Leftrightarrow \left(\frac{x-2}{2}\right)^2=\frac{2x-1}{4}$

$$\frac{x^2-4x+4}{4}=\frac{2x-1}{4}$$

$$x^2-6x+5=0$$

$$D=36-20=16=4^2$$

$$x=\frac{6\pm 4}{2}=\left[\begin{array}{l}1 \times\\ 5 \checkmark\end{array}\right.$$

$1<2 \Rightarrow$

• ~~3-√6~~

$\Rightarrow$ не подходит по ограничениям $(x-\frac{11}{4}>2)$

• 5 - подходит

2) $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}(\frac{x}{2}-1)=1 \Rightarrow \left(\frac{x-2}{2}\right)^2=\frac{4x-11}{4}$

$$\frac{x^2-4x+4}{4}=\frac{4x-11}{4}$$

$$x^2-8x+15=0$$

$$D=64-60=4$$

$$x=\frac{8\pm 2}{2}=\left[\begin{array}{l}5 \checkmark\\ 3 \checkmark\end{array}\right.$$

3) $\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}(x-\frac{11}{4})^2=1 \Rightarrow \frac{2x-1}{4}=\left(\frac{4x-11}{4}\right)^2$

$$8x-4=16x^2-88x+121$$

$$16x^2-96x+125=0 \qquad D=96\cdot 96-125\cdot 16\cdot 4=$$

$$=1216=(8\sqrt{19})^2$$

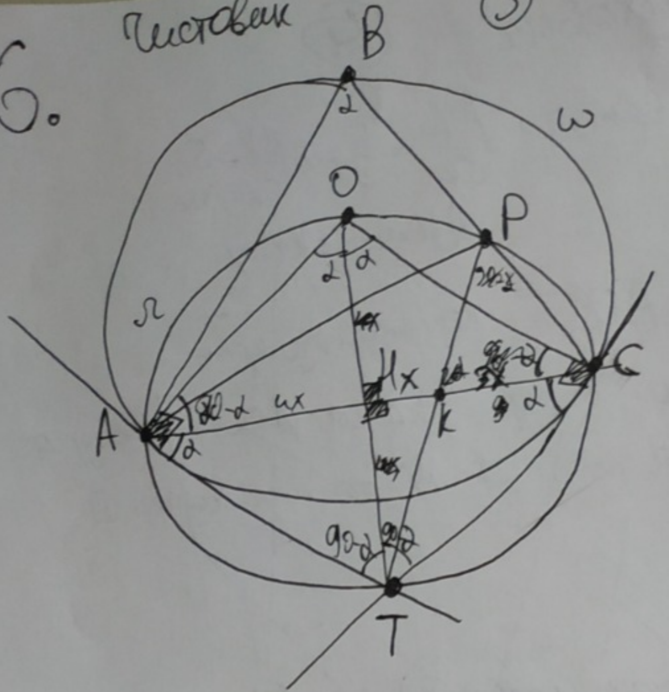
$$x=\frac{96\pm 8\sqrt{19}}{16\cdot 2}=\frac{12\pm\sqrt{19}}{4}=3\pm\frac{\sqrt{19}}{2}$$

Т.к. должны 2 логарифма равняться 1, то подходит только $\underline{5}$

Ответ: 5.

21104692 (U145052 M1302317)

6. Чистовик ③



Дано: $\triangle ABC$ вписан в окр. ω

O – центр ω

$\triangle AOC$ вписан в окр. Ω

$\Omega \cap BC = P$

AT и CT – кас-ные к ω

$S_{\triangle APK} = 10$

$S_{\triangle CPK} = 6$

Найти: а) $S_{AOC} = ?$

б) $AC = ?$

(если $\angle ABC = \operatorname{arctg} 2$)

Решение:

а) Т.к. OA и OC – радиусы ω, AT и CT – касательные, то $AO \perp AT$, $OC \perp CT$.

Пусть $\angle ABC = \alpha \Rightarrow \angle AOC = 2\alpha$ (центральный).

$\angle CAT = \angle ACT = \alpha$, как углы между касательными и хордой AC ($\angle ABC = \alpha$).

$AT = CT$ ($\triangle ACT$ – равноб.).

