Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104319**

ID профиля: **85228**

Вариант 19

Чистовик

№1

(d - шаг прогрессии)

$S'_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$. $\quad S'_{14} = 14a_1 + 91d$,

$a_9 = a_1 + 8d$; $a_{17} = a_1 + 16d$;

$a_{11} = a_1 + 10d$; $a_{15} = a_1 + 14d$.

По условию:

$$\begin{cases} (a_1+8d)(a_1+16d) > 14a_1 + 91d + 12 \\ (a_1+10d)(a_1+14d) < 14a_1 + 91d + 47 \end{cases}$$

$$(1)\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 d + 128d^2 > 14a_1 + 91d + 12 \\ a_1^2 + 24a_1 d + 140d^2 < 14a_1 + 91d + 47 \end{cases}$$

Пусть $m = a_1^2 + 24a_1 d + 128d^2$; $L = 14a_1 + 91d + 12$

тогда:

$$\begin{cases} m > L \Leftrightarrow m = L + k,\ k > 0 \\ m + 12d^2 < L + 35 \end{cases}$$

$$\cancel{L} + k < \cancel{L} + (35 - 12d^2)$$

$k < 35 - 12d^2$ и по условию $d > 0$, $d \in \mathbb{Z}$

при этих условиях: $\begin{cases} k < 35 - 12d^2 \\ k > 0,\ d \in \mathbb{Z},\ d > 0 \end{cases}$ Подходит только $d = 1$

При $d = 1$, система (1) имеет вид: $\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0 \end{cases}$

первое уравнение есть $(a_1+5)^2$ что

при любом $a_1 > 0$, кроме $\boxed{a_1 = -5}$

Второе: $D = 100 - 4 \cdot 2 = 92$ $\quad a_{1,1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{92}}{2} = -5 \pm \sqrt{23}$

$4 < \sqrt{23} < 5$. Следовательно, $-10 < a_{1,1} < -9$; $-2 < a_{1,2} < -1$.

$(a_1 - a_{1,1})(a_1 - a_{1,2}) < 0$ - между корнями т.к. парабола с ветвями вверх.

, $a_1 \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2\}$.

Чистовик

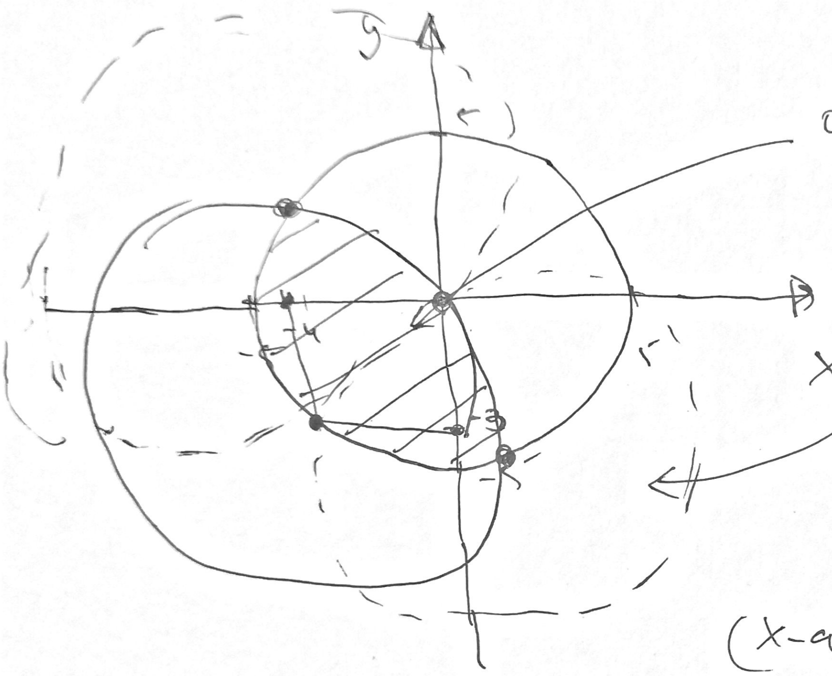
№3

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 25 \\ a^2+8a+b^2+6b \le 0 \\ a^2+8a+16+b^2+6b+9-25 \le 0 \\ (a+4)^2+(b+3)^2 \le 25 \end{cases}$$

$a^2+b^2 \le 25$ ← круг с центром $(0,0)$, $R=5$.

Последнее неравенство это 2-а круга

$(a+4)^2+(b+3)^2 \le 25$ ← круг $(-4;-3)$ ← центр; $R=5$.



