Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104562**

ID профиля: **342566**

Вариант 19

1. $a_{13} = a_1 + 12d$

$$S = \frac{(a_{13} - 12d + a_{13} + d)\cdot 14}{2} = 14a_{13} - 77d$$

$$a_9 a_{17} = (a_{13} - 4d)(a_{13} + 4d) = a_{13}^2 - 16d^2$$

$$a_{11} a_{15} = (a_{13} - 2d)(a_{13} + 2d) = a_{13}^2 - 4d^2$$

$$\begin{cases} a_{13}^2 - 16d^2 > 14a_{13} - 77d + 12 \\ a_{13}^2 - 4d^2 < 14a_{13} - 77d + 47 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{13}^2 - 14a_{13} + 77d > 16d^2 + 12 \\ a_{13}^2 - 14a_{13} + 77d < 4d^2 + 47 \end{cases}$$

$$16d^2 + 12 < \cancel{1}4d^2 + 47$$

$$12d^2 < 35$$

$d^2 < \frac{35}{12} < 3 < 4 = 2^2$, значит $|d| \leq 1$, $|d| = 1$, $d = 1$

(т.к. $d > 0$ и $d \in \mathbb{Z}$).

Тогда

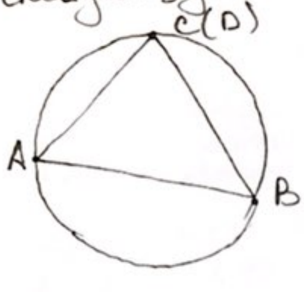
$$\begin{cases} a_{13}^2 - 14a_{13} + 49 > 0 \\ a_{13}^2 - 14a_{13} + 26 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{13} \neq 7 \\ 7 - \sqrt{23} < a_{13} < 7 + \sqrt{23} \end{cases}$$

$a_{13} \in \{3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11\}$, тогда

$a_1 \in \{-9, -8, -7, -6, -4, -3, -2, -1\}$.

Ответ: $a_1 \in \{-9, -8, -7, -6, -4, -3, -2, -1\}$.

2. Спроецируем вписанный в цилиндр тетраэдр на плоскость основания цилиндра параллельно его оси. Получим следующую картинку:



Докажем, что отрезок AB спроецируется в полную величину. Заметим, что т.к. $\triangle ABD$ и $\triangle ABC$ равнобедренные, то высоты DK и CL в них будут и медианами, тогда $K = L = H$. $DH \perp AB$, $CH \perp AB$, значит $(DCH) \perp AB$, $CD \in (DCH)$, значит $AB \perp CD$, CD перпендикулярен плоскости основания цилиндра, значит AB параллелен ей, значит AB спроецируется в полную величину. Заметим, что диаметр цилиндра не может быть меньше длины проекции отрезка AB, значит минимальный радиус цилиндра $\frac{AB}{2} = 1$. Тогда $AC = CB = \sqrt{2}$ (на проекции $\triangle ACB$ будет равнобедренным, т.к. $AB \parallel$ (пл-ть основания)). Т.к. $\triangle ADC = \triangle BDC$, то если ~~$BK \perp$~~ $BM \perp CD$, то $AM \perp CD$, тогда $AM = BM = \sqrt{2}$.

Тогда если $DM = x$, а $CM = y$, то

$$\begin{cases} x^2 + 2 = 49 \\ y^2 + 2 = 36 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 47 \\ y^2 = 34 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm\sqrt{47} \\ y = \pm\sqrt{34} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \sqrt{47} \\ y = \sqrt{34} \end{cases}$$

Заметим, что M может лежать на отрезке CD, а может и не лежать. Поэтому получается два ответа: соответственно $\sqrt{47} + \sqrt{34}$ и $\sqrt{47} - \sqrt{34}$.

Ответ: $\sqrt{47} \pm \sqrt{34}$.

3. $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 25\\ a^2+b^2\le \min(-8a-6b,\,25)\end{cases}$

Первое ~~уравнение~~ неравенство задает условие принадлежности точки (x,y) фигуре M: если (x,y) лежит внутри круга радиуса 5 для какой-либо пары a, b, то $(x,y)\in M$.

