Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104265**

ID профиля: **340160**

Вариант 19

Чистовик ①

Задача 1

Пусть d – разность арифметической прогрессии. Так как прогрессия возрастающая, то $d>0$.

$a_9=a_1+8d$; $a_{17}=a_1+16d$; $a_{11}=a_1+10d$; $a_{15}=a_1+14d$.

$$\begin{cases}(a_1+8d)\cdot(a_1+16d)>S+12\\(a_1+10d)(a_1+14d)<S+47\end{cases}$$

$S=a_1+a_1+d+a_1+2d+\ldots=$
$=14a_1+\frac{13\cdot 14d}{2}=14a_1+$
$+91d$.

$$\begin{cases}a_1^2+24a_1d+128d^2>S+12\\a_1^2+24a_1d+140d^2<S+47\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1^2+24a_1d+128d^2>14a_1+91d+12\\a_1^2+24a_1d+140d^2<14a_1+91d+47\end{cases}$$

$$+\begin{cases}a_1^2+24a_1d+128d^2-14a_1-91d-12>0\\-a_1^2-24a_1d-140d^2+14a_1+91d+47>0\end{cases}$$

$$-12d^2+35>0\quad\Rightarrow\quad d^2<\frac{35}{12}\Rightarrow d=1.$$

Подставим в неравенства:

$$\begin{cases}a_1^2+24a_1+128-14a_1-91-12>0\\a_1^2+24a_1+140-14a_1-91-47<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1^2+10a_1+25>0\\a_1^2+10a_1+2<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(a_1+5)^2>0 & (1)\\a_1^2+10a_1+2<0 & (2)\end{cases}$$

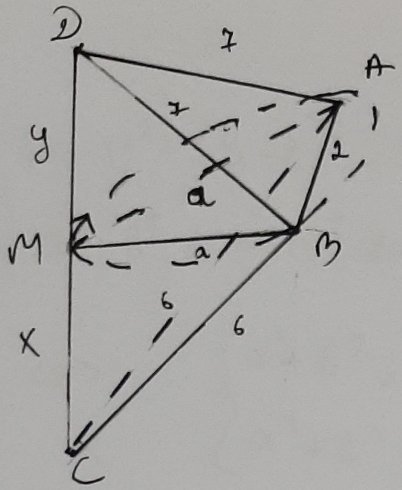
Решим (2): $a_1^2+10a_1+2<0 \Rightarrow D'=25-2=23.\Rightarrow$
$\Rightarrow a_1\in(-5-\sqrt{23};-5+\sqrt{23})$

$$\begin{cases}a_1\neq-5\\a_1\in(-5-\sqrt{23};-5+\sqrt{23})\end{cases}.$$ Целые $a_1=-9$; $a_1=-8$; $a_1=-7$; $a_1=-6$; $a_1=-4$; $a_1=-3$; $a_1=-2$; $a_1=-1$.

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

~~Чистовик~~

Задача 2 ②



Опустим перпендикуляры на CD из точек A и B. Так как ~~AB~~ $AD=DB$ и $AC=CB$, то они попадут в одну точку ($\triangle CAD=\triangle CBD$, поэтому их высоты и основания высот равны).

Пусть M - основание этих перпендикуляров, $CM=x$, $DM=y$, $MA=MB=a$. Из $\triangle AMD$ и $\triangle BMC$:

$$a^2=49-y^2=36-x^2 \Rightarrow y=\sqrt{13+x^2}.$$

Радиус цилиндра R - равен радиусу описанной окружности $\triangle ABM$.

$$\sin\angle BAM=\frac{\sqrt{a^2-1}}{a};\quad 2R=\frac{a}{\sin\angle BAM}=\frac{a}{\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-1}}$$

$$R=\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-1}}=\frac{36-x^2}{2\sqrt{35-x^2}}=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{35-x^2}+\frac{1}{\sqrt{35-x^2}}\right)\geq\frac{1}{2}\cdot 2=1$$

$R\geq 1$, причем наименьшее значение достигается при $\sqrt{35-x^2}=1 \Rightarrow x^2=34$, $x=\sqrt{34} \Rightarrow y=\sqrt{13+34}=\sqrt{47}$