Область где лежат a и b.

Фигура, площадь которой надо найти.

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 25$ – тоже круг с центром a, b $R=5$

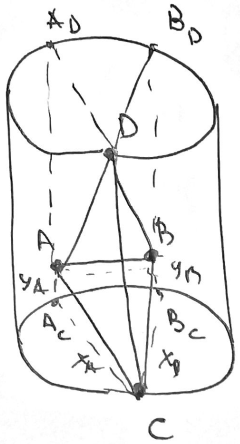
к, ч – внутри

S фигуры $= \underline{3\pi R^2}$ ← три круга. $= 3\pi \cdot 25 = \underline{75\pi}$

Ответ: 75π.

Чистовик

№2



1) опустим проекции точек A и B на основание цилиндра, проходящие через D и C.

Пусть $A_cC = x_A$; $B_cC = x_B$; $AA_c = y_A$; $BB_c = y_B$.

2) Т.к A и B лежат в плоскости боковой поверхности, то $AA_c \perp A_cC$, $BB_c \perp B_cC$.

Следовательно: $AA_c^2 + A_cC^2 = AC^2$; $B_cC^2 + BB_c^2 = BC^2$

$$(1)\ \begin{cases} y_A^2 + x_A^2 = AC^2 \\ x_B^2 + y_B^2 = BC^2 \end{cases}$$, Аналогично для $\triangle AA_DD$ и $\triangle DB_DB$:

$\boxed{CD = L}$ $$(2)\ \begin{cases} (L - y_A)^2 + x_A^2 = AD^2 \\ (L - y_B)^2 + x_B^2 = DB^2 \end{cases}$$

совмещая (1) и (2):

$$- \begin{cases} (L - y_A)^2 + AC^2 - y_A^2 = AD^2 \\ (L - y_B)^2 + BC^2 - y_B^2 = DB^2 \end{cases}$$, $AC = CB$, $AD = DB$

$$(L - y_A)^2 - (L - y_B)^2 = -y_B^2 + y_A^2$$

$\boxed{y_A \neq y_B}$ $$(-y_A + y_B)(2L - y_A - y_B) = (y_A - y_B)(y_A + y_B)$$

$$-(2L - y_A - y_B) = y_A + y_B$$

$L = 0$, что не подходит.

Следовательно, $y_A = y_B$, $x_A^2 = AC^2 - y_A^2 = 36 - y_B^2$; $x_B^2 = 6^2 - y_B^2 = x_A^2$ $\Rightarrow$ $x_A = x_B$

3) Пусть $\angle A_cCB_c = \alpha$ тогда $A_cB_c^2 = x_A^2 + x_B^2 - 2x_Ax_B \cdot \cos\alpha$, также по Т синусов, в $\triangle A_cCB_c$ - р/б: $\frac{x_A}{\sin(90 - \alpha/2)} = 2R$

также $(A_cB_c)^2 + (y_A - y_B)^2 = AB^2 = 4$

$x_A^2 + x_B^2 - 2x_Ax_B\cos\alpha + (y_A - y_B)^2 = 4$

Чистовик

$x_A^2(1-\cos\alpha) = 2$

$$x_A^2 + x_A^2 - 2x_A^2\cos\alpha = 4$$

$$\begin{cases} 2x_A^2(1-\cos\alpha) = 4 \\ \dfrac{x_A}{\cos(1/2\,\alpha)} = 2R \end{cases} + (2): \begin{cases} (L+y_A)^2 + x_A^2 = AB^2 = 49 \\ y_A^2 + x_A^2 = AC^2 = 36 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$(L+y_A)^2 + 36 - y_A^2 = 49$

$L^2 + 2Ly_A + 36 = 49$

$L^2 + 2Ly_A = 13$

$$y_A = \frac{13-L^2}{2L}$$

$x_A^2 = 36 - y_A^2 = 36 - \left(\dfrac{13-L^2}{2L}\right)^2.$

Итог:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x_A^2 - 2}{x_A^2} \\ x_A^2 = 36 - \left(\dfrac{13-L^2}{2L}\right)^2 \\ \dfrac{x_A}{\cos(1/2\,\alpha)} = 2R, \quad R \to \min \end{cases}$$