~~OTA~~ $OT \perp AC$, т.к. TH – высота $\triangle ACT$ ($TH \perp AC$), а ~~HO~~ также H – сер. $AC \Rightarrow HO$ – серединный перпендикуляр $\Rightarrow$

$\Rightarrow OT$ – прямая, проходящая через середину AC (т. H).

Из $\triangle ACT$: $\angle ATC = 180^\circ - 2\alpha$. Заметим, что $\angle AOC + \angle ATC = 180^\circ + 2\alpha - 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow AOCT$ вписан в Ω. Также $\angle OCT = 90^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow OT$ – диаметр Ω.

$\angle OCH = \angle TCO - \angle HCO = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle OHC = \alpha = \angle AOT$.

Пусть $AC = 8x$. Получили $\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ ~~(т.к. высоту~~

21104692 (U145052 M1302317)

(продолжение б)   Чистовик   4

Т.к. высоты у них равны, то $\frac{AK}{CK}=\frac{5}{3} \Rightarrow AK=5x$, $CK=3x$

$AK=4x \Rightarrow HK=x$

~~Заметим, что у AOCT перпендикулярны диагонали, а также он вписан в окр. Значит AOCT квадрат. (Т.к. ромбом с разными углами он не может быть) $\Rightarrow$ OT AC - тоже диаметр Ω.~~

~~Значит $OH=HT=4x$.~~

~~Из $\triangle OHC$ $\alpha=45^\circ$ (прямоуг. и равнобед.) $\Rightarrow \angle ABC=45^\circ$.~~

Заметим что AOCT - дельтоид (симметричен отн-но OT)

$S_{APK}=10$

$S_{CPK}=6$

$\Rightarrow S_{APC}=16$.

б)

$\angle A=\operatorname{arctg} 2 \Rightarrow 4x=OH\cdot \cancel{tg}\,2=2OK \Rightarrow OK=2x$

Чистовик

~~4~~ 4. Решение:

$\begin{cases} НОД(a;b;c)=21=3\cdot7 \\ НОК(a;b;c)=3^{17}\cdot7^{15} \end{cases}$ ~~Заметим, что НОД(a;b;c)~~
~~$\cdot$НОК$(a;b;c)=a\cdot b\cdot c=3^{18}\cdot7^{16}$.~~

НОД - наибольший общий делитель, значит наименьшее из a;b;c не больше 21 (и не меньше)
НОК - наименьшее общее кратное, значит наибольшее из a;b;c не больше $3^{17}\cdot7^{15}$ (и не меньше).
(Т.к. если будет больше, то НОК не будет равняться этому числу, также как и меньше).
Т.к. все из чисел a;b;c ~~$\vdots(3^k\cdot7^n)$~~ являются делителями НОД, то они состоят только из 3 и 7.
Значит наименьшее из a;b;c - $21=3\cdot7$
наибольшее - $3^{17}\cdot7^{15}$
а оставшееся принимает любое значение из $[21;3^{17}\cdot7^{15}]$, и притом состоит только из 3 и 7 в их степенях.
~~То есть~~ Пусть a - наим. ($=21=3\cdot7$)
b - наибольшее ($=3^{17}\cdot7^{15}$)
Значит $c=3^n\cdot7^k$,
(посчитаем когда $n,k\neq1$) — причём $n\in[2;17]$
$k\in[2;15]$
То есть значения c (при таких a и b)
в количестве $16\cdot14=224$.
Поменяв a;b;c местами, получаем что троек (a;b;c) =
$=224\cdot3!=224\cdot6=$ ~~$450\cdot3=1350$~~. ~~Коль~~

(Продолжение 4). Чистовик ⑥

То есть при $n \neq k \neq 1$ есть 1344. Посчитаем, когда один из них равен 1: $3\cdot 7^k,\ k\in[2;15] \Rightarrow 14$; $3^n\cdot 7,\ n\in[2;17] \Rightarrow 16$ $\Big\}\ 30$

Значит прибавим $+30\cdot 3! = 180$ (для каждого из возможных a или b или c)

Рассмотрим когда оба равны 1: Тогда возможны такие повторения:

НОД = min
НОК = max

$\cdot 2 \Downarrow 12$
$\begin{cases} min; max; max \\ max; max; min \\ min; min; max \\ min; max; min \\ max; min; max \\ max; min; min \end{cases}$

