Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104551**

ID профиля: **868636**

Вариант 19

№ 3 (продолжение) Чистовик

Для точек (p, q) над ③ $25+6q+6p \le 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 25 \le -6q-6p \Rightarrow p^2+q^2 \le 25 \Rightarrow$ это внутр. окр ①

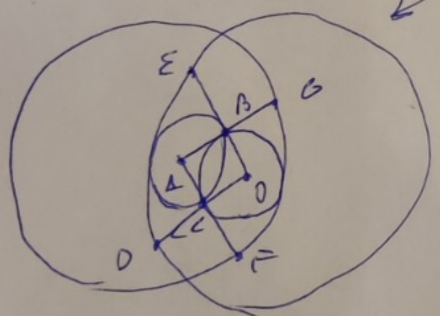
под прямой ③ $\Rightarrow$ искомые точки (a, b) – пересечение

двух окр. ~~~~ ① и ②

Теперь поймем, для каких x и y существует a и b из этого множества, что $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ окружн. $r=5$ с центром в (x, y) должна пересекать область возможных пар $(a, b) \Rightarrow$

это множество:



из частей EOD – сегмент окр. радиуса $BD=10$ и угла $=120°$

$GAF = S_1$

EBG – сегмент окр. радиуса $DG=5$ – и угла $60°$ – его площадь S_2

и ромб с углом $60°$ и стороной $BO=5$ – его площадь S_3. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Rightarrow S_4 - S_{EOD}+S_{AGF}+S_{EBG}+S_{CDF}+S_{ABOC} = 2S_1+2S_2-S_3=$

$=\frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 2}{3}+\frac{2\cdot 5^2 \cdot \pi}{6}-\frac{2\cdot 5^2\sqrt{3}}{4} = \cancel{\frac{\pi \cdot 225}{3} - \frac{25\sqrt{3}}{2}}$

$\frac{225\pi}{3}-\frac{25\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $\frac{225\pi}{3}-\frac{25\sqrt{3}}{2}$

Чистовик (3)

№3

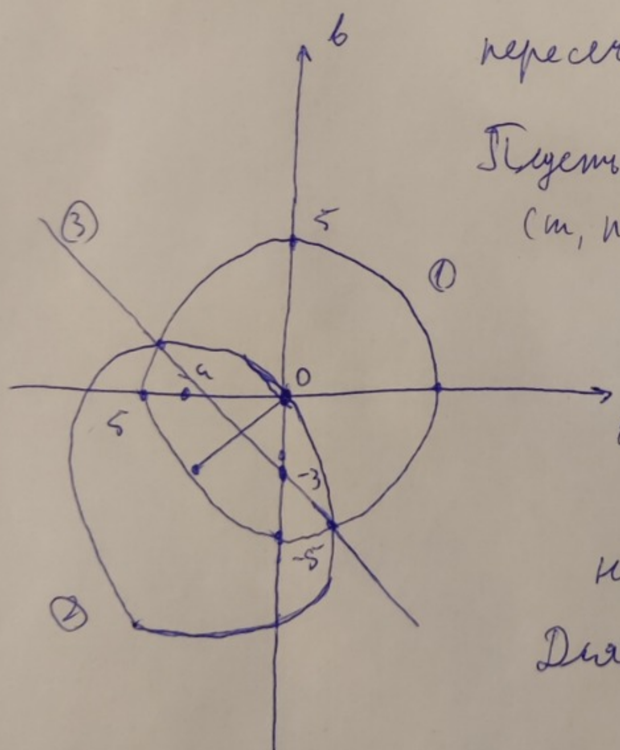
Исследуем как выглядят возможные пары (a, b)

1) $a^2+b^2 \le 25$ – внутрен-сть окружн. ~~р~~ $r=5$ и центр. $(0,0)$

2) $a^2+b^2 \le -8a-6b$

$a^2+8a+b^2+6b \ge 0 \Rightarrow (a+4)^2+(b+3)^2 \le 25 \Rightarrow$ внутр.-сть ~~окр~~ окр. $r=5$, центр. $(-4;-3)$

3) $25+6b+8a=0$ – это прямая, что проходит через т. пересечения окружностей.



