Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104300**

ID профиля: **314162**

Вариант 19

Чистовик

Математика, 11кл

1.

$a_n = a_1 + (n-1)d$

Т.к. ~~$a_n \in \mathbb{Z}$, $n-1 \in \mathbb{Z}$ =>~~ при $n=2$ $a_2 - a_1 = d$,

$a_2, a_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow d \in \mathbb{Z}$

$a_9 = a_1 + 8d$

$a_{17} = a_1 + 16d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{15} = a_1 + 14d$

$$S = \frac{(2a_1 + (n-1)d)n}{2}$$

$$S = \frac{(2a_1 + 13d)14}{2} = 14a_1 + 7 \cdot 13d = 14a_1 + 91d$$

$$\begin{cases} (a_1+8d)(a_1+16d) > 14a_1 + 91d + 12 \\ (a_1+10d)(a_1+14d) < 14a_1 + 91d + 47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1d + 128d^2 > 14a_1 + 91d + 12 \\ a_1^2 + 24a_1d + 140d^2 < 14a_1 + 91d + 47 \end{cases}$$

Пускай $a_1^2 + 24a_1d + 128d^2 - 14a_1 - 91d = t$

$$\begin{cases} t > 12 \\ t + 12d^2 < 47 \end{cases}$$

$t + 12d^2 + 12 < 47 + t$

$12d^2 < 35$

При $|d| \geq 2$ $12d^2 \geq 48$, $d \in \mathbb{Z}$

Значит d может быть равно $-1, 0, 1$

Т.к. последовательность возрастающая, $d > 0$

Чистовик

Значит $d = 1$

$$\begin{cases} a_1^2+24a_1+128 > 14a_1+91+12 \\ a_1^2+24a_1+140 < 14a_1+91+47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+10a_1+25 > 0 \\ a_1^2+10a_1+2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+5)^2 > 0 \\ a_1^2+10a_1+2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \neq -5 \\ a_1^2+10a_1+2 < 0 \end{cases}$$

$$D = 100-8 = 92 = 4 \cdot 23$$

$$\begin{cases} a_1 \in \left(\frac{-10-2\sqrt{23}}{2}; \frac{-10+2\sqrt{23}}{2}\right) \\ a_1 \neq -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \in (-5-\sqrt{23}; -5+\sqrt{23}) \\ a_1 \neq -5 \end{cases}$$

$$4 < \sqrt{23} < 5$$

$$-10 < -5-\sqrt{23} < -9$$

$$-1 < -5+\sqrt{23} < 0$$

$$a_1 = -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$$

Ответ: $a_1 = -1; -2; -3; -4; -6; -7; -8; -9.$

21104300 (U314162 M1302320)

Чистовик

Математика, 11кл

3.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 25 \\ a^2+b^2 \leq \min(-8a-6b, 25). \end{cases}$$

Займёмся вторым неравенством.

$$a^2+b^2 \leq \min(-8a-6b, 25)$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2+b^2 \leq 25 \\ -8a-6b \geq 25 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+b^2 \leq -8a-6b \\ -8a-6b < 25 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2+b^2 \leq 25 \\ b \leq -\frac{8}{6}a - \frac{25}{6} \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+8a+16+b^2+6b+9 \leq 25 \\ b > -\frac{4}{3}a - \frac{25}{6} \end{cases} \end{array}\right.$$

Нарисуем это на координатной плоскости $b(a)$.

$b = -\frac{4}{3}a - \frac{25}{6}$

При $a=0$ $b = -\frac{25}{6} = -4\frac{1}{6}$

При $b=0$ $a = -\frac{25}{8} = -3\frac{1}{8}$

$b = -\frac{4}{3}a - 25$ пересекается ω_1 и ω_2 в одних и тех же точках.

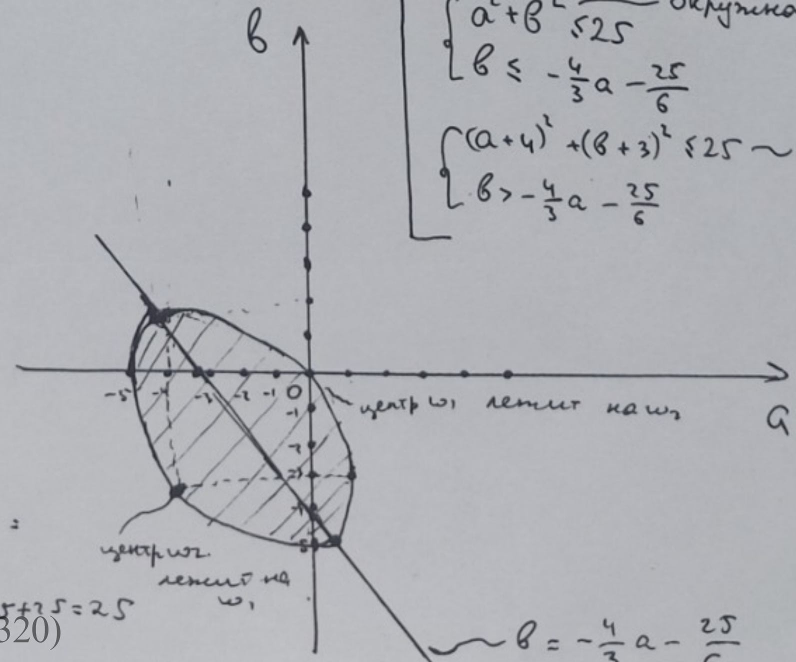
$a^2+b^2=25$

$b = -\frac{4}{3}a - \frac{25}{6}$

$(a+4)^2+(b+3)^2 = a^2+b^2+8a+6b+25 =$

$= 25 + 6\left(b+\frac{4}{3}a\right)+25 = 25-25+25 = 25$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2+b^2 \leq 25 \text{ — окружность } \omega_1 \\ b \leq -\frac{4}{3}a - \frac{25}{6} \end{cases} \\ \begin{cases} (a+4)^2+(b+3)^2 \leq 25 \sim \text{окружность } \omega_2 \\ b > -\frac{4}{3}a - \frac{25}{6} \end{cases} \end{array}\right.$$



