Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104429**

ID профиля: **859869**

Вариант 19

Задача №1

Пусть $a_n = a_1 + (n-1)d$, $S_n = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$

$a_9 = a_1 + 8d$; $a_{17} = a_1 + 16d$, $a_{11} = a_1 + 10d$, $a_{15} = a_1 + 14d$

$$S = \frac{a_1 + a_{14}}{2}\cdot n = \left(\frac{a_1 + a_1 + 13d}{2}\right)\cdot 14 = (2a_1 + 13d)7 = 14a_1 + 91d$$

Запишем условия:

$$\begin{cases}(a_1+8d)(a_1+16d) > 14a_1 + 91d + 12\\ (a_1+10d)(a_1+14d) < 14a_1 + 91d + 47\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2 + 24a_1d + 128d^2 > 14a_1 + 91d + 12\\ a_1^2 + 24a_1d + 140d^2 < 14a_1 + 91d + 47\end{cases}$$

следовательно, $12 < a_1^2 + 24a_1d + 128d^2 - 14a_1 - 91d < 47 - 12d^2$

$$12d^2 < 35.$$

Т.к. последовательная возрастающая, что $d>0$. Целые числа =>

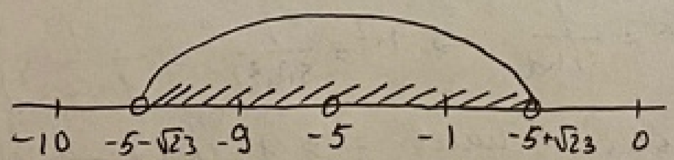
=> $d \in N$

$d^2 < \frac{35}{12}$ => $d = 1$, тогда

$$\begin{cases}a_1^2 + 24a_1 + 128 - 14a_1 - 91 > 12\\ a_1^2 + 24a_1 + 140 - 14a_1 - 91 < 47\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0\\ a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}(a_1+5)^2 > 0 \longrightarrow a_1 \neq -5\\ a_1 \in \left(\frac{-10-\sqrt{92}}{2}; \frac{-10+\sqrt{92}}{2}\right)\end{cases}$$

$a_1 \in (-5-\sqrt{23}; -5+\sqrt{23})$

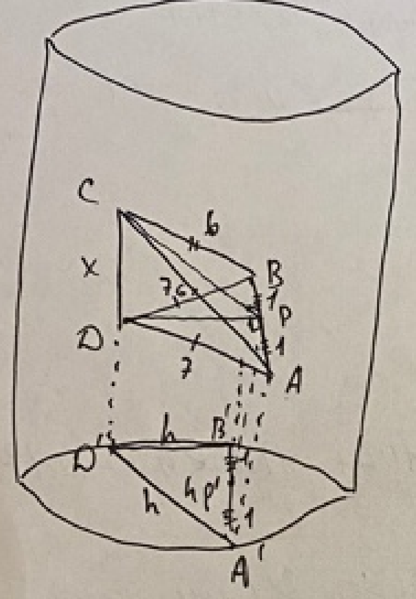


Подходят значения $a_1 = -1; -2; -3; -4; -6; -7; -8; -9$

Ответ: $a_1 = -1; -2; -3; -4; -6; -7; -8; -9$.

Чистовик   Вариант 19

Задача №2



т.к $\triangle BCP$ и $\triangle BDA$ р.б, то $DP \perp BA$, $CP \perp BA$, P – середина $AB \Rightarrow$ плоскость $CDP \perp AB$

проекции $B \to B'$; $A \to A'$; $D \to D'$

$B'P' = P'A'$ и т.к $PP' \parallel CD$, то

$AB \perp CD \to AB \perp PP'$

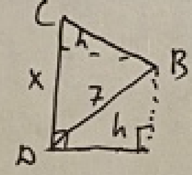
$A'B' = AB$; $BB' = AA'$ ($BB'A'A$ прямоуг)

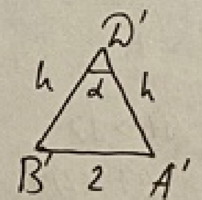
$AB = A'B' = 2$

$B'D' = BD$; $AD = A'D' = h$

$\triangle B'D'A'$ – р.б ; $B'D'$

$\sqrt{36-h^2} + \sqrt{49-h^2} = x$ (*)