при $\alpha = ?$

Решая систему найдём $R_{\min}$

$$CD = x_A + y_A.$$

Черновик

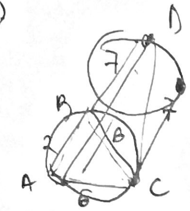
(1):

$$a_1^2+10a_1+25 \geq 0$$

$$(a_1+5)^2 \geq 0 \iff \text{при любом } a_1 .$$

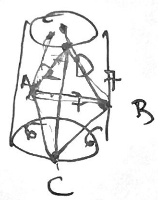
Ответ: $a \in [-9;-2]$, $a_1 \in \mathbb{Z}$

№2

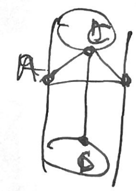


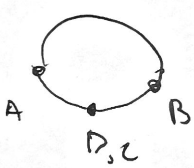
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 25 \\ a^2+b^2 \leq \min(-8a-6b, 25) \end{cases}$$

1)

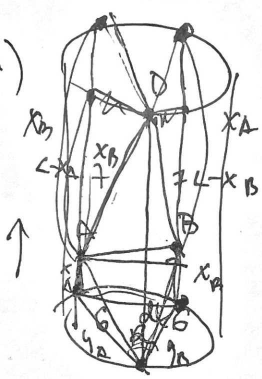


2)

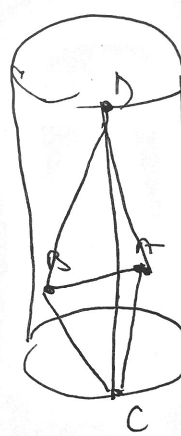




1)



$CD = L$



$$\begin{cases} (L-x_A)^2 = 7^2+36-x_A^2 \\ (L-x_B)^2 = 7^2+36-x_B^2 \end{cases}$$

$$(L-x_A)^2-(L-x_B)^2 = x_B^2-x_A^2$$

$$\cancel{(x_B-x_A)}(2L-x_A-x_B) = \cancel{(x_B-x_A)}(x_B+x_A)$$

$x_A = x_B$

$$\begin{cases} x_A^2+y_A^2=36 \Rightarrow y_A^2 = 36-x_A^2 \\ x_B^2+y_B^2=36 \\ (L-x_A)^2 = 7^2+y_A^2 \\ (L-x_B)^2 = y_B^2+7^2 \end{cases}, \quad AB=2.$$

$$AB^2 = (x_B-x_A)^2+(y_A^2+y_B^2-2y_Ay_B\cos\varphi)$$

$$2L-x_A-x_B = x_B+x_A$$

$$\cancel{2}L = x_B+x_A$$

$$x_B = L-x_A$$

$$\boxed{\frac{y_A}{\sin\alpha} = 2R} =$$

$$4 = (x_B-x_A)^2+y_A^2+y_B^2-2y_Ay_B\cos(180-2\alpha)$$

$$= (x_B-x_A)^2+y_A^2+y_B^2-2y_Ay_B\cos(2\alpha)$$

2

черновик

№1.

$$\begin{cases} S = a_1+a_2+\ldots+a_{14}, \quad a_9 \cdot a_{17} > S+12, \\ a_{11} \cdot a_{15} < S+47 \end{cases}$$

$a_2 = a_1+d$; $a_3 = a_2+d$ .....

$$S = \frac{2a_1+d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{2a_1+d(13)}{2} \cdot 14 = 14a_1+91d$$

$a_9 = a_1+d\cdot 8$; $a_{17} = a_1+d\cdot 16$; $a_{11} = a_1+d\cdot 10$; $a_{15} = a_1+d\cdot 14$

$$\begin{cases} (a_1+8d)(a_1+16d) > 14a_1+91d+12 \\ (a_1+10d)(a_1+14d) < 14a_1+91d+47 \end{cases}$$

$16 \cdot 8 = 128$

$$\begin{cases} a_1^2 + \overbrace{24a_1d}^{a} + 128d^2 > 14a_1+91d+12 \\ a_1^2 + 24a_1d + 140d^2 < 14a_1+91d+47 \end{cases}$$

$a > b \iff a-b>0$

$a+12d^2 < b+35 \iff a-b < 35-12d^2$

$12d^2 < 35$

$\boxed{d^2 < \frac{35}{12}}$, $d>0$

$$\begin{cases} a < b+(35-12d^2) \\ a > b \iff a = b+k, k>0 \end{cases}$$

$b+k < \cancel{b}+(35-12d^2)$

$k < 35-12d^2$, $d \in \mathbb{Z}$

$\boxed{d=1}$ $\Leftarrow$ 1) $\overset{d=1}{k < 23}$

2) $\overset{d=2}{k<0} - \varnothing$

.... <0

$$\begin{cases} a_1^2+24a_1+128 > 14a_1+\underbrace{91+12}_{103} \\ a_1^2+24a_1+140 < 14a_1+\underbrace{91+47}_{138} \end{cases}$$