НОД; НОД; НОК
НОК; НОД; НОК
НОД; НОК; НОД
НОД; НОД; НОК
НОД; НОК; 1

A_3^2 ~~= 2 = 3~~

a; b или c и a или b или c равны НОД и НОК соответственно $\Rightarrow$ ~~каждый~~ остается или НОК или НОД. всего таких вариантов $3\cdot 2\cdot 2 = 12$

для каждой буквы; поменяв местами НОД и НОК; НОД или НОК

Посчитаем все случаи, объединив и сложив:
$1344+180+12 = \underline{1536}$

Ответ: $\underline{1536}$

Черновик

Черновик

$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 3\cdot 7 \\ НОК(a;b;c) = 3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$

$a\cdot b\cdot c = 3^{18}\cdot 7^{16}$

a, b и c состоят только из $3^n\cdot 7^m$

$a = 3^{a_1}\cdot 7^{a_2}$

$b = 3^{b_1}\cdot 7^{b_2}$

$c = 3^{c_1}\cdot 7^{c_2}$

$a_1+b_1+c_1=18$

$a_2+b_2+c_2=16$

Пусть $a_1=1$

$a_2=1$

Тогда $b_1+c_1=17$

$b_2+c_2=15$

$b_1>1$

$b_2>1$

$c_1>1$

$c_2>1$

2 и 15
3 и 14
4 и 13
5 и 12
6 и 11
7 и 10
8 и 9

7

2 и 13
3 и 12
4 и 11
5 и 10
6 и 9
7 и 8

6

42

НОД $(a;b;c) = 3\cdot 7$

НОК $(a;b;c) = 3^{17}\cdot 7^{15}$ $a\cdot b\cdot c = НОК(a;b;c)\cdot НОД(a;b;c) = 3^{18}\cdot 7^{16}$

~~Пусть a = 7·3~~

Пусть $a = 3^{a_1}\cdot 7^{a_2}$

$b = 3^{b_1}\cdot 7^{b_2}$

$c = 3^{c_1}\cdot 7^{c_2}$

1) $a = 3\cdot 7$: $b = 3^{b_1}\cdot 7^{b_2}$

~~a·b·c~~

$c = 3^{c_1}\cdot 7^{c_2}$

2) $a<3$

$3^{b_1+c_1}\cdot 7^{c_2+b_2} = 3^{17}\cdot 7^{15}$

$b_1+c_1=17$

$c_2+b_2=15$

1+16
2+15
3+14
4+13
5+12
6+11
7+10
8+9

1+14
2+13
3+12
4+11
5+10
6+9
7+8

$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$; $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$; $\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$

ОДЗ

$\frac{x}{2}-1>0$ $x\neq 4$

$x>2$ $x>\frac{11}{4}$

$x\neq\frac{15}{4}$

$\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot 2\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)\cdot 2\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right) =$

$=2$

21104692 (U145052 M1302317)

1) $\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}-1}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=\log_{x-\frac{11}{4}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$ 16

$\log_{\frac{1}{4}}\frac{5}{4}$ $2=t\cdot t\cdot(t+1)=t^3+t^2-2=0$

$t^3-t^2+2t^2-2t+2t-2=0$

$t^2(t-1)+2t(t-1)+2(t-1)=0$

~~8x~~ ~~2x~~ $\boxed{t=1}$

96 | 8
-80 | 12
16

$\frac{2x-1}{4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}(16x^2-88x+121)$

$\frac{2x-1}{4}=\left(\frac{4x-11}{4}\right)^2$ $\frac{3}{2}-\frac{1}{4}=$ $8x-4=16x^2-88x+121$

$4(2x-1)=16x^2-88x+121$

$8x-4$

$16x^2-96x+125=0$

96
×96
576
+864
9216

$16(x^2-6x+9)$

$\frac{4x-11}{4}\cdot\frac{4x-11}{4}=\frac{2x-1}{4}$

$125\cdot 64=500\cdot 16=1000\cdot 8$

$16\cdot 7=70+42=112$

125
×64

125
×64
500
+750
8000

1216 | 16
-112 | 76
96

76

$8x-4=16x^2-88x+121$

$16x^2-96x+125$

96
×9

96
×96
576
+864
9216

9216 | 96
-864
576

1216 | 64
-64 | 19
576

$64\cdot 9=$

1216 | 4
4

21104692 (U145052 M1302317)