Пусть ~~эти точка~~ ~~ок~~ окр. пересекают в $(m, n) \Rightarrow (m+4)^2+(n+3)^2=25$ ~~это~~ $=m^2+n^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow m^2+n^2+8m+6n+25=m^2+n^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8m+6n+25=0 \Rightarrow$

на прямой (3) 2 точки. ~~Над~~

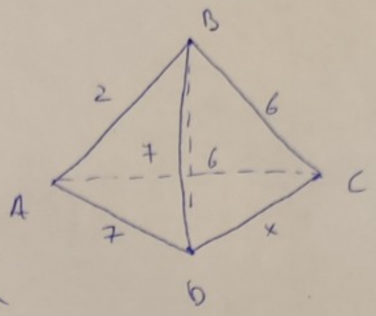
Для точек на прямой ~~ЗД~~ (3):

$25+6a+8p \ge 0 \Rightarrow 25 \ge -6a ~~+~~ -8p \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Это внутр. окр. (2) над прямой (3)

21104551 (U868636 M1304510)

№2 Чистовик 2

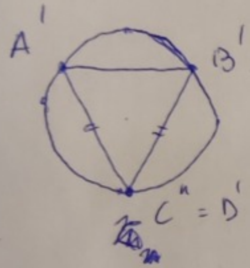


CD – параллельно оси цилиндра

AB ⊥ CD (по т.т.п.) ⇒

⇒ $\begin{cases} CD \perp \text{основанию цилиндра}, \\ AB \text{ параллельно основанию цилиндра} \end{cases}$

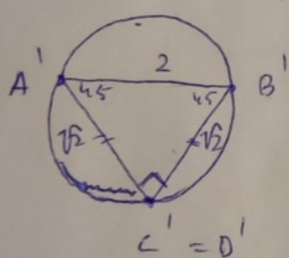
AB ∥ основанию. ⇒ при параллельной проекции относительно прямой CD на плоскость ⊥ CD:



$A'B' = AB = 2$; радиус цилиндра – это радиус окружности $A'B'C''$ т.к. $A'B' = 2 \Rightarrow \min R = 1 \Rightarrow$

⇒ A_1B_1 – диаметр ⇒ $\angle A_1C_1B_1 = 90$ ⇒

⇒ $A_1C_1 = C_1B_1 = \sqrt{2}$; $\angle B'A'C' = \angle A'B'C' = 45$



⇒ Если провести плоскость перпендикулярную CD и пересечь в точке X, то очевидно, что $\triangle ABX = \triangle A'B'C'$ ⇒

⇒ $XA = \sqrt{2} = XB \Rightarrow XD = \sqrt{BD^2 - XB^2} = \sqrt{49-2} = \sqrt{47}$

$XC = \sqrt{BC^2 - XB^2} = \sqrt{36-2} = \sqrt{34} \Rightarrow$

⇒ т.к. C и D и X могут лежать на прямой двумя способами (X – крайняя; X между), то $CD = \sqrt{47} - \sqrt{34}$

$CD = \sqrt{47} + \sqrt{34}$

Ответ: $\{\sqrt{47} - \sqrt{34}\}$ и $\{\sqrt{47} + \sqrt{34}\}$

Чистовик

Задача 1

$a_n = a_1 + k(n-1)$ k - шаг

$k > 0$ и a_1, k - целые - по условию

$S = (2a_1 + 13)\cdot 7$

$a_9 a_{17} = (a_1 + 8k)(a_1 + 16k) = a_1^2 + 24a_1k + 128k^2$

$a_{11} a_{15} = (a_1 + 10k)(a_1 + 14k) = a_1^2 + 24a_1k + 140k^2$

$$\begin{cases} -\cancel{a_1^2} - \cancel{24a_1k} - 128k^2 < \cancel{S} + 12 \\ \cancel{a_1^2} + \cancel{24a_1k} + 140k^2 < \cancel{S} + 47 \end{cases} \quad +$$

$12k^2 < 35 \Rightarrow k^2 < 3 \Rightarrow \begin{cases} k^2 < 3 \\ k > 0 \\ k\text{ - цел} \end{cases} \Rightarrow \boxed{k = 1}$

Подставим $k=1$ в первое уравнение

1

$a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 103$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