$CD=x+y=\sqrt{34}+\sqrt{47}$

Ответ: $\sqrt{34}+\sqrt{47}$

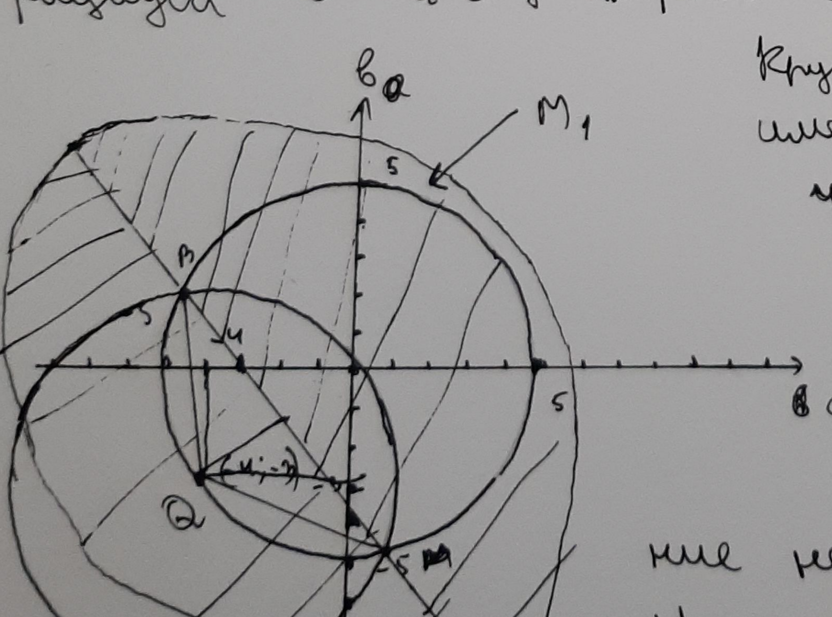
Чистовик (3)

Задача 3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 25 & (1) \\ a^2+b^2 \le \min(-8a-6b,\ 25) & (2) \end{cases}$$

$$(2) \iff \begin{cases} a^2+b^2 \le -8a-6b \\ a^2+b^2 \le 25 \end{cases} \iff \begin{cases} (a+4)^2+(b+3)^2 \le 25 \\ a^2+b^2 \le 25 \end{cases}$$

На плоскости Оав - это пересечения кругов радиуса 5 с центрами $(-4;-3)$ и $(0;0)$.
Центр каждой окружности лежит на другой окружности. На плоскости $(a;b)$ решения неравенства $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 25$ - точки круга радиуса 5 и с центром в точке $(x;y)$



Круг $(a-x)^2+(b-y)^2 \le 25$ имеет общие точки с общей частью двух предыдущих кругов, если точка $(x;y)$ удалена от Ф общей части этих двух кругов на расстояние не большее 5.

Множество Ф симметрично относительно прямой $b = -\frac{4}{3}a - \frac{25}{6}$

Фигуры Ф и М подобны. М состоит из двух частей, вид которых изображенных на рисунке. $S_M = 2S_{M_1}$. M_1 - сегмент окружности с центром $Q(-4;-3)$, радиуса 10. ~~$S_{M_1} = S_{сект} - S_{\Delta QBQ} = 100\pi\cdot\varphi$~~

~~Дата~~ Черновик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 25\\ a^2+b^2\le \min(-8a-6b,25)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2+b^2\le -8a-6b\\ a^2+b^2\le 25\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}(a+4)^2+(b+3)^2\le 25\\ a^2+b^2\le 25\\ (x-a)^2+(y-b)^2\le 25\end{cases} \qquad \begin{cases}(a+4)^2+(b+3)^2\le 25\\ a^2+b^2\le 25\\ (a-x)^2+(b-y)^2\le 25\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+b^2=25\\ a^2+b^2=-8a-6b\end{cases} \Rightarrow \cancel{b}\ -8a-6b-25=0 \Rightarrow$$

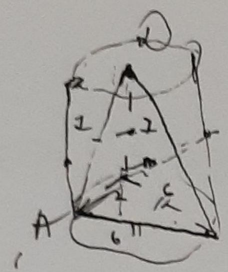
$$\Rightarrow b=\frac{-8a-25}{6}$$

$$\cancel{b=\frac{-8a-25}{6}=}$$

Задача 3

$$S_{M_1} = S_{\text{сект}} - S_{\triangle QMC} = \frac{100\pi \cdot \varphi}{360} - \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot \sin\varphi$$