21104300 (U314162 M1302320)

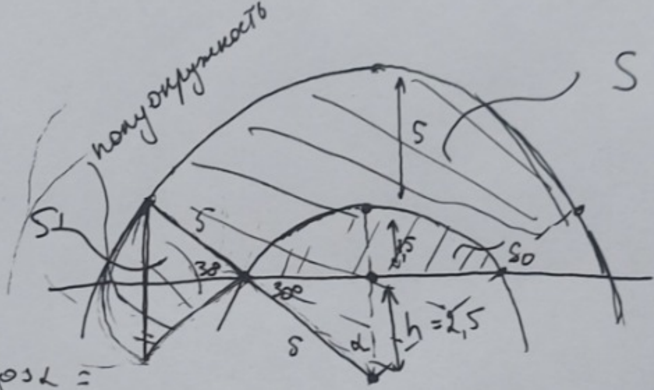
Заметим, что дуги окружностей симметричны относительно прямой $b = -\frac{4}{3}a - \frac{25}{6}$

3

Теперь рассмотрим первое неравенство.

Оно задаёт ~~окружность~~ круг радиуса 5. с координатами x и y. Система же означает, что такой ~~окружность~~ круг имеет хотя бы одну точку пересечения с полученной фигурой.

Такое выполняется, когда (x, y) лежит на расстоянии 10 от центра окружности (ω_1, если $b \le -\frac{4}{3}a - \frac{25}{6}$, ω_2 если больше).



$$\cancel{S_0 = r^2\left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}\right) =}$$

$$\cancel{= r^2 \arccos\left(\frac{h}{r}\right) - r^2 \sin\alpha\cos\alpha =}$$

$$\cancel{= r^2 \arccos\left(\frac{1}{2}\right) - r^2 \cdot \frac{h}{r} \cdot \frac{\sqrt{r^2-h^2}}{r} = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{5}{2}\sqrt{25-\frac{25}{4}} = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{5\sqrt{75}}{4} = -\frac{25}{4}\sqrt{2} + \frac{\pi r^2}{3} =}$$

$$\cancel{= 25\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)}$$

~~$S = 4S_0$, т.к. ГМТ (x, y) получается гомотетией~~

$$\cancel{S_0 + \frac{5 \cdot 2{,}5}{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{2{,}5}{5} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 60°.$$

$$S_0 + \frac{\sqrt{3} \cdot 5 \cdot 5}{4} = \pi \cdot 5^2 \cdot \frac{2\pi}{3 \cdot 2\pi}$$

$$S + \frac{\sqrt{3} \cdot 25}{4} = 4\left(S_0 + \frac{\sqrt{3} \cdot 25}{4}\right) = \frac{4 \cdot 25}{3} \cdot \pi$$

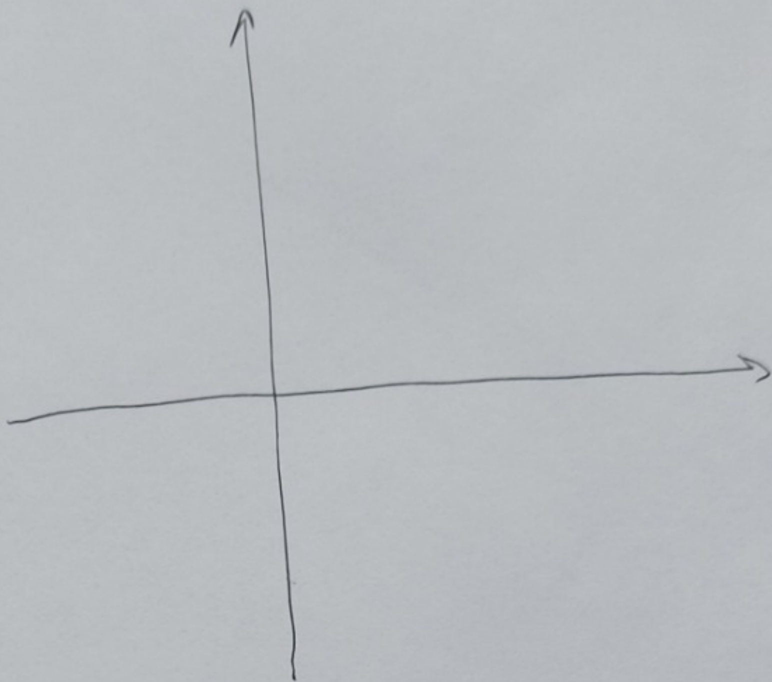
$$S = 25\left(\frac{4}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{25}{12}\left(16\pi - 3\sqrt{3}\right)$$

$$S_1 = \pi \cdot 25 \cdot \frac{\pi}{3 \cdot 2\pi} = \frac{25}{6}\pi$$

$$S_{общ} = 2(S + S_1) = \frac{25}{6}\left(16\pi - 3\sqrt{3}\right) + \frac{50\pi}{6} = \frac{25}{6}\left(18\pi - 3\sqrt{3}\right)$$