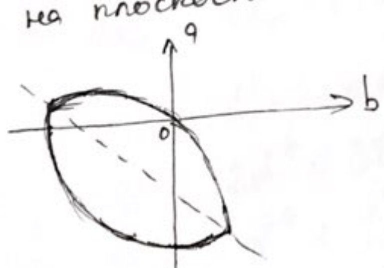
Второе ~~уравнение~~ неравенство задает все пары a, b.

Перепишем второе ~~уравнение~~ неравенство в виде системы:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-8a-6b\le 25\\ a^2+b^2\le -8a-6b\end{cases}\\ \begin{cases}-8a-6b>25\\ a^2+b^2\le 25\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}8a+6b\ge -25\\ (a+4)^2+(b+3)^2\le 25\end{cases}\\ \begin{cases}8a+6b<-25\\ a^2+b^2\le 25\end{cases}\end{array}\right.$$

То есть ~~соотн~~ отношение порядка между 25 и $-8a-6b$ меняет лишь центр окружности. Заметим, что прямая, соединяющая центры окружностей, перпендикулярна прямой, задаваемой уравнением $8a+6b=-25$. Более того, центр каждой окружности ~~центры окружностей лежат на~~ лежит на другой, а прямая $8a+6b+25=0$ делит отрезок, соединяющий центры, точкой пересечения пополам.

То есть неравенство $a^2+b^2\le\min(-8a-6b,\,25)$ задает на плоскости aOb следующую фигуру:



Тогда фигура M будет иметь следующий вид (без координатных осей):

На картинке изображена также ~~же~~ фигура с ~~вол~~ плоскости aOb, а фигура M — та же самая, но с расширенными на 5 границами. Тогда получим два сектора $(R=5,\ \alpha=60^\circ)$ и два сектора $(R=10,\ \alpha=120^\circ)$, пересекающиеся по ромбу со сторонами 5 и диагоналями 5 и $5\sqrt3$.

Тогда $S(M)=2\cdot\frac16\pi\cdot25+2\cdot\frac13\pi\cdot100-\frac12\cdot5\cdot5\sqrt3$.

Ответ: $S(M)=\dfrac{225\pi}{3}-\dfrac{25\sqrt3}{2}$.

Математика, 11 кл. Черновик. (1)

1. $a_1, a_2, a_3 \ldots$ – ~~те~~ арифметическая прогрессия целых чисел

S – сумма первых 14 членов.

$$S = \frac{(a_1 + a_1 + 13d)\cdot 14}{2} = 14a_1 + 91d$$

$a_9 a_{17} > S + 12$

$a_{11} a_{15} < S + 47$

$(a_{13} - 2d)(a_{13} + 2d) = a_{11}a_{15} = a_{13}^2 - 4d^2$

$a_9 a_{17} = (a_{13} - 4d)(a_{13} + 4d) = a_{13}^2 - 16d^2$

$$S = \frac{(a_{13} - 12d + a_{13} + d)\cdot 14}{2} = 14a_{13} - 77d$$

$$\begin{cases} a_{13}^2 - 16d^2 > 14a_{13} - 77d + 12 \\ a_{13}^2 - 4d^2 < 14a_{13} - 77d + 47 \end{cases}$$