по т. косинусов

$2h^2 - 2h^2 \cdot \cos\alpha = 4$

$2h^2(1-\cos\alpha) = 4$

$1 - \cos\alpha = \frac{2}{h^2}$

$\cos\alpha = 1 - \frac{2}{h^2}$

по т. синусов

$2r = \frac{A'B'}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha} \to r = \frac{1}{\sin\alpha} \to r^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{1-\cos^2\alpha}$

r – наим, следовательно $\cos\alpha \to$ наиб $\to 1-\cos\alpha \to$ наим $\to$

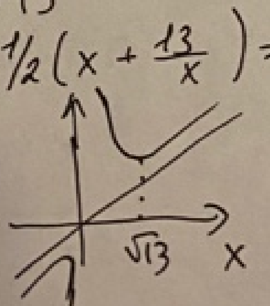
$\to h \to$ наиб из уравнения (*) $36 - \cancel{h^2} = x^2 - 2x\sqrt{49-h^2} + 49 - \cancel{h^2} \to$

$\to 2x\sqrt{49-h^2} = x^2 + 13$

$\sqrt{49-h^2} = \frac{x^2+13}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{13}{x}\right) = f(x)$ Найдем минимум $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{13}{x^2}\right)$

$\sqrt{49-h^2} \Rightarrow \min$

$x^2 = 13 \to x = \sqrt{13}$



Ответ: $\sqrt{13}$

21104429 (U859869 M1303082)

Чистовик Вариант 19

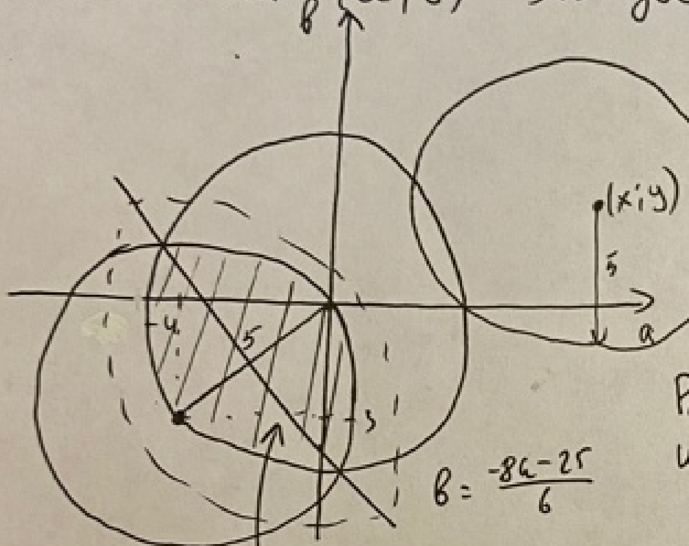
Задача №3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 25\\ a^2+b^2\le \min(-8a-6b,\,25)\end{cases}$$

Второе неравенство: $\left[\begin{array}{l} a^2+b^2\le 25,\ -8a-6b\ge 25 \\ a^2+b^2\le -8a-6b,\ -8a-6b<25\end{array}\right.$ =>

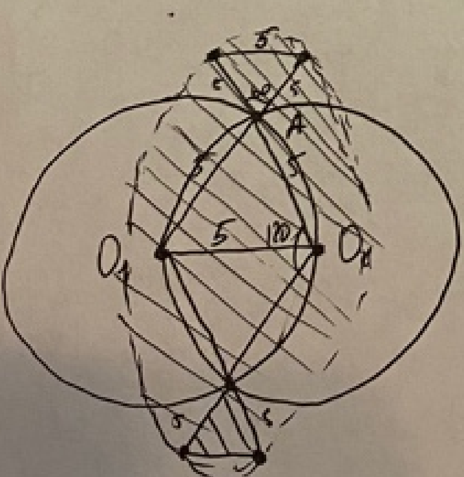
=> $\begin{cases}a^2+b^2\le 25\\ (a+4)^2+(b+3)^2\le 25\end{cases}$, $b\le \dfrac{-8a-25}{6}$, $b=\dfrac{-8a-25}{6}$

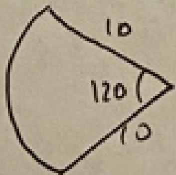
На плоскости $(a;b)$ это две окружности радиуса 5.



Рассмотрим $(x-a)^2+(y-b)^2\le 25$ как круг радиуса 5 на плоскости (a,b) с неизвестным центром $(x;y)$. Он должен пересекаться с областью, удовл. второму неравенству.