(Продолжение 5) ~~Чистовик~~ (2) Черновик

~~Значит нужно рассмотреть все случаи, когда один из логарифмов равен 1:~~

1) $\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}-1}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=1 \Rightarrow \frac{x-2}{2}=\left(\frac{2x-1}{4}\right)^2$

$\frac{x-2}{2}=\frac{4x^2-4x+1}{16} \quad |\cdot 16$

$8x-16=4x^2-4x+1$

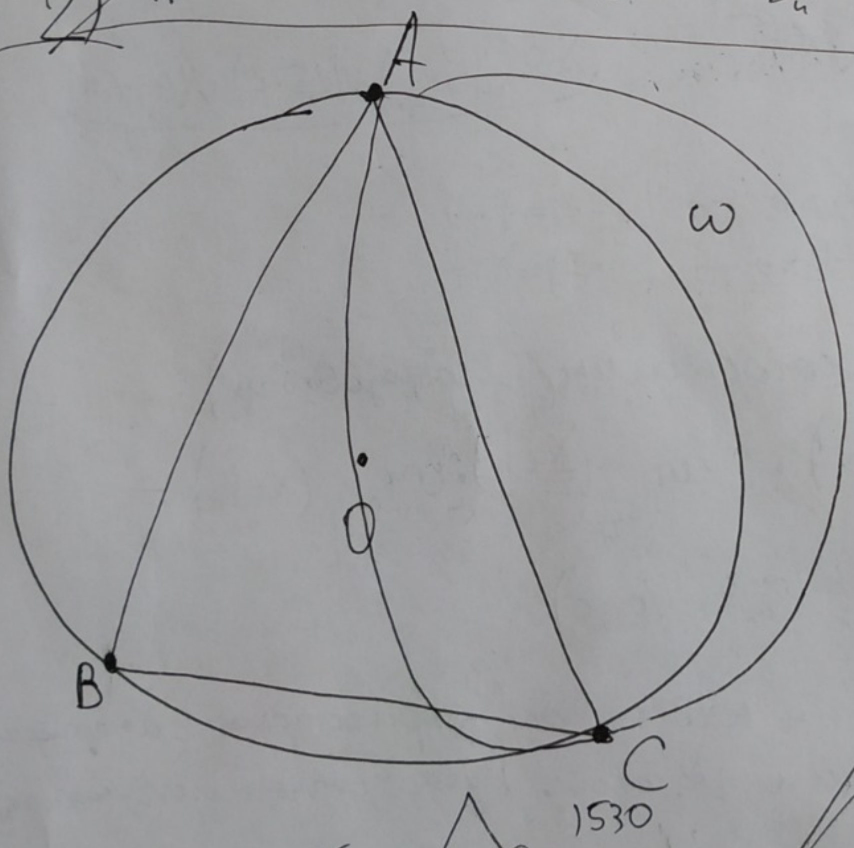
$4x^2-12x+17=0$

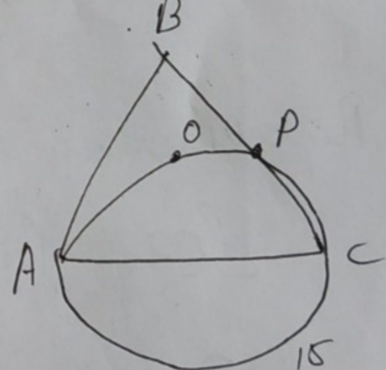
$D=144-17\cdot4\cdot4=12\cdot12-17\cdot16<0$ — нет реш.