$4,7-5 = -1,7$

(1) $a_1^2+10a_1+25>0$

(2) $a_1^2+10a_1+2<0$ — $D = 100-4\cdot 2 = 92$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104319**

ID профиля: **85228**

Вариант 19

чистовик

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=21 \\ НОК(a;b;c)=3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} a&=(3\cdot 7)\cdot 3^{k_1}\cdot 7^{n_1} \\ b&=(3\cdot 7)\cdot 3^{k_2}\cdot 7^{n_2} \\ c&=(3\cdot 7)\cdot 3^{k_3}\cdot 7^{n_3} \end{aligned}$$

Причём нельзя чтобы одновременно $k_1>0$, $k_2>0$, $k_3>0$, $n_1>0$, $n_2>0$, $n_3>0$. (НОД изменится)

1) Рассмотрим случаи для "3^4":

1) $k_1=0$; $k_2>0$; $k_3>0$. Тогда k_2 и $k_3 \le 15$ (≤ 16)

То есть $k_2=16$ $- k_3$ - любое (≤ 16) или $k_3=16$ $- k_2$ = любое (≤ 16).

Количество вариантов: $2\cdot 16=32$.

2) $k_2=0$, $k_1>0$, $k_3>0$ Аналогично -32

3) $k_3=0$, $k_1>0$, $k_2>0$ -32.

4) $k_1=0$; $k_2=0$; $k_3>0$ -1

5) $k_1=0=k_3$; $k_2>0$ -1

6) $k_2=k_3=0$; $k_1>0-1$

Итого для "3^4": $(3\cdot 32+3)=\underline{3\cdot 33}=3^2\cdot 11=99$

2) для "7^4": Аналогично 1):

1) $-2\cdot 14=28$
2) -28
3) -28
4) 1
5) 1
6) 1

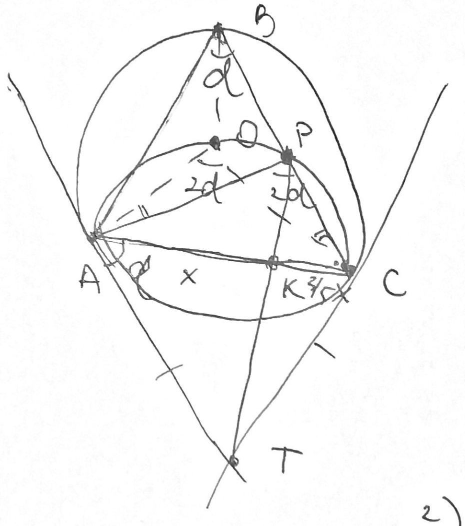
Итог: $(3\cdot 28+3)=\underline{3\cdot 29}=87$

3) Пристраиваю степени и "3^4" и "7^4". Следовательно, всего-то перемножение $("3^4"\times"7^4")=87\cdot 99=\underline{8613}$ вариантов 3-ех чисел.

Ответ: 8613

N6

чистовик



1) $\frac{\circ}{6}$ $S_{APK} = 1/2\, AK \cdot h$

$S_{PKC} = 1/2\, KC \cdot h$

$$\frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{10}{6} = \frac{AK}{KC}$$

$$KC = AK\frac{6}{10} = AK \cdot 3/5.$$

2) Т.к. AT и TC - касательные, то $AT = TC$. следовательно, $\angle TAC = \angle ACT = \alpha$.

$\angle OAT = 90°$, $\angle OCT = 90°$ $\Rightarrow$ $\angle OAC = 90° - \alpha$; $\angle OCA = 90° - \alpha$ (сумма углов $\triangle AOC$) $\Rightarrow$ $\angle AOC = 2\alpha$.

3) $\angle AOC = \angle APC$ т.к. лежат на одной окружности и опираются на 1-у дугу AC.

4) Мы получили, что четырёхугольник $APCT$ - вписанный т.к. $\angle APC = 2\alpha = 180 - \angle ATC = 2\alpha$. Тогда $AT = TC$ - равные хорды $\angle APT$ опирается на AT и $\angle TPC$ опирается на TC. одной окружн.