Черновик



$S = \sqrt{7 \cdot 5} = \sqrt{35}$

$S = \sqrt{8 \cdot 6} = 4\sqrt{3}$

$(a_1 + 5)^2 - 50 > 0$

$(a_1 + 5)^2 - 23 < 0$

$14a_1 - 91 = S$

$a_1^2 - 24a_1 + 116 > 14a_1 - 91$

$a_1^2 - 24a_1 + \cancel{140}^{33} < 14a_1 - 91$

$a_1^2 - 38a_1$

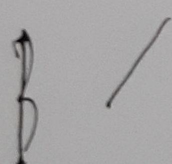
$S = V = \pi R^2 \cdot h.$

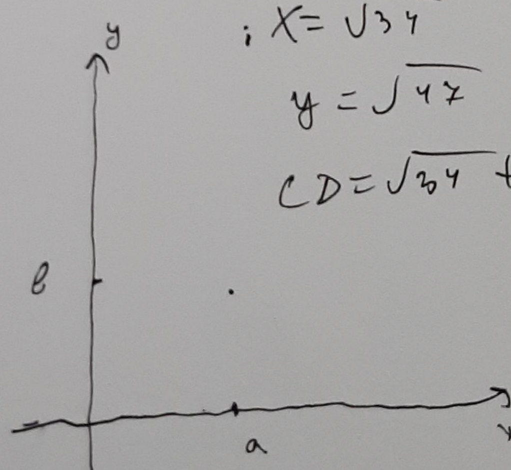
$V = \frac{1}{3}.$

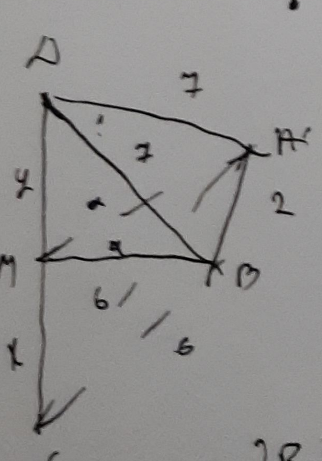
$X = \sqrt{34}$

$y = \sqrt{47}$

$CD = \sqrt{34} + \sqrt{47}.$







$a = \sqrt{49 - y^2}$ $\Rightarrow y = \sqrt{13 + x^2}$

$a = \sqrt{36 - x^2}$

$\sin\angle BAM = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}$

$2R = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-1}}$ $R = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2-1}} = \frac{36 - x^2}{2 \cdot \sqrt{35 - x^2}} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{35 - x^2} + \frac{1}{\sqrt{35 - x^2}}\right) = 1$

Черновик

S

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{14}}{14}=S/14$$

$a_1+a_2+\ldots+a_{14}=$

$a_1=\frac{S-91d}{14}$

$\cancel{2}\cdot 14\cdot a_1+\cancel{13d}\ 91d=S$ $\quad d=\frac{S-14a_1}{91}$

$(a_1+8d)\cdot(a_1+16d)>S+12$ $\quad 1\cdot 196$

$(a_1+10d)(a_1+14d)<S+47$ $\quad 1\cdot 14$

196, 12, 1392, 196, 2352

133, 21, 133, 266, 2793

$(S-91d+112d)(\cancel{a}\cdot S-91d+224d)>196S+2352$

$(S+21d)(S+133d)>196S+2352$

$S^2+154dS+2793d^2>196S+2352$

$S^2+(154d-196)S+2793d^2-2352>0$

154, 154

$-9,$
$-9, -8, -7, -6,$
$-5, -4,$
$-3, -2, -1,$
$0, 1, 2, 3,$
$4, 5, 6, 7$

$14a_1+91=S$

$\cancel{14a_1}=S+91$

$a_1^2+24a_1d+128d^2>S+12$

$a_1^2+24a_1d+140d^2<S+47$

$\cancel{S+12}+12d^2<35$

$S+12d^2<\cancel{23}\ 35$

$d=1$

$$a_1^2+24\cdot a_1\cdot\frac{(S-14a_1)}{91}+128\cdot\frac{(S-14a_1)^2}{91^2}>S+12$$