1) $a_{13}^2 - 14a_{13} + 49 > 16d^2 - 77d + 61$

$\cancel{(a_{13} + 7)^2 > 16d^2 - 77d + 61}$

$a_{13}^2 - 14a_{13} - 16d^2 + 77d - 12 > 0$

$a_{13}^2 - 14a_{13} - 4d^2 + 77d - 47 < 0$

2) $a_{13}^2 - 14a_{13} - 4d^2 + 77d < 4d^2 + 47$

$16d^2 + 12 < a_{13}^2 - 14a_{13} + 77d < 4d^2 + 47$

$16d^2 + 12 < 4d^2 + 47$

$12d^2 < 35$

$d^2 < \frac{35}{12} < 3$

$d = \pm 1$

а) Если $d = 1$, то $a_{13}^2 - 16 > 14a_{13} - 77 + 12$

$a_{13}^2 - 14a_{13} + 49 > 0$

$(a_{13} - 7)^2 > 0$

$a_{13} \neq 7$

$a_1 \neq -5$

$a_{13} = a_1 + 12d$

$a_1 = a_{13} - 12d$

$a_{13}^2 - 4 < 14a_{13} - 77 + 47$

$a_{13}^2 - 14a_{13} + 26 < 0$

$D = 196 - 104 = 92$

$\frac{14 \pm \sqrt{92}}{2} = 7 \pm \sqrt{23}$

$7 - \sqrt{23} < a_{13} < 7 + \sqrt{23}$

$3 \leq a_{13} \leq 11$; ~~$-11 \leq a_1$~~ $-9 \leq a_1 \leq -1$

~~$a_1 \in [-9; -5) \cup$~~

$a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2;$

77×51 128

128×49 177

$7 + 13 = 20$

$7 - 13 = -6$ и и

$7 \pm \sqrt{177}$

$(7 - \sqrt{177}; 7 - \sqrt{154}) \cup (7 + \sqrt{154}; 7 + \sqrt{177})$.

$a_{13}^2 - 4 < 14a_{13} + 77 + 47$

$a_{13}^2 - 14a_{13} - 128 < 0$

$D = 4\cdot 49 + 4 \cdot 128 = 4(177)$

$7 \pm \sqrt{154}$

Если $d = -1$, то

$a_{13}^2 - 16 > 14a_{13} + 77 + 12$

$a_{13}^2 - 14a_{13} - 105 > 0$

$a_{13}^2 - 14a_{13} + 420 =$

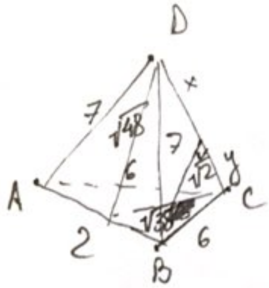
$D = 196 + 420 = 616$

$616 : 4 = 154$

$24 \times 24 = 576$

$\sqrt{616} = 24{,}\ldots$

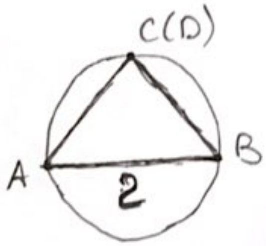
2. $AB = 2, \quad AC = CB = 6, \quad AD = DB = 7$ (CD – любая длина).

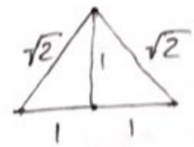


$\cancel{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$

$\sqrt{48} + \sqrt{35}$

$CD \in (0; \sqrt{48} + \sqrt{35})$.





$$\begin{cases} x^2 + 2 = 49 \\ y^2 + 2 = 36 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 47 \\ y^2 = 34 \end{cases}$$

$x = \pm\sqrt{47}$

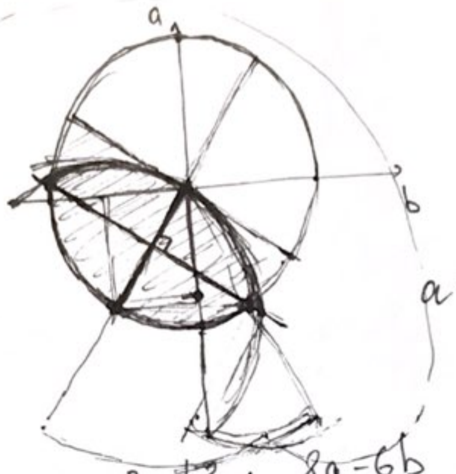
$y = \pm\sqrt{34}$

$\boxed{\sqrt{47} \pm \sqrt{34}}$

Ответ!