Ответ: $\frac{25}{6}\left(18\pi - 3\sqrt{3}\right)$

Черновик



$\cancel{a_1 + 2a}$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$140 - 91 =$
$= 9 + 40 = 45 - 47 = 2$

$S = \frac{(a_1 + a_n)\cancel{(a_1 + a_n)}n}{2} = \frac{(2a_1 + (n-1)d)n}{2} =$

$= 14a_1 + 7d \cdot 13 = 14a_1 + 91d$

$a_9 = a_1 + 8d$

$a_{17} = a_1 + 16d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{15} = a_1 + 14d$

$(a_1 + 8d)(a_1 + 16d) > 14a_1 + 91d + 12$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 14d) > 14a_1 + 91d + 47$

$a_1^2 + 24a_1d + 128d^2 > 14a_1 + 91d + 12$

$128 - 72 =$
$= 56$

$\cancel{(a_1 + 2 \cdot 12d)^2}$

$a_1^2 + 24a_1d + 128d^2 > 14a_1 + 91d + 12$

$a_1^2 + 24a_1d + 140d^2 < 14a_1 + 91d + 47$

$2(a_1 + 6d)^2 + 56d^2 - 91d > a_1^2 + 14a_1 + 12$

$2(a_1 + 6d)^2 + 56d^2 - 91d + 37 > a_1^2 + 14a_1 + 49$

a_1

$12d^2 + t < 47$

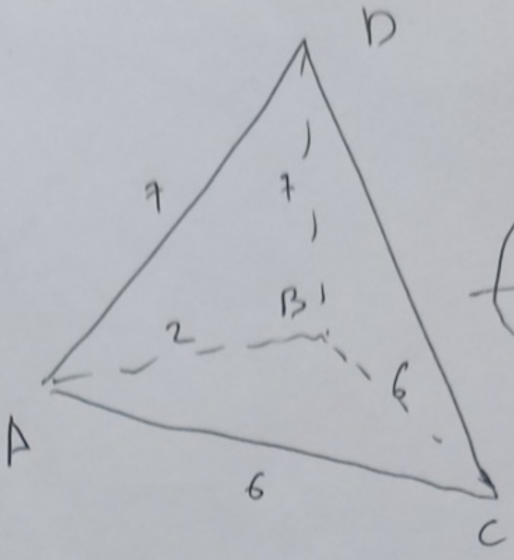
$t > 12$

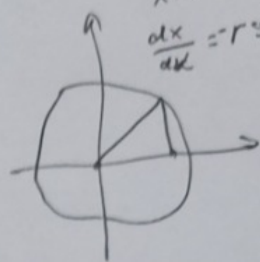
$12d^2 < 35$

$d = 1$

$d = 2$

Черновик





$x = r\cos\lambda$

$\frac{dx}{d\lambda} = -r\sin\lambda$

$\lambda = \arccos\left(\frac{h}{r}\right)$

$r^2\lambda - h\sqrt{r^2-h^2}$

$\frac{1-\cos 2\lambda}{2}$

$\frac{r^2}{2}\left(\lambda - \frac{\sin 2\lambda}{2}\right)$

$r^2\left(\lambda - \frac{\sin 2\lambda}{2}\right) =$

$= r^2(\lambda - \sin\lambda\cos\lambda)$

$r^2\int \sin^2\lambda\, d\lambda =$

$= r^2\int_0^{\lambda} \frac{1-\cos 2\lambda}{2}\, d\lambda =$

$= \frac{r^2}{2}\int (1-\cos 2\lambda)$

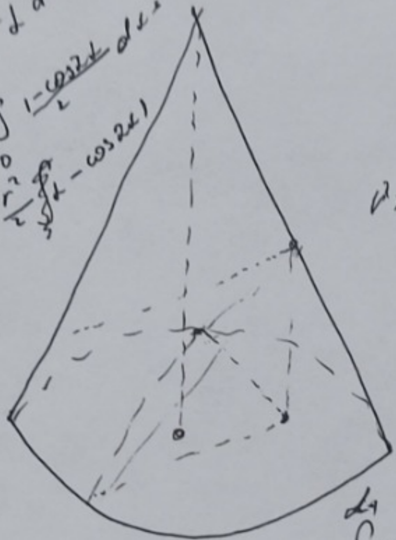
$-8a - 6b \leq 25$

r^2

$\frac{\sin 2\lambda}{2} =$

$= \sin\lambda\cos\lambda =$

$\frac{h\sqrt{r^2-h^2}}{r^2}$



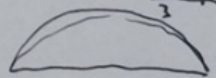
$\frac{3hr^2 - r^3 + h^3}{3}$

$r^2x - \frac{x^3}{3}\Big|_{r-h}^{r} = x\left(r^2 - \frac{x^2}{3}\right) =$

$= r^3 - (r-h)r^2 -$

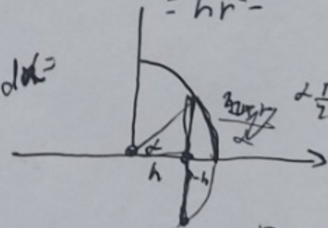
$-\frac{r^3 - h^3}{3} = hr^2 -$

$-\frac{(r-h)(h^2+rh+r^2)}{3}$



$= hr^2 -$

$\int_0^{\lambda_1} \sin^2\lambda \cdot r^2 \cdot d\lambda =$

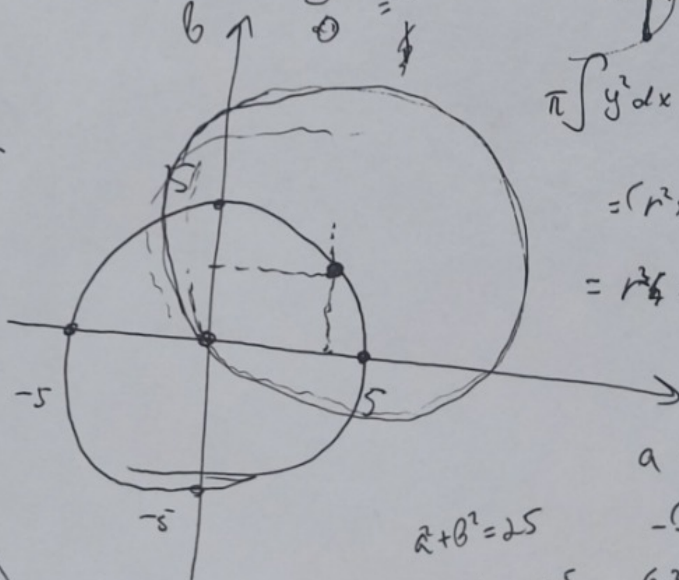


$a^2 + b^2 \leq -8a - 6b$

$a^2 + 8a + b^2 + 6b \leq 0$

$a^2 + 8a + 16 + b^2 + 6b + 9 \leq 25$

$(a+4)^2 + (b+3)^2 \leq 25$



$\pi\int y^2 dx = \int_h^r r^2 - x^2\, dx =$