$12d^2<\cancel{S+12}\ 35$

$d^2<\frac{35}{12}$ $\quad d=\pm 2$

$d=\pm 1$

$(a_1\pm 8)(a_1\pm 16)>S+12$

$\begin{cases} a_1^2\pm 24a_1+\cancel{128}>S \\ a_1^2+24a_1+93<S \end{cases}$

$a_1^2+24a_1+116>14a_1+91$

$a_1^2+10a_1-25>0$

$a_1^2+\cancel{10}a_1+2<0$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104265**

ID профиля: **340160**

Вариант 19

чистовик

Задача 1

(1)

Простыми делителями чисел a, b, c могут быть числа 3 и 7: пусть $a = 3^{n_1} \cdot 7^{k_1}$; $b = 3^{n_2} \cdot 7^{k_2}$, $c = 3^{n_3} \cdot 7^{k_3}$.

$\min(n_1, n_2, n_3) = 1$ $\qquad$ $\max(n_1, n_2, n_3) = 17$

$\min(k_1, k_2, k_3) = 1$ $\qquad$ $\max(k_1, k_2, k_3) = 15.$

Пусть $n_1 < n_2 < n_3$. Тогда $n_1 = 1$, $n_3 = 17$, $n_2 \in \{2; 16\}$. Всего 15 возможностей. Так как возможны случаи $n_1 < n_3 < n_2$, $n_2 < n_1 < n_3$, $n_2 < n_3 < n_1$, $n_3 < n_1 < n_2$, $n_3 < n_2 < n_1$, то всего случаев $3! \cdot 15 = 90$ случаев, когда n_1, n_2, n_3 - попарно различны. Пусть какие-то два равны: $n_1 = n_2 = 1$, $n_3 = 17$; $n_1 = n_3 = 1$, $n_2 = 17$; $n_2 = n_3 = 1$, $n_1 = 17$; $n_2 = n_1 = 17$, $n_3 = 1$; $n_1 = n_3 = 17$, $n_2 = 1$; $n_2 = n_3 = 17$, $n_1 = 1$ - еще 6 случаев: $90 + 6 = 96$.

Аналогично с числами k_1, k_2, k_3: $3! \cdot 13 + 6 = 84$.

Всего $96 \cdot 84 = 8064$.

Ответ: 8064

Чистовик

Задача 2

(2)

$\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$, $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$, $\log_{\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$

ОДЗ: $\begin{cases} \frac{x}{2}-1>0, & \frac{x}{2}-1\neq 1 \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0, & \frac{x}{2}-1/4\neq 1 \\ x-11/4>0, & x-11/4\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>11/4 \\ x\neq 4 \\ x\neq 15/4 \end{cases}$

Пусть a, b, c - данные числа

~~Пусть $a=\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$, $b=\log_{\sqrt{x-11/4}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$, $c=\log_{\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$~~

Заметим, что на ОДЗ

$a\cdot b\cdot c=\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\log_{\sqrt{x-11/4}}\left(\frac{x}{2}-1\right)\cdot\log_{(x/2-1/4)}\left(x-11/4\right)^2=$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\cancel{\lg(x/2-1/4)}}{\cancel{\lg\left(\frac{x}{2}-1\right)}}\cdot 2\cdot\frac{\cancel{\lg(x/2-1)}}{\cancel{\lg(x-11/4)}}\cdot 2\cdot\frac{\cancel{\lg(x-11/4)}}{\cancel{\lg(x/2-1/4)}}=$

$=2$

Если $a=b$, $c=a+1$, то $a\cdot a\cdot(a+1)=2$

$a^3+a^2-2=0 \Rightarrow (a-1)\cdot(a^2+2a+2)=0$

$a=1$ - единственное решение

Вместо a может быть любое из данных чисел.

1) Пусть $a=\log_{(x/2-1)^2}(x/2-1/4)=1. \Rightarrow \left(\frac{x}{2}-1\right)^2=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$ $|\cdot 4$

$x^2-5x+6=0 \Rightarrow x_1=2 < 11/4$ - не входит в ОДЗ, $x_2=3$.