Математика, 11 кл. Черновик. ③

3. $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leq 25 \\ a^2+b^2\leq \min(-8a-6b, 25)\end{cases}$ – окружность с центром в $(a;b)$, $R=5$



$-8a-6b\leq 25$

$8a\geq 25-6b$

$a\geq \frac{25}{8}-\frac{3}{4}b$

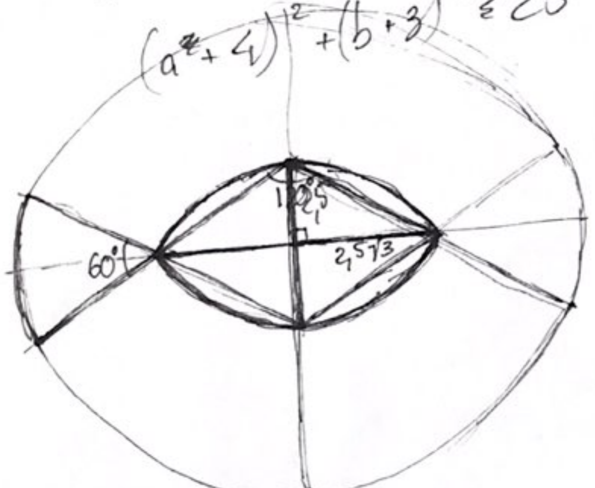
$a=0$ $\frac{3}{4}b=\frac{25}{8}$

$b=\frac{100}{24}$

$a^2+b^2\leq -8a-6b$

$a^2+8a+16+b^2+6b+9\leq 25$

$(a^{\cancel{2}}+4)^2+(b+3)^2\leq 25$



$-8a-6b=25$

~~8a~~

$8a+6b=-25$

~~$3a+4b=0$~~

$a=\frac{4}{3}b$

$3a=4b$

$a=\frac{4}{3}b$

$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\sqrt{3}=\frac{25\sqrt{3}}{2}$

$2\cdot\frac{1}{6}\pi\cdot 25+2\cdot\frac{1}{3}\pi\cdot 100=$

$=\frac{1}{3}\pi\cdot 25+\frac{1}{3}\pi\cdot 200=$

$=\frac{225\pi}{3}$

$8\cdot\frac{4}{3}b+6b+25=0$

$32b+18b=-75$

$b=-\frac{75}{50}=-\frac{3}{2}$

$-2;-\frac{3}{2}$

$4+\frac{9}{4}=\frac{25}{4}, \frac{5}{2}$

Ответ: $\boxed{S(M)=\frac{225\pi}{3}-\frac{25\sqrt{3}}{2}}$ $a=-2$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104562**

ID профиля: **342566**

Вариант 19

4. $\begin{cases} \text{НОД}(a; b; c) = 21 \\ \text{НОК}(a; b; c) = 3^{17} \cdot 7^{15} \end{cases}$

$a = 3^{d} \cdot 7^{e}$, $b = 3^{f} \cdot 7^{g}$, $c = 3^{h} \cdot 7^{i}$

$\begin{cases} \min(d, f, h) = 1 \\ \min(e, g, i) = 1 \\ \max(d, f, h) = 17 \\ \max(e, g, i) = 15 \end{cases}$

Тогда из чисел d, f и h одно равно 1, одно равно 17, одно принадлежит от 1 до 17 включительно. Аналогично для e, g и i. Тогда количество комбинаций d, f и h равно $3 \cdot 2 \cdot 17$, а для e, g и i — $3 \cdot 2 \cdot 15$. Но комбинации вида (x, x, y) учитываются дважды. Поэтому мы вычтем для каждого из наборов $3 \cdot 2$ (2 потому что одинаковыми может быть либо 1, либо 15 или 17; 3 т.к. возможны три расположения: (x, x, y), (x, y, x) и (y, x, x)); получим итоговый ответ:

$(3 \cdot 2)^2 \cdot 16 \cdot 14 = 8064.$

Ответ: 8064.

5. $\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}-1}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$

$\cancel{\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = 2\log_{x-\frac{11}{4}}\left(\frac{x}{2}\right.}$

$\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right) = 2\log_{x-\frac{11}{4}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$

$\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2 = 2\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)$

Заметим, что произведение этих чисел равно 2.
Тогда, если два из них равны по k, а третье — $k+1$, то

$k^2(k+1)=2$
$k^3+k^2-2=0$
$(k-1)(k^2+2k+2)=0$
$k=1$ (других решений нет, т.к. $4-8<0$)

Значит два из этих чисел равны по 1, а третье — 2.