Расстояние от т. $(x;y)$ до центров кругов $(-4;-3)$ и $(0;0)$ должно быть 10





$S_{сект}=1/3\,\pi\cdot 10^2=\frac{100\pi}{3}$

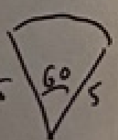
$S_{\Delta\text{-ка}}\ O_1O_2A=1/2\cdot 25\,\frac{\sqrt3}{2}=\frac{25\sqrt3}{4}$

Итоговый ответ:

$2S_{сект}-2S_{\Delta\text{-ка}}=\frac{200\pi}{3}-\frac{25}{2}\sqrt3$

Надо добавить еще 2 сектора окружности радиуса 5, т.е. $\frac{25\pi}{6}\cdot 2=\frac{25\pi}{3}$

Ответ: $S_M=\frac{200\pi}{3}-\frac{25}{2}\sqrt3+\frac{25\pi}{3}=$



$\pi\cdot 5^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{25\pi}{6}$

$=\frac{225\pi}{3}-\frac{25}{2}\sqrt3$

Черновик   Вариант 19

Задача №1.

$a_n = a_1 + (n-1)d$, $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} n$

$a_9 = a_1 + 8d$ a_{17} , a_{11} , a_{15}

$S = \frac{a_1+a_{14}}{2} n = \left(\frac{a_1+a_1+13d}{2}\right)\cdot 14 = (2a_1 + 13d)7 = 14a_1 + 91d$

Усл.

$\begin{cases} (a_1+8d)(a_1+16d) > 14a_1 + 91d + 12 \\ (a_1+10d)(a_1+14d) < 14a_1 + 91d + 47 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 d + 128d^2 > 14a_1 + 91d + 12 \\ \qquad\qquad +140d^2 < \quad +47 \end{cases}$

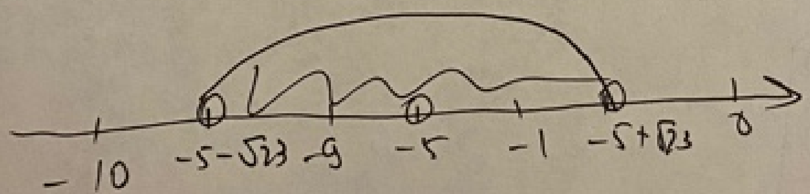
$12 < a_1^2 + 24a_1 d + 128d^2 - 14a_1 - 91d < 47 - 12d^2$

$12d^2 < 35$ $d^2 < \frac{35}{12}$

Возраст $\Rightarrow d > 0$, $d \in \mathbb{N}$

$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 128 - 14a_1 - 91 > 12 \\ a_1^2 + 24a_1 + 140 - 14a_1 - 91 < 47 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} (a_1+5)^2 > 0 \rightarrow a_1 \neq -5 \\ a_1 \in \left(\frac{-10-\sqrt{92}}{2} ; \frac{-10+\sqrt{92}}{2}\right) \end{cases}$