2) Пусть $a=\log_{\sqrt{x-11/4}}\left(\frac{x}{2}-1\right)=1 \Rightarrow \sqrt{x-11/4}=\frac{x}{2}-1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}-x+1=x-11/4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-8x+15=0 \Rightarrow x_3=3, x_4=5.$

3) Пусть $a=\log_{(x/2-1/4)}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=1 \Rightarrow x/2-1/4=\left(x-\frac{11}{4}\right)^2 \Leftrightarrow x^2-\frac{11}{2}x+\frac{121}{16}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}=0$

$x^2-6x+\frac{125}{16}. \Rightarrow x_5=3-\sqrt{19}/4<11/4$

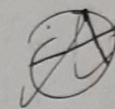
$x_5 = 3 - \sqrt{19}/4 < \frac{11}{4} \Leftrightarrow 1 < \frac{\sqrt{19}}{4} \Rightarrow x_5 = 3 - \sqrt{19}/4$ – не входит в ОДЗ.

$x_6 = 3 + \frac{\sqrt{19}}{4} > 4 > 11/4 \Rightarrow x_6 = 3 + \frac{\sqrt{19}}{4}$ входит в ОДЗ.

Ответ: $3;\ 5;\ 3 + \frac{\sqrt{19}}{4}$.

Черновик

N3

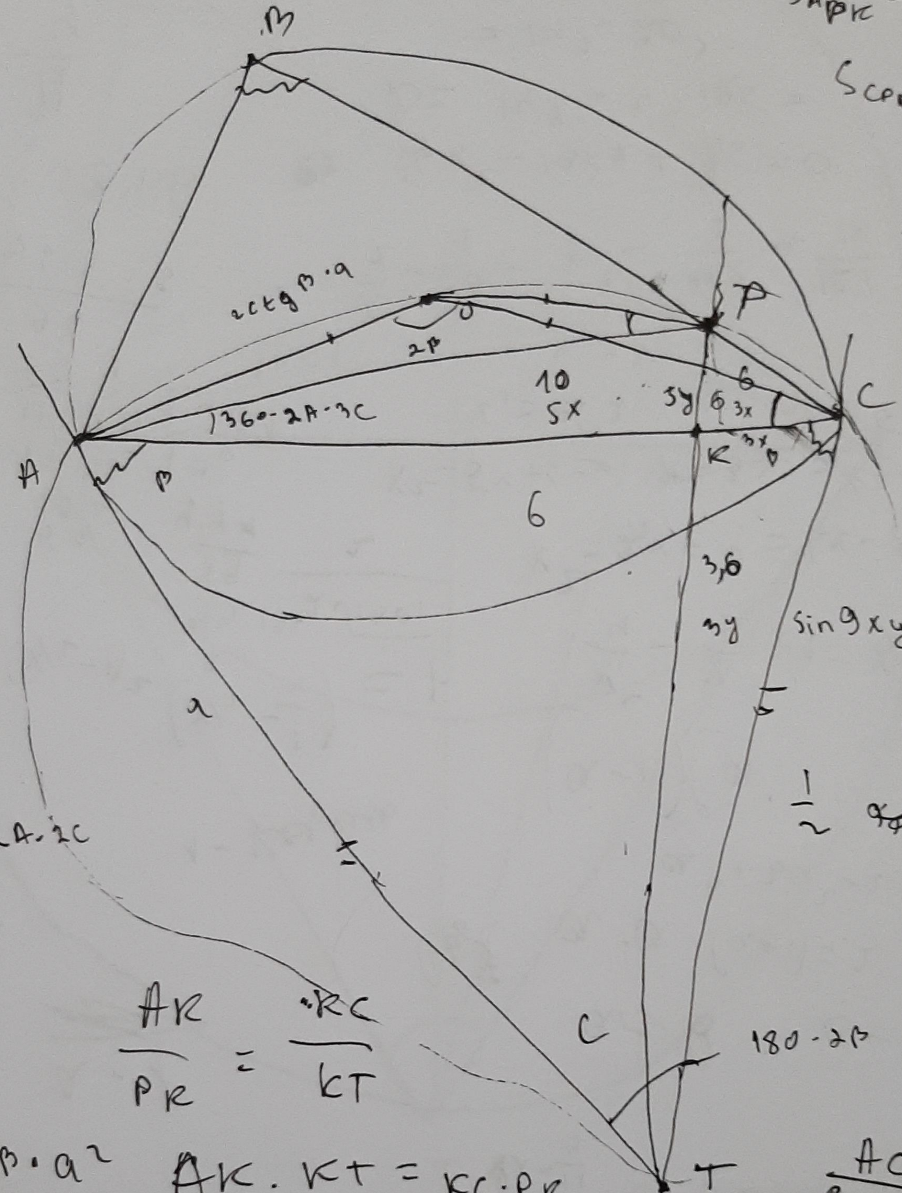


$9\underset{2}{6}$
$\times\ 84$
1384
268
8064

$S_{\triangle PK} = 10$