$\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}-1}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=1$	$2\log_{x-\frac{11}{4}}\left(\frac{x}{2}-1\right)=1$	$2\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)=1$
$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\frac{x^2}{4}-x+1$	$\frac{x^2}{4}-x+1=x-\frac{11}{4}$	$x^2-\frac{11}{2}x+\frac{121}{4}=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$
$\frac{x^2}{4}-\frac{3x}{2}+\frac{5}{4}=0 \mid 4$	$\frac{x^2}{4}-2x+\frac{15}{4}=0 \mid 4$	$x^2-6x+\frac{61}{2}=0$
$x^2-6x+5=0$	$x^2-8x+15=0$	$D=36-122<0$
$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right.$	$\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=5 \end{array}\right.$	решений нет

Значит единственное подходящее решение $x=5$.

Проверка:
$\log_{(\frac{5}{2}-1)^2}\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{4}\right)=\log_{(\frac{3}{2})^2}\left(\frac{9}{4}\right)=1$; $\log_{\sqrt{5-\frac{11}{4}}}\left(\frac{5}{2}-1\right)=\log_{\sqrt{\frac{9}{4}}}\left(\frac{3}{2}\right)=1$;

$\log_{(\frac{5}{2}-\frac{1}{4})}\left(5-\frac{11}{4}\right)^2=\log_{(\frac{9}{4})}\left(\frac{9}{4}\right)^2=2$. $x=5$ подходит.

Ответ: $x=5$.

6. а) $OC = OA$ (радиусы), $CT = TA$ (отрезки касательных), значит $OT \perp AC$, значит $\angle COT = \angle AOT$. $\angle COT = \angle CPT$ (опираются на одну дугу), $\angle APT = \angle AOT$ (аналогично). $\angle APT = \angle CPT = \frac{\angle AOC}{2}$.
Выше использовалось утверждение, что T лежит на окружности, проходящей через O, C и A. По св-ву касательной $\angle OCT = \angle OAT = 90°$, поэтому это утверждение верно.
Заметим, что $\angle CBA$ – вписанный, а $\angle COA$ – центральный, они опираются на одну и ту же дугу. Значит $\angle CBA = \frac{\angle AOC}{2} = \angle APT$. Тогда $\triangle APK \sim \triangle ABC$ ($\angle APK = \angle ABC$, $\angle BAC$ – общий).
Заметим, что т.к. $\triangle APK$ и $\triangle CPK$ имеют общую высоту, то $\frac{AK}{KC} = \frac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle CPK}} = \frac{5}{3}$, значит $\frac{AC}{AK} = \frac{8}{5}$, значит $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle APK}} = \left(\frac{8}{5}\right)^2$,

$S_{\triangle ABC} = \frac{64}{25} \cdot 10 = 25,6$.

б) $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\alpha$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin\alpha$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt5}$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt5}$; заметим, что $\angle PBC = \angle BCP$, $BP = PC$, тогда

$S_{\triangle APC} = \frac{1}{2} \cdot PC \cdot (AB - PC) \cdot 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$AC^2 = (AB - PC)^2 + PC^2 - 2 \cdot PC(AB - PC) \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 51,2$

$BC = \frac{25,6\sqrt5}{AB} = \frac{25,6 PC\sqrt5}{160 - PC^2}$

$160 = PC(AB - PC)$, $AB - PC = \frac{160}{PC}$, $AB = \frac{160 - PC^2}{PC}$

$AC^2 = (AB - PC)^2 + PC^2 + 192 = \left(\frac{160}{PC}\right)^2 + PC^2 + 192$

$$\begin{cases} AC^2 = \left(\frac{160 - PC^2}{PC}\right)^2 + \left(\frac{25,6 PC\sqrt5}{160 - PC^2}\right)^2 - 51,2 \quad (1) \\ AC^2 = \left(\frac{160}{PC}\right)^2 + PC^2 + 192 \end{cases}$$

Ответ: а) $S_{\triangle ABC} = 25,6$; б) AC является положительным решением системы (1).