$a_1 = -1; -2; -3; -4; -6; -7; -8; -9.$

5

Черновик

Вариант 19

На плоскости $(a;b)$ две окр. ℓ

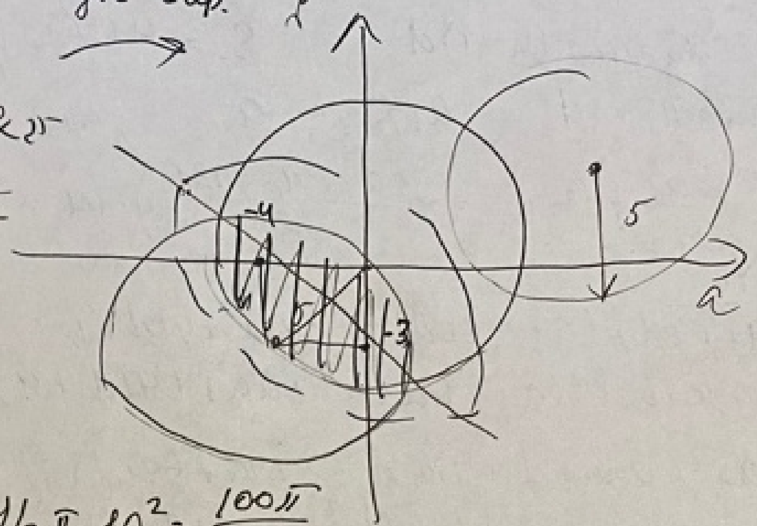
Задача 3

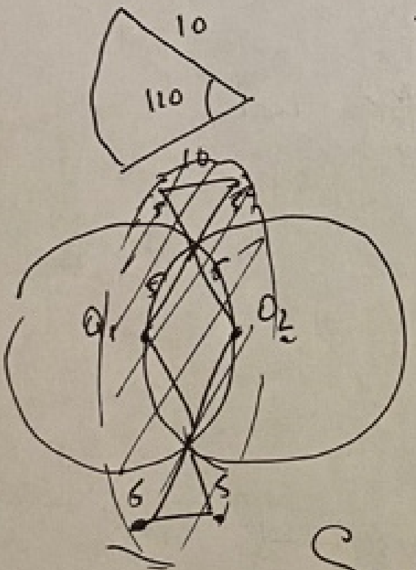
$a^2+b^2 \le 25$, $-8a-6b \ge 25$

$a^2+b^2 \le -8a-6b$, $-8a-6b < 25$

$b \le \frac{-8a-25}{6}$ $\quad b = \frac{-8a-25}{6}$

Расстояние от т. $(x;y)$ до центров $(-4;-3)$ и $(0;0)$ должно быть 10





$S_{сект} = 1/3\,\pi \cdot 10^2 = \frac{100\pi}{3}$

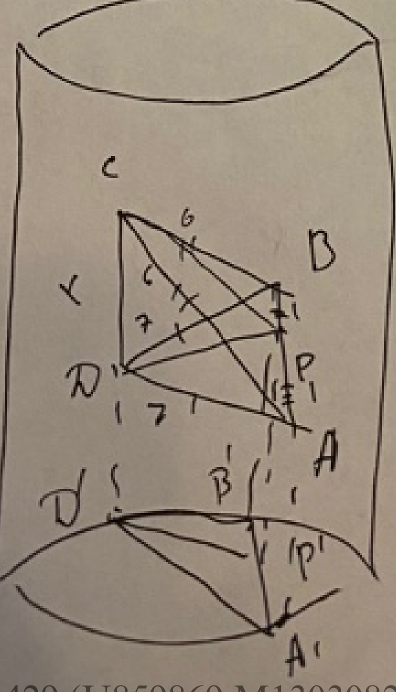
$S_{\Delta}\,O_1O_2A = 1/2 \cdot 25$

$2S_{сект} - 2S_{\Delta\ldots} = \frac{200\pi}{3} - \frac{25}{2}\sqrt{3}$

$+$ 2 сектора окружности $R = 5$

$\frac{25\pi}{6} \cdot 2 = \frac{25\pi}{3}$

$S = \frac{200\pi}{3} - \frac{25}{2}\sqrt{3} + \frac{25\pi}{3} = \frac{225\pi}{3} - \frac{25}{2}\sqrt{3}$



5

21104429 (U859869 M1303082)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104429**

ID профиля: **859869**

Вариант 19

Чистовик Вариант 19

Задача №4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=21 \\ НОК(a;b;c)=3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$$

1) Одно из них 21, ← 3 способа выбора
одно из них $3^{17}\cdot 7^{15}$ ← 2 способа выбора
Остается 1 число вида $3^x\cdot 7^y$ (нельзя быть 21 и $3^{17}\cdot$

$6\cdot(17\cdot 15-2)=1518$

2) Одно из них 21 ← 3 способа выбора
два других вида $3^{17}\cdot 7^x$ или $3^x\cdot 7^{15}$

$1\leq x\leq 14$ $1\leq x\leq 16$

$16\cdot 16\cdot 2=448$ способов
итого $3\cdot 448=1344$ способов

3) Два числа 21, тогда третье $3^{17}\cdot 7^{15}$ 1 способ
два числа $3^{17}\cdot 7^{15}$, тогда третье 21 1 способ

Всего: 2864 способа

Ответ: 2864 способа.