$S_{CPK} = 6$

$\frac{AK}{KC} = \frac{10}{6}$



6 − 10

x − 6

$\frac{36}{30} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

$= 3{,}6$

$\sin 9xy$ $\quad 25xy$

$\frac{25}{4y} = \frac{100}{36} = 25$

$\frac{1}{2}$ ~~9,6~~ $\sin 2\beta \cdot a^2 =$

$= 9{,}6$

$a^2 =$ ~~9,6~~ $\frac{19{,}2}{\sin 2\beta}$

$\sin 2\beta = \frac{19{,}2}{a^2}$

$\frac{PK}{KT} = \frac{AK}{PK} = \frac{KC}{KT}$

$\sin 2\beta \cdot a^2$ $\quad AK \cdot KT = KC \cdot PK$

$\frac{AC}{\sin 2\beta} = \frac{\sin \cdot a}{\sin\beta}$

$\frac{1}{2}\sin 2\beta \cdot 4ctg^2\beta \cdot a^2 =$

$= 9{,}6 \cdot 4ctg^2\beta$

$\frac{AK}{KC} = \frac{PK}{KT}$

$\frac{AC}{2\cos\beta} = a$

$\frac{a}{\sin\beta} = R_1$

$38{,}4 \cdot ctg^2\beta$

$AC = 2\cos\beta \cdot a$

~~$\frac{2\cos\beta \cdot a}{\sin 2\beta}$~~

$\frac{\frac{AC}{\sin\beta}}{a} = \frac{2\cos\beta \cdot a}{\sin\beta} =$

~~2ctg~~

$AK \cdot KC = \frac{4\cos^2\beta \cdot a^2}{\sin^2\beta} \cdot \cancel{\sin\beta} \cdot \cos\beta = 2ctg\beta\, a = R_2$