$\log_{\frac14}\frac{1}{4}\cdot 5 = 1+\log_{\frac14}5$

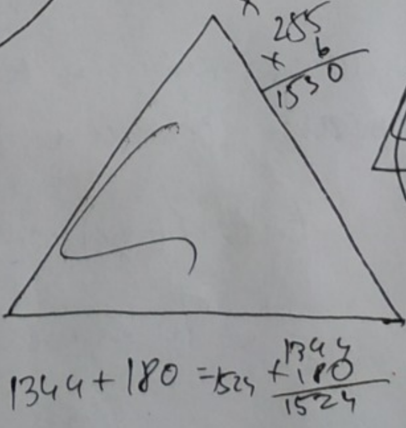
$\log_{\frac12}\frac{1}{2}=1$

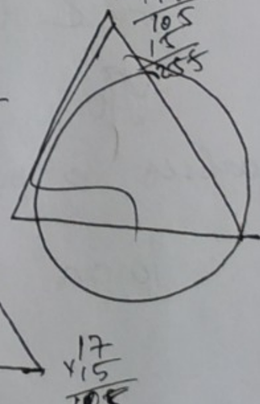
2) 1

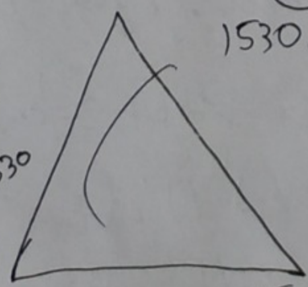




1530







$17\cdot15=255$

$255\cdot6=$

$=250\cdot6+30=1530$

$15\times17=105+15=255$

$255\times6=1530$

$1344+180=1524$

$1344+180=1524$

$17\times15=105+17=275$

$275\times6=1650$

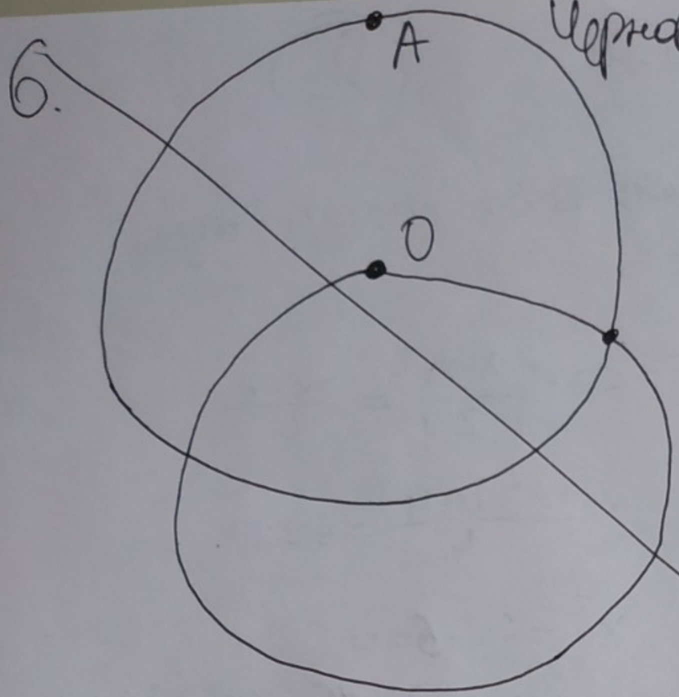
$1550-1524=26$

$1344+183=1539$

255

21104692 (U145032 M1302317)

6.



Черновик

Дано: $\triangle ABC$ вписан в окр. ω

O - центр ω

$\triangle AOC$ вписан в окр. Ω

$\Omega \cap BC = P$

l_1, l_2 - касательные к ω через A и C

$l_1 \cap l_2 = T$

$TP \cap AC = K$

$S_{\triangle APK} = 10$

$S_{\triangle CPK} = 6$

Найти: а) S_{ABC}

б) $AC = ?$

(если $\angle ABC = \operatorname{arctg} 2$)

Решение:

~~6~~ 2

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times\, 14 \\ \hline 64 \\ 16 \\ \hline 224 \end{array}$$

$$\cancel{\begin{array}{r} 17 \\ \times\, 15 \\ \hline 85 \\ 17 \\ \hline 225 \end{array}}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\, 17 \\ \hline 105 \\ 15 \\ \hline 255 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 224 & 14 \\ \cline{2-2} -14 & 16 \\ \cline{1-1} 84 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 255 & 15 \\ \cline{2-2} -15 & 17 \\ \cline{1-1} 105 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 224 \\ \times\quad 6 \\ \hline 1344 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 225 \\ \times\quad 6 \\ \hline 1350 \end{array}$$