$= \left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_h^r =$

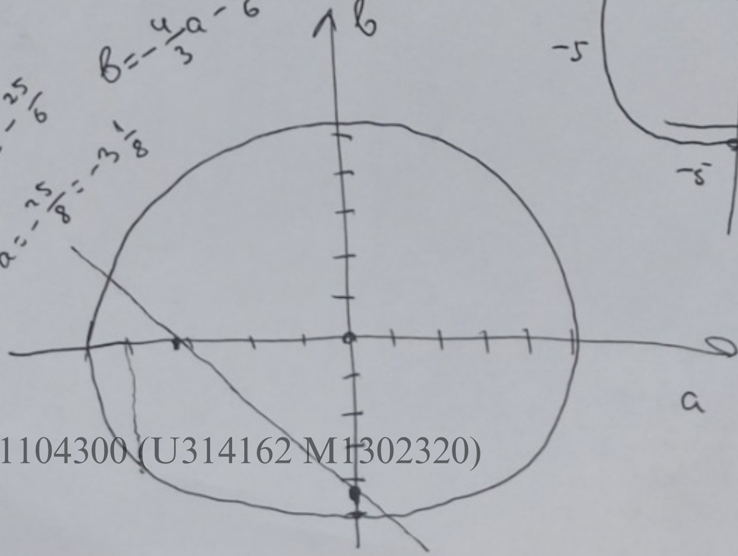
$= r^3 - \frac{r^3}{3} - hr^2 + \frac{h^3}{3}$

$\frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}$

$b = -\frac{4}{3}a - \frac{25}{6}$

$\frac{4}{3}a = -\frac{25}{6}$

$a = -\frac{25}{8} = -3\frac{1}{8}$



$a^2 + b^2 = 25$

$b = -\frac{4}{3}a - \frac{25}{6}$

$(a+4)^2 + (b+3)^2 =$

$= a^2 + 8a$

$a = r^2(r-h) -$

$-\frac{(r-h)(r^2+rh+h^2)}{3} =$

$= \frac{(3r^2 - r^2 - rh - h^2)(r-h)}{3}$

$-\frac{16}{3} - \frac{25}{6} =$

$= \frac{-32-25}{6} =$

$= -\frac{57}{6}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104300**

ID профиля: **314162**

Вариант 19

Чистовик

Математика, 11 кл.

4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 21 \\ НОК(a;b;c) = 3^{17} \cdot 7^{15} \end{cases}$$

Поделим числа a, b и c на 21.

Получим a', b', c'

$$\begin{cases} НОД(a';b';c') = 1 \\ НОК(a';b';c') = 3^{16} \cdot 7^{14} \end{cases}$$

Заметим, что все 3 числа не могут делиться ни на 3, ни на 7.

В таком случае одно из чисел будет степенью семёрки, ~~другое~~ одно – степенью тройки.

При этом как минимум одно из чисел ~~является~~ делится на 7^{14} и одно – на 3^{16} (иначе НОК был бы меньше).

Тогда есть 3 варианта:

1) $\underline{3^{16}}$ $\underline{3^x \cdot 7^y}$ $\underline{7^{14}}$, $0 \leq x < 16$, $0 \leq y < 14$

Таких вариантов 13·15. С учётом перестановок – – 13·15·6.

2) $\underline{3^x}$ $\underline{3^{16} \cdot 7^y}$ $\underline{7^{14}}$, $0 \leq x \leq 16$, $0 \leq y < 14$

Вариантов 17·14 ·6

3) $\underline{3^{16}}$ $\underline{3^x \cdot 7^{14}}$ $\underline{7^y}$ Аналогично 17·16·14·6

21104300 (U314162 M1302321)

4) $\cancel{3^{16}}$ $\underline{3^x}$ $\underline{3^{16} \cdot 7^{14}}$ 7^y, $0 \leq x \leq 16$, $0 \leq y \leq 14$

Вариантов 17·15·6

Чистовик

Математика, 11 кл

Сложим полученные результаты:

$n = 6(13 \cdot 15 + 2 \cdot 17 \cdot 14 + 17 \cdot 15) = 6(34 \cdot 14 + 30 \cdot 15) =$

$= 6(340 + 120 + 16 + 450) = 6(910 + 16) = 6 \cdot 926 =$

$\begin{array}{r} 926 \\ \times\ 6 \\ \hline 5556 \end{array}$

$= 5556$

Ответ: 5556

21104300 (U314162 M1302321)

Математика, 11 кл

Чистовик

5.