4. $\begin{cases} НОД(a;b;c)=21 \\ НОК(a;b;c)=3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$

$21=3\cdot 7$

$a\cap b\cap c=3\cdot 7$

$a\cup b\cup c=3^{17}\cdot 7^{15}$

$a=3\cdot 7\cdot 3^{a}\cdot 7^{b}$

$b=3\cdot 7\cdot 3^{c}\cdot 7^{d}$

$c=3\cdot 7\cdot 3^{e}\cdot 7^{f}$

~~max (1+a,~~ $1+\max(a,c,e)=17$

$1+\max(b,d,f)=15$

$\max(a,c,e)=16$

$\max(b,d,f)=14$

$3\cdot 17^2\cdot 3\cdot 15^2=9\cdot 15^2\cdot 17^2=$

$=(3\cdot 15\cdot 17)^2=\underline{585325}$

15×17: 105, 15, 255; $255\times 3=765$

765×765: 3825, 4590, 5355, 585325

36×16: 216, 36, 576

576×14: 2304, 576, 8064

$\times 14$

5. $\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$, $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$, $\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$.

Два равны, а одно на 1 больше.

$\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}-1}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$, $2\log_{x-\frac{11}{4}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$, $2\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)$

Пусть два из них равны по k, а третье $k+1$.

Тогда ~~2 log~~ заметим, что их произведение равно 2.

$k^2(k+1)=2$

$k^3+k^2-2=0$

$k^3-k^2+2k^2-2k+2k-2=0$

$(k-1)(k^2+2k+2)=0$

$D=4-8=-4$, значит $k=1$.

Тогда два из этих чисел равны по 1, а третье – 2.

$\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}-1}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=1$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\left(\frac{x}{2}-1\right)^2$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\frac{x^2}{4}-x+1$

$\frac{x^2}{4}-\frac{3x}{2}+\frac{5}{4}=0 \;|\; 4$

$\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$ $\quad x^2-6x+5=0$

$\frac{3}{2}-\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$ $\quad D=36-20=-16$

1 и 5

$\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}$

$2\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)=1$

$\frac{5}{2}-\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$ $\quad \left(x-\frac{11}{4}\right)^2=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$