Чистовик   Вариант 19

Задача №5

$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$; $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$; $\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$

Пусть $a=\frac{x}{2}-1>0,\ a\neq 1$; $b=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0,\ b\neq 1$; $c=x-\frac{11}{4}>0\neq 1$

$x>2,\ x\neq 4$; $x>1/2,\ x\neq 5/2$; $x>11/4,\ x\neq\frac{15}{4}$

$x\in\left(\frac{11}{4};\frac{15}{4}\right)\cup\left(\frac{15}{4};4\right)\cup(4;+\infty)$

числа $f_1=\log_{a^2}b=\frac{\log_a b}{2}$; $f_2=\log_{\sqrt{c}}a=\frac{1}{\log_a\sqrt{c}}=\frac{2}{\log_a c}$; $f_3=\frac{2\log_a c}{\log_a b}$

I случай если $f_1=f_2$, $f_3=f_1+1$

$$\begin{cases}\log_a c\cdot\log_a b=4\\ \frac{2\log_a c}{\log_a b}=\frac{\log_a b}{2}+1\end{cases}$$

умножим второе на $\log_a^2 b\to 8=2\log_a c\cdot\log_a b=\frac{\log_a^3 b}{2}+\log_a^2 b$

$\log_a b=t\ \to t^3+2t^2-16=0$; $t_1=2$

$$\begin{array}{r|l} t^3+2t^2-16 & t-2\\ \hline t^3-2t^2 & t^2+4t+8\\ 4t^2-16 & \\ 4t^2-8t & \\ 8t-16 & \\ 8t-16 & \\ 0 & \end{array}$$

$D=16-32<0$ Нет корней

$\log_a b=2$; $\log_a c=2\to b=c=a^2$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=x-\frac{11}{4}=\left(\frac{x}{2}-1\right)^2\to \boxed{x=5}$ подходит

II случай Если $f_1=f_3$, $f_2=f_1+1$

$$\begin{cases}\frac{\log_a b}{2}=\frac{2\log_a c}{\log_a b}\\ \frac{2}{\log_a c}=1+\frac{\log_a b}{2}\end{cases}\to$$

$\log_a c=\frac{\log_a^2 b}{4}\to\frac{8}{\log_a^2 b}=1+\frac{\log_a b}{2}\Rightarrow 16=2\log_a^2 b+\log_a^3 b$

$\log_a b=t$ $t^3+2t^2-16=0\to t=2$ (аналогично I-ому случаю)

$b=a^2$; $a=c\to\frac{x}{2}-1=x-\frac{11}{4}\to x=7/2$; $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\left(\frac{x}{2}-1\right)^2$

$\frac{7}{4}-\frac{1}{4}=\frac{6}{4}=3/2$; $(7/4-1)^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$ не подходит

III случай Если $f_2=f_3$, $f_1=f_2+1$;

$$\begin{cases}\frac{2}{\log_a c}=\frac{2\log_a c}{\log_a b}\\ \frac{\log_a b}{2}=\frac{2}{\log_a c}+1\end{cases}$$

$\log_a b=\log_a^2 c$

$\frac{\log_a^2 c}{2}=\frac{2}{\log_a c}+1\to\log_a^3 c=4+2\log_a c$; $\log_a c=t$; $t^3-2t-4=0$

$t_1=2$

$$\begin{array}{r|l} t^3-2t-4 & t-2\\ \hline t^3-2t^2 & t^2+2t+2\\ 2t^2-2t & \\ 2t^2-4t & \\ 2t-4 & \\ 2t-4 & \\ 0 & \end{array}$$

$D=4-8<0$ нет корней

$\log_a c=2$; $\log_a b=4$

$c=a^2$; $b=a^4$; $x-\frac{11}{4}=\left(\frac{x}{2}-1\right)^2$

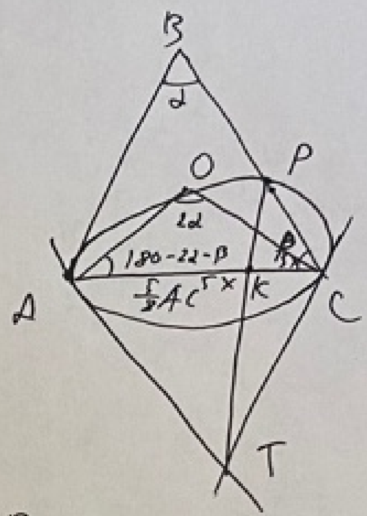
$x^2-8x+15=0\to x_1=3$; $x_2=5$

На условие $b=a^4\to\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\left(\frac{x}{2}-1\right)^4$ - подходит только $x_2=5$

Ответ: 5

Чистовик

Задача № 6



Радиус ω равен R

Радиус вокруг AOC равен r

$\frac{AB}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sin\alpha} = 2R$; $\frac{AC}{\sin 2\alpha} = r$