следовательно, $\angle APK = \angle TPC = \frac{\angle APC}{2} = \alpha$

5) $\angle ABC = \angle AOC/2 = \alpha$ (половина центр. угла для ω).

По 4): $\angle TPC = \alpha$.

6) $\triangle KPC \sim \triangle ABC$ ($\angle KPC = \angle TPC = \angle ABC = \alpha$; $\angle BCA$ - общий)

$$\frac{AC}{KC} = \frac{3/\cancel{5}x + x}{3/5x} = \frac{BC}{PC} \Rightarrow \frac{8/\cancel{5}}{3/\cancel{5}} = \frac{BC}{PC}$$

$$\boxed{\frac{8}{3} = \frac{BC}{PC}}.$$

2

Чистовик.

a) $S_{ABC} = 1/2\, BC \cdot h_A$; $S'_{APC} = 16 = 1/2\, PC \cdot h_A$

Следовательно: $S_{ABC} = S'_{APC} \cdot \frac{BC}{PC} = 16 \cdot \frac{8}{3} = \frac{128}{3}$

Ответ (а): $S'_{ABC} = \frac{128}{3}$

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg} \alpha$

1) $\begin{cases} \text{По т. синусов: } \frac{AC}{\sin\alpha} = 2R \\ S'_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R} \end{cases}$ $\Leftrightarrow AB \cdot BC/2 \sin\alpha = S'_{ABC}$

2) $\begin{cases} \frac{AC}{\sin(2\alpha)} = 2R_1 \\ S'_{APC} = \frac{AP \cdot PC \cdot AC}{4R_1} \end{cases}$ $\Leftrightarrow S'_{APC} = \frac{AP \cdot PC \cdot \cancel{AC}}{2\cancel{AC}} \sin(2\alpha) =$

$= AP \cdot PC/2 \cdot \sin 2\alpha$

$, BC/PC = 8/3.$

$\frac{AB}{AP} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{128/3}{16}$

$\frac{AB}{AP} = 1 \bigg/ \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$

$\frac{BC}{\sin(90+\alpha)} = \frac{PC}{\sin\angle PAC}$ Посчитаем и найдём из системы.

N5

Чистовик

A: $\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}-1)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$

Б: $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)=2\log_{(x-\frac{11}{4})}\left(\frac{x}{2}-1\right)$

C: $\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=2\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}\left(x-\frac{11}{4}\right)$

Область определения:

корень $\Rightarrow x>\frac{11}{4}$, при этом можно проверив все остальные столбцы >0 $\Rightarrow$ ОДЗ: $x>\frac{11}{4}$ $x\neq 4$ $x\neq 5/2$ $x\neq 15/4$

Три варианта: $A=Б$; $A=C$; $C=Б$

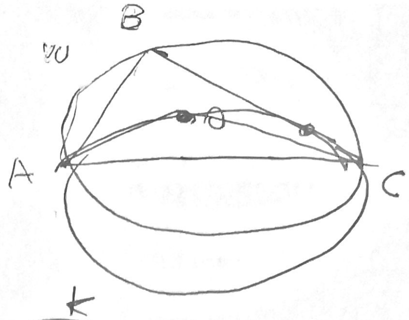
$$\boxed{\log_x y=\frac{1}{\log_y x}}$$

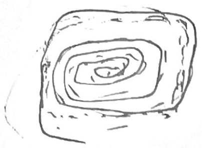
Черновик

$|21; 21; 21|$

N4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 21 \\ НОК(a;b;c) = 3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$$





НОК

$$\begin{cases} \overbrace{НОД(a;b;c)}^{d}\cdot \overbrace{НОК(a;b;c)}^{k} = a\cdot b\, c \\ НОД(a;b;c) = 21 \\ НОК(a,b,c) = 3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$$

$\times\begin{array}{r}87\\99\\\hline 783\\783\\\hline 8613\end{array}$

$$\begin{cases} d\cdot k = abc \\ d = 21,\ k = 3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$$

$21\cdot 3^{17}\cdot 7^{15} = a\cdot b\cdot c$

$3^{18}\cdot 7^{16} = a\cdot b\cdot c$

$0..18 \quad 0..16$

$(18\ 16)\cdot 17\ 15$

$a, b, c \geq 3^1\cdot 7^1$

2 13

1 14

0 15

$3^1\cdot 7^1 \quad 3\cdot 7^1 \quad 3^1 7^1$

ex: $3^{15}\cdot 7^{13}$

$15 - 3^4 \quad 13 - 7^4$

0 $\quad 0..15$

16

1 $\quad 15^{0..14}$

....