$x^2-\frac{11}{2}x+\frac{121}{4}=\frac{x}{2}-\frac{1}{4} \;|\; 4$

$4x^2-24x+122=0$

$2\log_{x-\frac{11}{4}}\left(\frac{x}{2}-1\right)=1$

$\left(\frac{x}{2}-1\right)^2=x-\frac{11}{4}$

~~$\log_2 8=3$~~

~~$8=2^3$~~

$\frac{x^2}{4}-x+1=x-\frac{11}{4} \;|\; 4$

$x^2-8x+15=0$

$\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=5 \end{array}\right.$

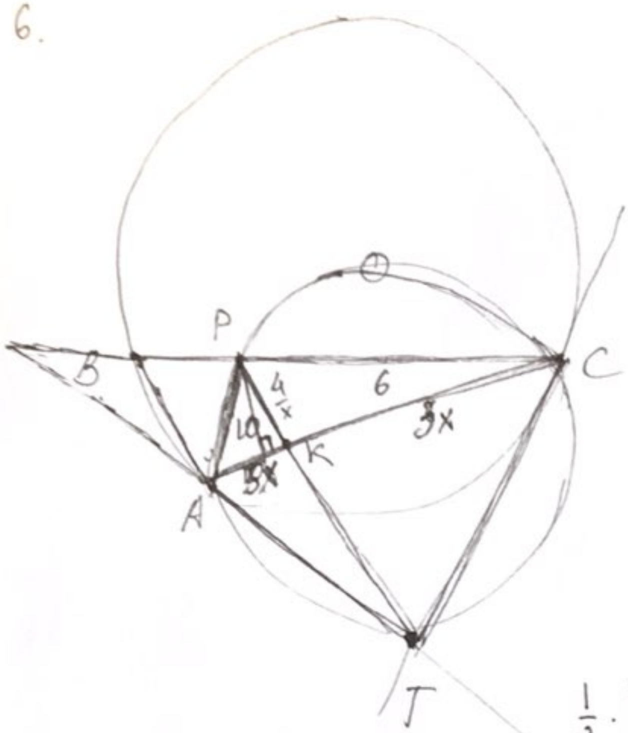
$x^2-6x+\frac{61}{2}=0$

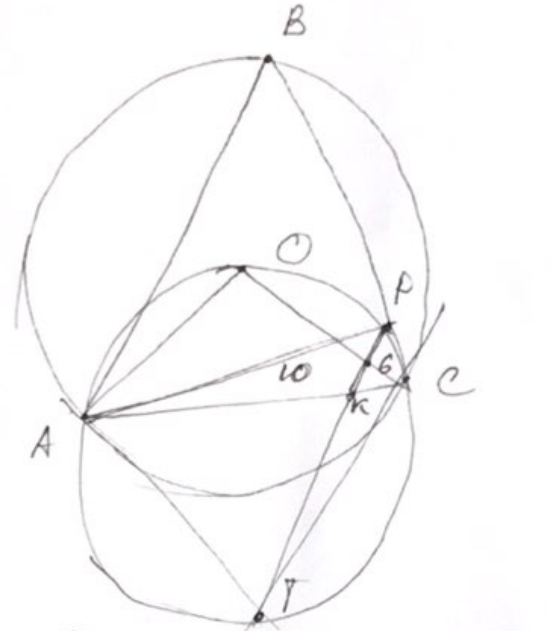
$2x^2-12x+61=0$

$D=36-122$

$x=5$ – решение

6.

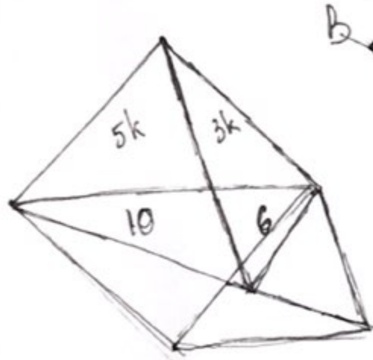


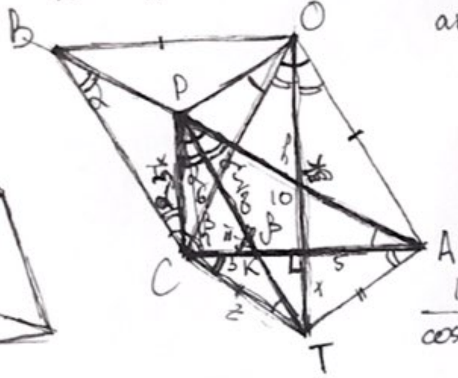


$\frac{1}{2}\cdot h\cdot 5x = 10$

$h = \frac{4}{x}$

arctg 2





$tg\angle ABC = 2$

$\frac{1}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{5}$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt5} = \frac{\sqrt5}{5}$

$\sin\alpha = \frac{2\sqrt5}{5}$

$\times\frac{32}{6}$ 192

$z p = h x$

$z^2 = z p + z x$

$z^2 = x(h+x)$

$\frac{x}{z} = \frac{z}{h+x}$

$\left(\frac{8}{5}\right)^2\cdot 10 = \frac{64}{25}\cdot 10 =$

$S_{\triangle ABC} = 16$!

$\beta - \alpha + \cancel{\alpha} + \pi - \cancel{\beta} = \pi$

$25,6\cdot 2 = 51,2$

$= \frac{128}{5}\cdot\frac{256}{10} = 25,6$

$\frac{AC}{2} = R\cdot\frac{2\sqrt5}{5}$

$AC = \frac{4R\sqrt5}{5}$

$16 = \frac{1}{2} xy \sin\alpha = xy\frac{\sqrt5}{5}$

$2xy\cos\alpha = 32$

$S = \frac{abc}{4R}$

$R = \frac{xy\cdot AC}{4\cdot 16}$

$AC^2 = x^2 + y^2 - 32$

$\cancel{AC} = \frac{\cancel{4}\cdot xy\cdot \cancel{AC}\sqrt5}{5\cdot\cancel{4}\cdot 16}$