Обозначим данные числа за a, a, $a+1$ (мы не знаем, какому числу соответствует каждый логарифм).
(а также за x, y, z).

$$x = \log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$$

$$y = \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right) = 2\log_{\left(x-\frac{11}{4}\right)}\left(\frac{x}{2}-1\right)$$

$$z = \log_{\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2 = 2\log_{\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}\left(x-\frac{11}{4}\right)$$

ОДЗ:

$1 \neq \frac{x}{2}-\frac{1}{4} > 0$

$1 \neq \frac{x}{2}-1 > 0$

$1 \neq x-\frac{11}{4} > 0$

Заметим, что $a \cdot a \cdot (a+1) = \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot 2 = 2$

$a^3 + a^2 - 2 = 0$

$(a-1)(a^2+2a+2) = 0$

$(a-1)((a+1)^2+1) = 0$

$a = 1$ – единственный корень.

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{2}-1\right)^{\cancel{4}} = \frac{x}{2}-\frac{1}{4} \\ \frac{x}{2}-1 = \sqrt{x-\frac{11}{4}} \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4} = \left(x-\frac{11}{4}\right)^2 \end{cases}$$

$\frac{x^2}{4} - x + 1 = x - \frac{11}{4}$

$x^2 - 8x + 15 = 0$

$(x-3)(x-5) = 0$

$x = 3$

$\frac{1}{2^4} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}$

Нет решений

$x = 5$

$\frac{9}{4}$ ... $\frac{10-1}{4}$

Нет решений

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{2}-1\right)^2 = \frac{x}{2}-\frac{1}{4} \\ \left(\frac{x}{2}-1\right) = x-\frac{11}{4} \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4} = \left(x-\frac{11}{4}\right)^2 \end{cases}$$

$\frac{x}{2} = \frac{7}{4}$

$\frac{7}{4} - \frac{1}{4} = \left(\frac{14-11}{4}\right)^2$

$\frac{6}{4} = \frac{9}{16}$

$3 = 4$

Нет решений

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{2}-1\right)^2 = \frac{x}{2}-\frac{1}{4} \\ \frac{x}{2}-1 = \sqrt{x-\frac{11}{4}} \\ \left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)^2 = \left(x-\frac{11}{4}\right)^2 \end{cases}$$

$\frac{x^2}{4} - x + 1 = x - \frac{11}{4}$

$x^2 - 8x + 15 = 0$

$x = 3$

$\left(\frac{6-1}{4}\right)^2 = \left(\frac{12-11}{4}\right)^2$

$25 = 1$

Нет решений

$\Rightarrow x = 5$

$\left(\frac{10}{4}-\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{20-11}{4}\right)^2$

$\frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4} = \frac{5\cdot 2}{4} - \frac{1}{4}$

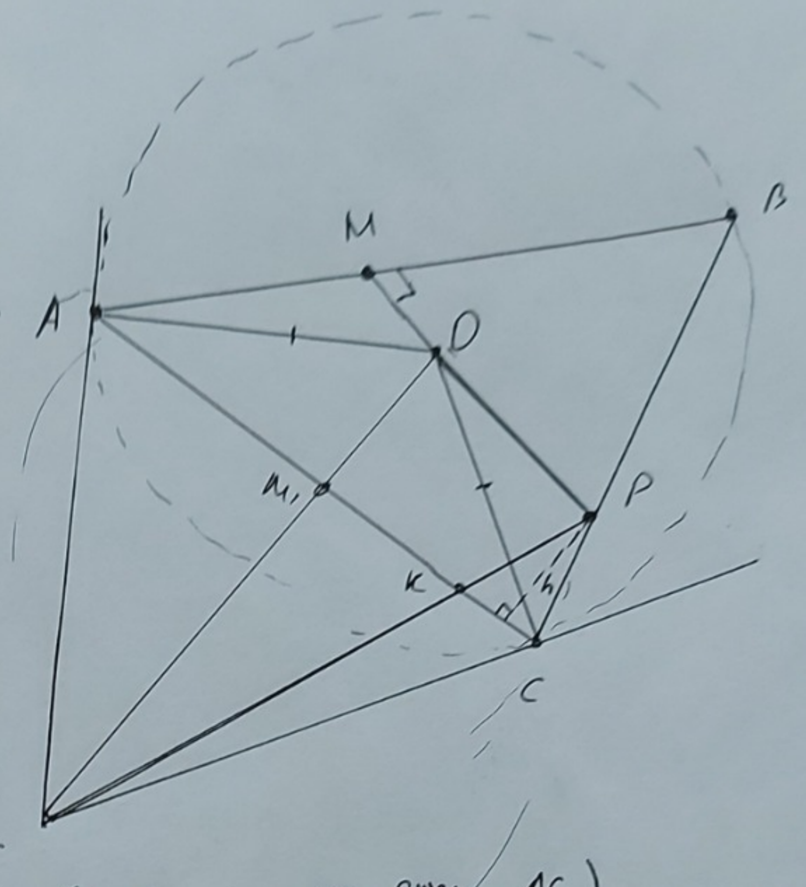
$\boxed{x = 5}$

3

Корень $x=5$ подходит под ОДЗ и все уравнения при $x=1$, $y=1$, $z=2$.