16 $\quad 0 \quad 0$

$15+14+$

$(16+15+14+\ldots 1)+$

$+(14\ldots+1) =$

$= \frac{16\cdot 17}{2} + \frac{14\cdot 13}{2} = 8\cdot 17 + 7\cdot 13 =$

$= 227$

$\times\begin{array}{r}17\\8\\\hline 136\end{array} \quad \times\begin{array}{r}13\\7\\\hline 91\end{array}$

$+\begin{array}{r}136\\91\\\hline 227\end{array}$

$k_1+k_2 = 14$

$3^{14};\ 7^{12}$

$(21)^3 = 3^{17}\cdot 7^{15}\cdot 21$

3

1) $k > 0$ и $n > 0$

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3 = \\ \end{cases}$$

$3\cdot 7$

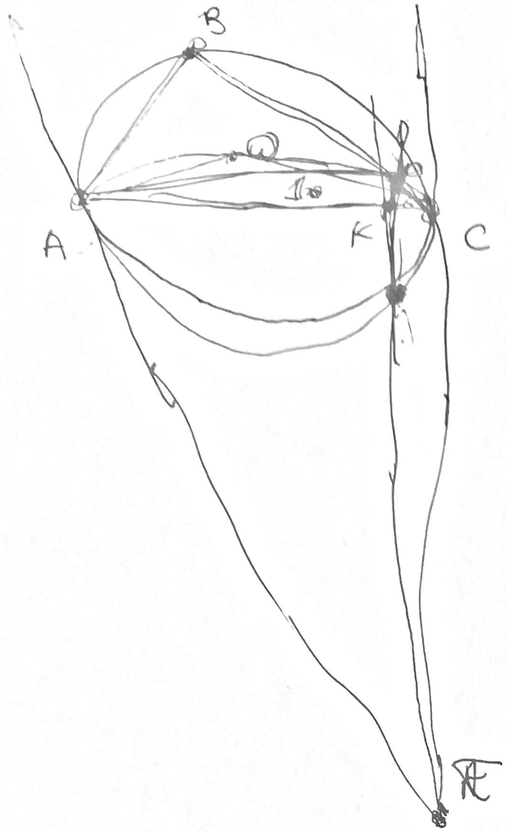
1) X V V V 2) V X V 3) V V X

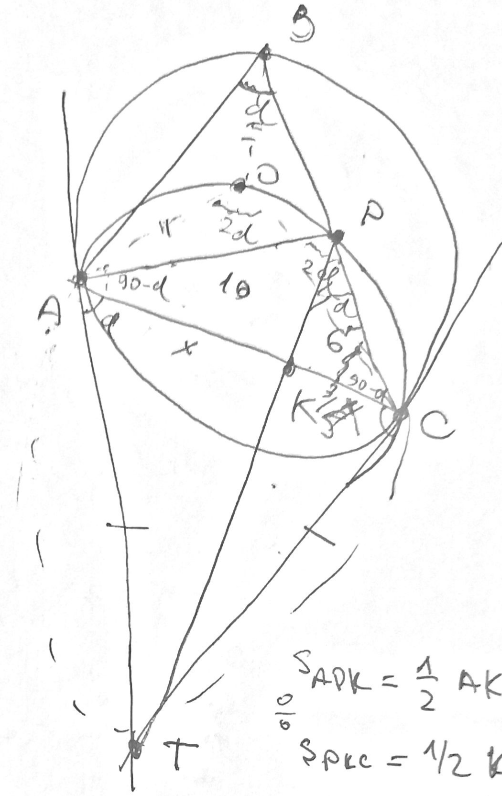
4) X X V 5) X V X 6) V X X

$$\left[\begin{array}{l} (7\cdot 3)\cdot 3^{k_1}\cdot 7^{n_1} \\ (7\cdot 3)\cdot 3^{k_2}\cdot 7^{n_2} \\ (7\cdot 3)\cdot 3^{k_3}\cdot 7^{n_3} \end{array}\right.$$

$\max(k_1, k_2, k_3)$

N6





$x \cdot 3/5 x =$

$S_{APK} = \frac{1}{2} AK \cdot h$

$S_{PKC} = 1/2\, KC \cdot h$

$\frac{10}{6} = \frac{AK}{KC}$

$KC = AK \cdot \frac{6}{10} = AK \cdot \frac{3}{5}$