$(a_1 + 5)^2 > 0 \Rightarrow$ a - любое целое число кроме -5

Подставим $k = 1$ во второе уравнение

$a_1^2 + 24a_1 + 140 < 14a + 138$

$a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0$ $D = 100 - 8 = 92 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1$ лежит между $\frac{-10+\sqrt{92}}{2}$ и $\frac{-10-\sqrt{92}}{2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{a_1 \in (-9; 0) \quad a_1 \neq -5 \text{ и}}$

Ответ: $\{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104551**

ID профиля: **868636**

Вариант 19

Чистовик. ~~задача~~ ②

Задача 5

$\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$; $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$; $\log_{\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$

Пусть $a=\frac{x}{2}-1$ $\quad b=\sqrt{x-\frac{11}{4}}$ $\quad c=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$

Тогда: $\log_{a^2}c$; $\log_b a$; $\log_c b^4$ $\quad a,b,c>0$

Тогда $\quad \log_{a^2}c=\frac{\log_a c}{2}$; $\log_c b^4=4\log_c b$

Если перемножить логарифмы:

$\frac{\log_a c}{\cancel{2}}\cdot\log_b a\cdot\overset{2}{\cancel{4}}\log_c b=\log_a c\cdot\log_b a\cdot 2\log_c b=2$

т.к. 2 из них равны а другой на 1 больше $\Rightarrow$

$\Rightarrow t^2(t+1)=2 \Rightarrow t^3+t^2-2=0 \Rightarrow (t-1)(t^2+2t+2)=0 \Rightarrow$

$t=1$ $\quad (t^2+2t+1)+1\neq0 \Rightarrow t=1$ $\quad$ 2 логарифма равны 1 и 1 логарифм равен 2.

Если $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)=1$, то $\left(\frac{x}{2}-1\right)^2=x-\frac{11}{4} \Rightarrow x^2-4x+4=$

$=4x-11 \Rightarrow x^2-8x+15=0 \Rightarrow (x-4)^2-1=0 \Rightarrow x=5$ или $x=3$

Если $x=5$, то $a=\frac{3}{2}$; $b=\frac{3}{2}$; $c=\frac{9}{4}$ $\Rightarrow$ подходит

Если $x=3$, то $a=\frac{1}{2}$; $b=\frac{1}{2}$; $c=\frac{5}{4}$ – не подходит. т.к. $(a^2\neq c;\ c\neq b^4)$

Если $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)\neq1 \Rightarrow 1=\log_{a^2}c=\log_c b^4 \Rightarrow c=a^2$, $c=b^4 \Rightarrow a^2=b^4$

т.к. $a,b,c>0$, то $a=b^2 \Rightarrow \frac{x}{2}-1=x-\frac{11}{4} \Rightarrow 2x-4=4x-11 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{1}{2}$; Тогда $a=\frac{3}{4}$; $b=\frac{\sqrt{3}}{4}$; $c=\frac{3}{2}$, но тогда $a^2\neq c \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{a^2}c\neq1 \Rightarrow$ противоречие.

Ответ: $x=5$

21104551 (U868636 M1304511)

Чистовик.

Задача №4

Очевидно, что все числа имеют только 3 и 7 в разложении на простые множители. Пусть $a = 3^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$

$b = 3^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$ $\quad c = 3^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3}$

$$\text{НОД}(a, b, c) = 3^{\min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} \cdot 7^{\min(\beta_1, \beta_2, \beta_3)} = 3 \cdot 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3) = 1$$

$$\min(\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \beta_3) = 1$$

$$\text{НОК}(a, b, c) = 3^{17} \cdot 7^{15} \Rightarrow \text{НОК}(a, b, c) = 3^{\max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} \cdot 7^{\max(\beta_1, \beta_2, \beta_3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 17; \quad \max(\beta_1; \beta_2; \beta_3) = 15$$

$$(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3) = (1; x; 17)$$

$$(\beta_1; \beta_2; \beta_3) = (1; x; 15)$$

Тогда степени тройки можно распределить 6-ью способами если $x \neq 1$ и $x \neq 17$, если $x = 1$ или $x = 17$, то 3-мя способами $\Rightarrow$ всего: $6 \times 15 + 3 \times 2 = 6 \times 16 = 96$ — способы распределить 3.

Аналогично для степени 7: $6 \times 13 + 3 \times 2 = 6 \times 14 \Rightarrow$ всего способов будет $6 \times 16 \times 6 \times 14 = 36 \times 16 \times 14 = 8064$

Ответ: 8064