(продолжение 4) ~~Чистовик~~ Черновик

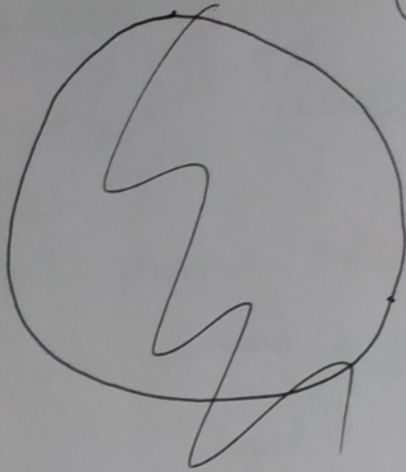
Но мы учли повторяющиеся (a; b; c) (с некоторыми из них), а именно когда: для —

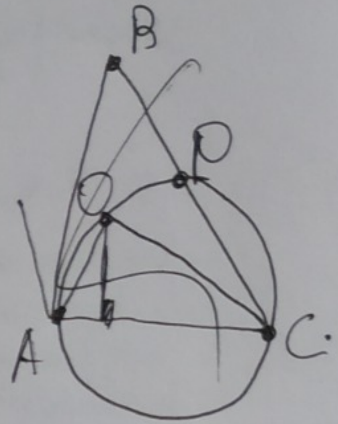
$$\left\{\begin{matrix} min; min; max \\ min; max; min \\ max; min; max \\ max; max; min \end{matrix}\right\} \text{ 4 случая}$$

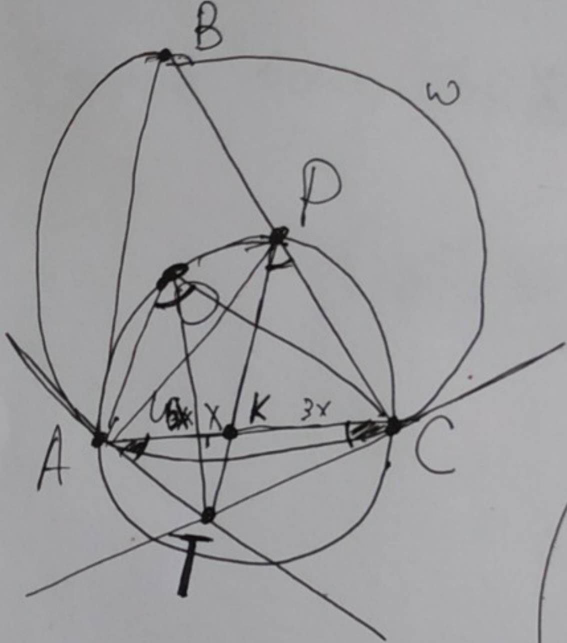
Значит всего 1350 − 12 = 1338

Ответ: 1338

Черновик



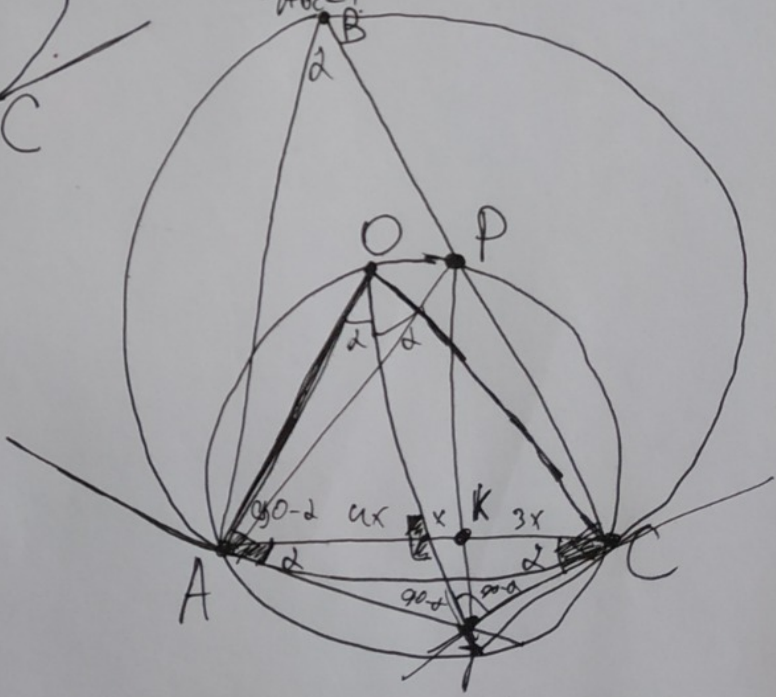




$S_{APK} = 10$

$S_{CPK} = 6$

$S_{ABC} = ?$



OT-диаметр