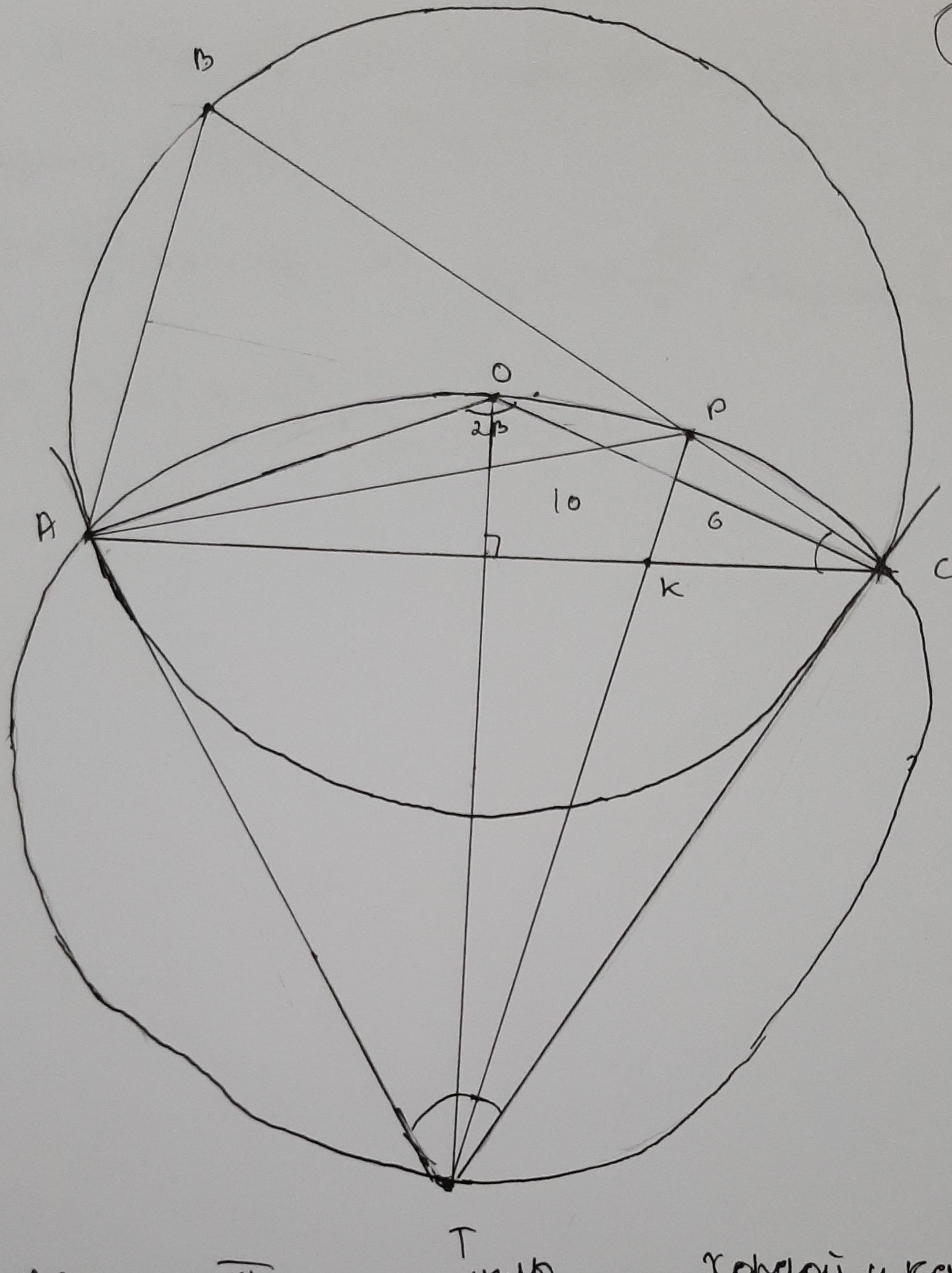
$= KT \cdot PK$ $\quad \frac{4\cos^3\beta \cdot a}{\sin\beta}$

$60x^2 = KT \cdot PK = y \cdot \frac{60x^2}{y}$

чистовик

Задача 3

(4)



Пусть $\angle ABC = \beta$. Так как углы между хордой и касательной равны углам, опирающимся на эти хорды, то $\angle CAT = \angle ACT = \beta$. Значит $\angle ATC = 180 - 2\beta$. $\angle AOC = 2 \cdot \angle ABC = 2\beta$. Четырехугольник AOCT - вписанный, значит точки AOPCT - лежат на одной окружности. $\frac{AK}{PK} = \frac{KT}{KC}$ (Так как в $\triangle APK$ и $\triangle KPC$ общая высота и площади относятся также как и основания, $\frac{AK}{KC} = \frac{10}{6}$.)

$\frac{121}{16}$

$\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$, $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$,

$\log_{\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$.

$\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(x/2-1\right)\cdot\log_{\left(\frac{x}{2}-1/4\right)}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=$

$=\frac{2\cdot 1}{\cancel{\ }}$

$a=b$ $c=a+1$

$\log$ $a\cdot a\cdot(a+1)=2$

$a^3+a^2-2=0$

1- Корень

$(a-1)(a$

$\log_{(x/2-1)^2}\left(x/2-\frac{1}{4}\right)=1$

$\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+1=x/2-\frac{1}{4}\ |\cdot 4$

$x^2-2x+4=2x-1$

$x^2-5x+6=0$ $\cancel{x-3x}=-5$

$x_1=2$ $x=5/3$

$x_2=3$

$\frac{x}{2}-\frac{11}{4}=x^2-\frac{11x}{2}+\frac{121}{16}\ |\cdot 16$

$16x^2-96x+165=0$

$D=14^4-4^3\cdot 125=$

$=14^4-20^3=$

$=2^4\cdot 7^4-2^6\cdot 5^3=$

$=2^4(7^4-500)$

49 196 $2\sqrt{1901}$

49 $\frac{\ }{2}$

4449

196

2401

1901

53

196

1196

11176

1564

196

36416

28416

$x-\frac{11}{4}$

$\cancel{x-\frac{4}{11}}$