$R\sin\alpha = r\cdot\sin 2\alpha \rightarrow r = \frac{R}{2\cos\alpha}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)AB\cdot AC =$

$= \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)\cdot 2R\cdot\sin\beta\cdot 2R\cdot\sin\alpha$

$= 2\sin\alpha\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot R^2$

аналогично $\frac{AP}{\sin\beta} = 2r$; $AP = 2r\sin\beta$

$\frac{PC}{\sin(2\alpha+\beta)} = 2r$; $PC = 2r\sin(2\alpha+\beta)$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}\cdot 2R\cdot\sin\alpha\cdot 2r\cdot\sin\beta\cdot\sin(2\alpha+\beta) = 10 \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}\cdot 2R\cdot\sin\alpha\cdot 2r\cdot\sin(2\alpha+\beta)\cdot\sin\beta = 6 \end{cases}$$

$\frac{5}{4}R\cdot r\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin(2\alpha+\beta) = 10$

$\frac{3}{4}R\cdot r\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot(\sin\alpha+\beta) = 6$

8

21104429 (U859869 M1303083)

Черновик Вариант 19

Задача №5.

Пусть $a = \frac{x}{2} - 1 > 0$ $a \neq 1$ $b = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} > 0$ $b \neq 1$

$c = x - \frac{11}{4} > 0$ $\neq 1$

$x > 2$, $x \neq 4$; $x > 1/2$, $x \neq 5/2$; $x = 11/4$; $x \neq \frac{15}{4}$

$x \in (\frac{11}{4}; \frac{15}{4}) \cup (\frac{15}{4}; 4) \cup (4; +\infty)$

I случай $f_1 = f_2$ $f_3 = f_1 + 1$

$\begin{cases} \log_a c \cdot \log_a b = 4 \\ \frac{2\log_a c}{\log_a b} = \frac{\log_a b}{2} \end{cases}$

$\log_a b = t \rightarrow t^3 + 2t^2 - 16 = 0$, $t_1 = 2$

$t^3 + 2t^2 - 16 \,|\, t - 2$
$-\, t^3 - 2t^2 \,|\, t^2 + 4t + 8$
$4t^2 - 16$ Нет корн
$-\, 4t^2 - 8t$
$8t - 16$
$-\, 8t - 16$
0

$\log_a b = 2$ $\log_a c = 2 \longrightarrow b = c = a^2$

$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} = x - \frac{11}{4} = (\frac{x}{2} - 1)^2 \longrightarrow x = 5$

II случай $f_1 = f_3$, $f_2 = f_1 + 1$

$\begin{cases} \frac{\log_a b}{2} = \frac{2\log_a c}{\log_a b} \\ \frac{2}{\log_a c} = 1 + \frac{\log_a b}{2} \end{cases}$

$16 = 2\log_a^2 b + \log_a^3 b$ ∞

$\log_a c = \frac{\log_a^2 b}{4} \rightarrow \frac{8}{\log_a^2 b} = 1 + \frac{\log_a b}{2} \Rightarrow$

Аналогично 1-ому

$t^2 + 2t^2 - 16 = 0$

$\frac{7}{4} - \frac{1}{4} = \frac{6}{4} = 3/2$; $(7/4 - 1)^2 = (\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16}$ - не подходит

III $f_2 = f_3$, $f_1 = f_2 + 1$

$\begin{cases} \frac{2}{\log_a c} = \frac{2\log_a c}{\log_a b} \\ \frac{\log_a b}{2} = \frac{2}{\log_a c} + 1 \end{cases}$

$\frac{\log_a^2 c}{2} = \frac{2}{\log_a c} + 1 \longrightarrow \log_a^3 c = 4 + 2\log_a c$; $\log_a c = t$; $t^3 - 2t - 4 = 0$

$t^3 - 2t - 4 \,|\, t - 2$
$-\, t^3 - 2t^2 \,|\, t^2 + 2t + 2$
$2t^2 - 2t$ Нет. реш.
$-\, 2t^2 - 4t$
$2t - 4$
$-\, 2t - 4$
0

$\log_a c = 2$, $\log_a b = 4$

$x^2 - 8x + 15 = 0 \rightarrow x_1 = 3$; $x_2 = 5$

На усл $b = a^4 \rightarrow \frac{x}{2} - \frac{1}{4} = (\frac{x}{2} - 1)^4$ - не подходит

5

9

21104429 (U859869 M1303083)