Ответ: $x=5$.

6.



$\angle OAT$ ~~$\angle AOT$~~ $= \angle OCT = 90^\circ$

$\Downarrow$

AOCT – вписс. четырёхугол.

$\Downarrow$

A, O, P, C, T – лежат на одной окружности

$AT = CT$ – из усл.

$\triangle AOT = \triangle COT$ – по 3 сторонам.

$\Downarrow$

$\angle AOT = \angle COT = \angle TPC$

$\angle ABC = \angle AOT = \angle COT = \frac{1}{2}\angle AOC$ ($\angle ABC$ опир. на дугу AC.)

$\angle TPC = \angle ABC$

$AB \parallel PT$.

$\triangle ABC \sim \triangle KPC$

коэффициент подобия – $\frac{3}{8}$

$S_{APK} = 10$

$S_{CPK} = 6$

$S_{APK} = AK \cdot h = 10$

$S_{CPK} = KC \cdot h = 6$

$\frac{KC}{AC} = \frac{KC}{KC+AK} = \frac{\frac{6}{h}}{\frac{6}{h}+\frac{10}{h}} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

$\frac{S_{KPC}}{S_{ABC}} = \frac{9}{64}$

$$\boxed{S_{ABC} = \frac{64}{9} \cdot S_{KPC} = \frac{64}{9} \cdot 6 = \frac{128}{3}}$$

OTCP – вписанный $\Rightarrow \angle OTC = \angle OPB$

$\angle OTC = 90^\circ - \angle ABC$

Продлим PO до пересечения с AB. $\angle PMB = 90^\circ$, $AO = OB$.

$\Downarrow$

$AM = MB$.

21104300 (U314162 M1302321)

Чистовик.

Пусть $\angle ABC = \alpha$. M_1 - середина AC.

$\angle OTC = \angle M_1CO = 90° - \alpha$

$\frac{OM_1}{R} = \cos\alpha$

радиус опис. окр. $\triangle ABC$

$OM_1 \cdot M_1T = \frac{AC^2}{4}$ - степень точки M_1

$M_1O + TM_1 = \frac{\cos\alpha}{R}$

$\cos\alpha R \left(\frac{\cos\alpha}{R} - \cos\alpha R\right) = \frac{AC^2}{4}$

$\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R$

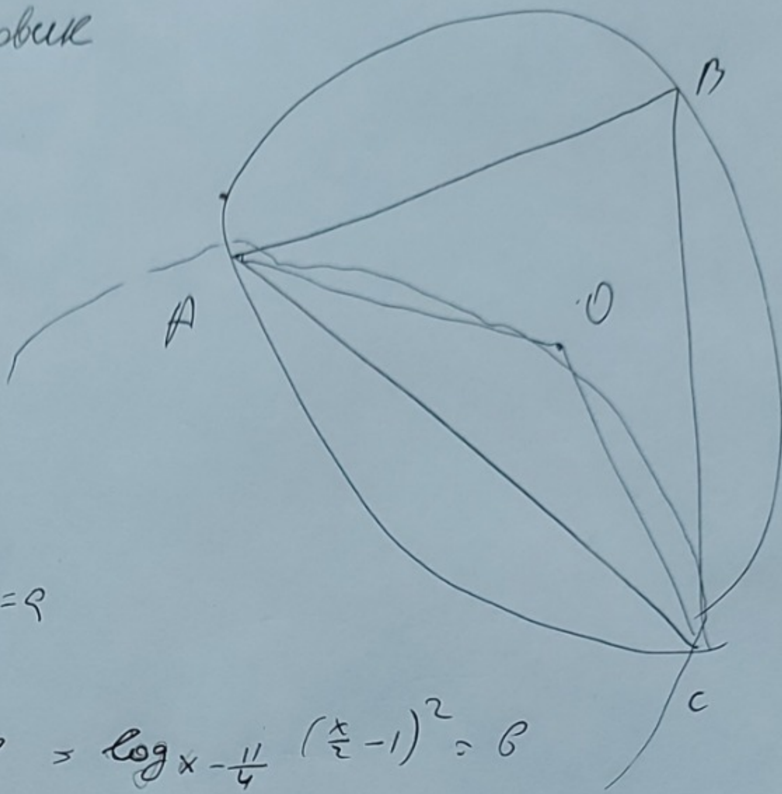
$\cos^2\alpha(1 - R^2) = \frac{AC^2}{4}$

~~AC~~

21104300 (U314162 M1302321)

Черновик

2.



$a = 21x$

$b = 21y$

$z = 21z$

$\frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = a$

$\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right) = b \Rightarrow \log_{x-\frac{11}{4}}\left(\frac{x}{2}-1\right)^2 = b$

$2\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2 = c$

$\log_{\frac{x}{2}-1}\left(x-\frac{11}{4}\right) = ac$

$(a-1)^2 a = \frac{1}{2}$

$a^3 - 2a^2 + a - \frac{1}{2} = 0$

$\frac{2a^3-1}{2} - a(2a-1)\ a^3 + a^2 - \frac{1}{2} = 0$

$2abc = 1$

$t^3 + 2t^2 - 4 = \cancel{\frac{t^2}{2t}}$

$2a^2(a+1) = 1$

$-0{,}25 + 0{,}5 - 1 = -1{,}5$

$2a^3 + 2a^2 - 1 = 0$

$\cancel{2a^2 + 4a = 0}$

$\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}-1}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) \cdot 2\log_{x-\frac{11}{4}}\left(\frac{x}{2}-1\right) \cdot 2\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}$

$\frac{a^2(a+1)}{2} = 1$

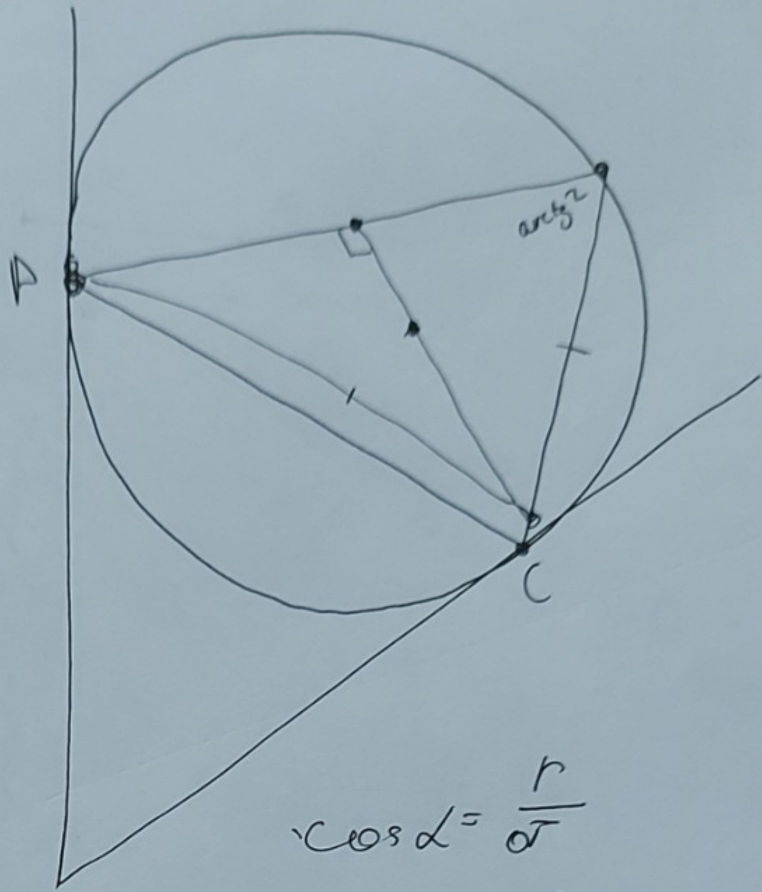
$a^3 + a^2 - 2 = 0$

21104300 (U314162 M1302321)

$a = 1$

$(a-1)(a^2+2a-2) = 0$

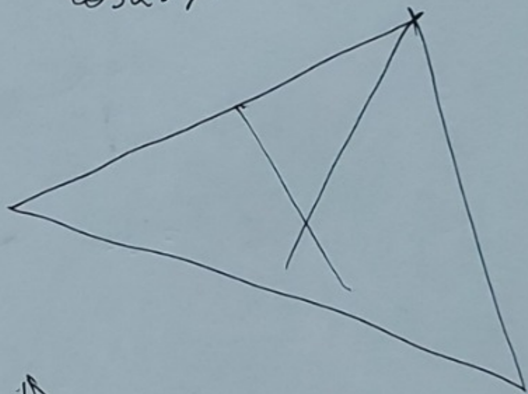
Черновик

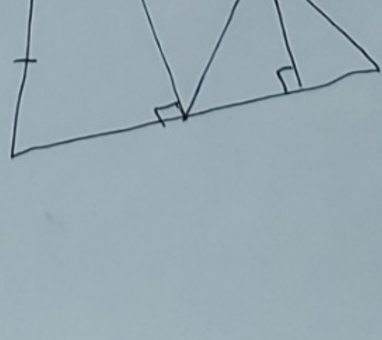


$\cos\alpha = \frac{r}{OT}$

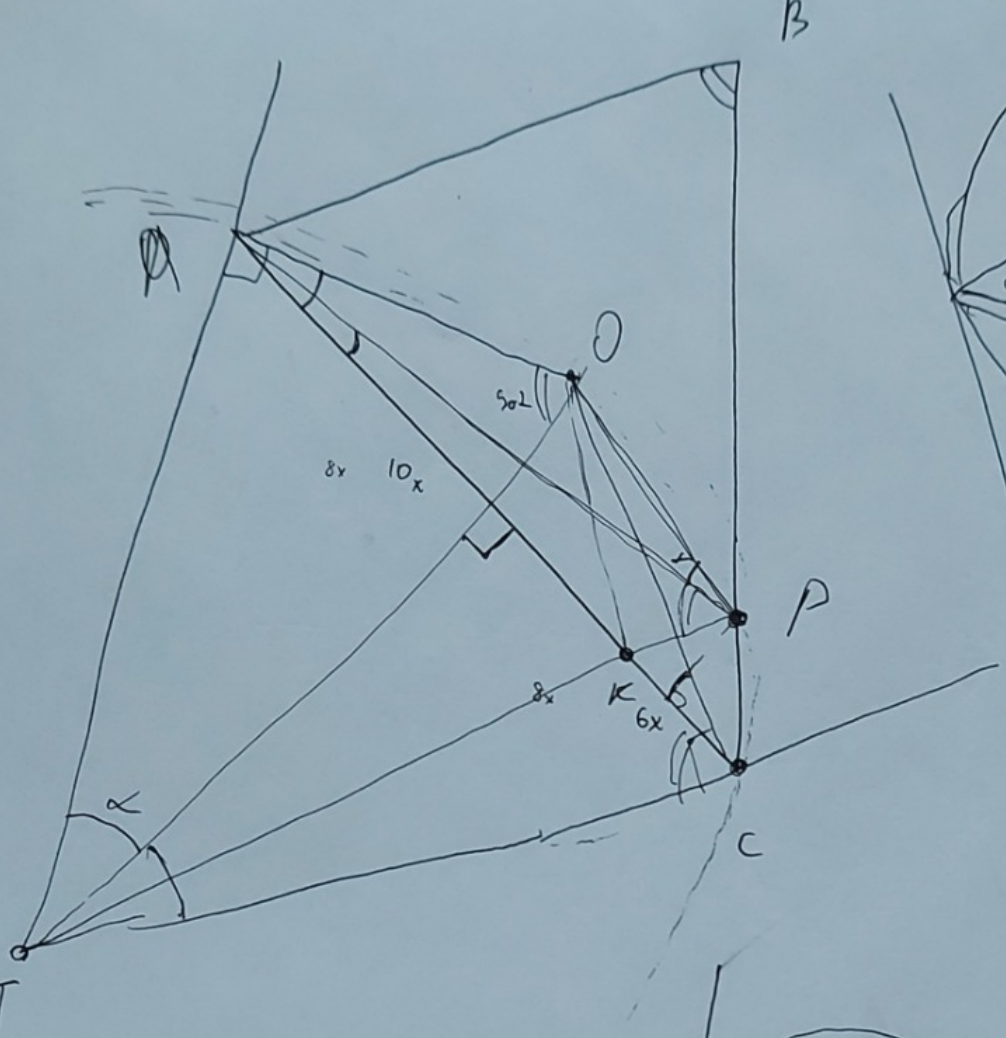
$OM_1 \cdot M_1T = \frac{AC^2}{4}$

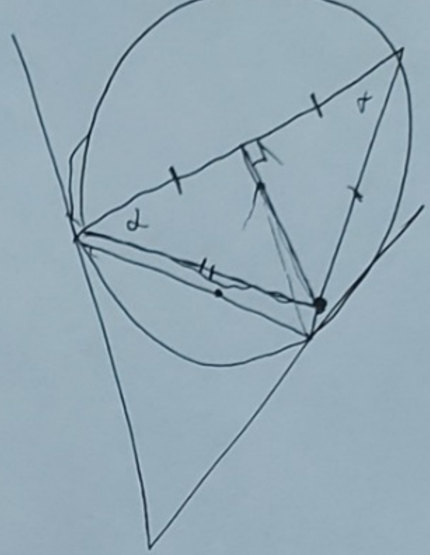
$\cos\alpha \cdot r$





Черновик.





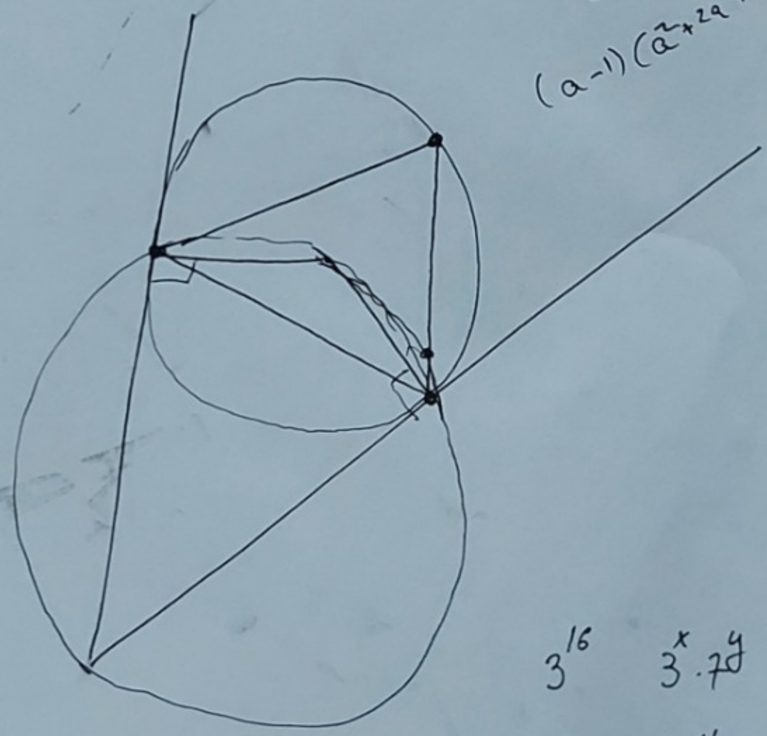
$3^{x_1}\cdot 7^{y_1}$

$3^{x_2}\cdot 7^{y_2}$

$3^{x_3}\cdot 7^{y_3}$

$(a-1)(a^2+2a+2)=0$

$$\begin{array}{r} \cdot 3 \\ 526 \\ \times\quad 6 \\ \hline 5556 \end{array}$$



$\frac{AC}{\sin\alpha}=2R$

$2R^2(1-\cos2\alpha)=AC^2$

$AC^2=4R^2\sin^2\alpha=$

$=$

$yz=1$

$\alpha=\frac{4}{2}$

$3^{16}\quad 3^x\cdot 7^y\quad 7^{14}$

$3^x\cdot 3^{16}\,\cancel{7}^{14}$

$yz=4\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}\left(\frac{x}{2}-1\right)=\frac{1}{2x}\cdot 4$

$yz=\frac{1}{2x}$