Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104197**

ID профиля: **262363**

Вариант 19

① S – ~~с~~ сумма первых 14 членов ↑ арифм. прогрессии.

$\in \mathbb{Z}$.

$S = \frac{a_1+a_{14}}{2} \cdot 14 = 7(a_1+a_{14})$.

$a_1 - ?$

$a_9 \cdot a_{17} > S+12$

$a_{14} = a_1+13d$. $d>0$.

$a_{11} \cdot a_{15} < S+47$.

$\underline{S} = 7(2a_1+13d) = \underline{14a_1+91d}$.

$a_9 = a_1+8d$; $a_{17} = a_1+16d$.

покрутить

$\underline{a_1^2 + 24a_1 d + 128d^2 > 14a_1+91d+12}$;

$a_{11} = a_1+10d$; $a_{15} = a_1+14d$:

$\underline{a_1^2 + 24a_1 d + 140d^2 < 14a_1+91d}+47$;

$\cancel{a_1^2} + \cancel{24}a_1 d + 128d^2 + \cancel{14a_1} + \cancel{91d} + 47 > \cancel{14a_1} + \cancel{91d} + 12 + \cancel{a_1^2} + 2\cancel{4a_1} d + 140d^2$

$128d^2 > 140d^2 - 35$.

$12d^2 < 35$

$d^2 < \frac{35}{12} = \frac{7}{4}$.

черновик

$d \in (0; \frac{\sqrt{7}}{2})$

③ ~~м~~ Ф – фигура из всех точек $(x;y)$, $\exists\, a,b \in R$:

круги ~~окружности~~ с центрами в $(a;b)$. $R=5$.

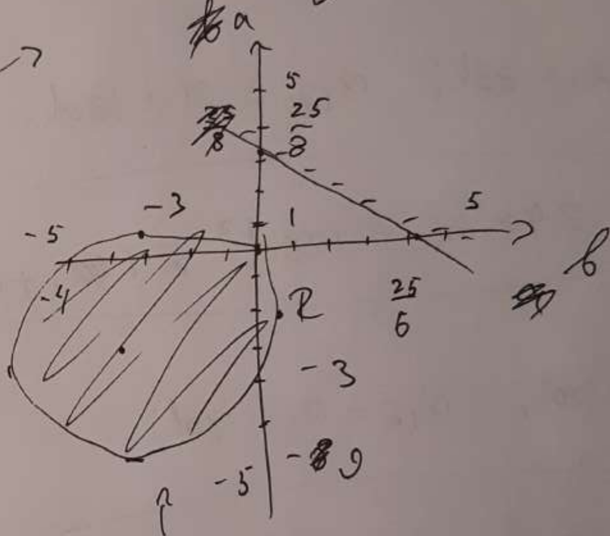
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 25, \\ a^2+b^2 \le \min(-8a-6b;\, 25). \end{cases}$$

Найти $S_Ф$ – ?

1. Если $-8a-6b \le 25$, т.е: $4a+3b \geqslant -\frac{25}{2}$: → $a \geqslant -\frac{3}{4}b + \frac{25}{8}$.

$a^2+b^2 \le -8a-6b$;

$(a+4)^2+(b+3)^2 \le 25$.



круги

подходит. полностью (такие a и b).

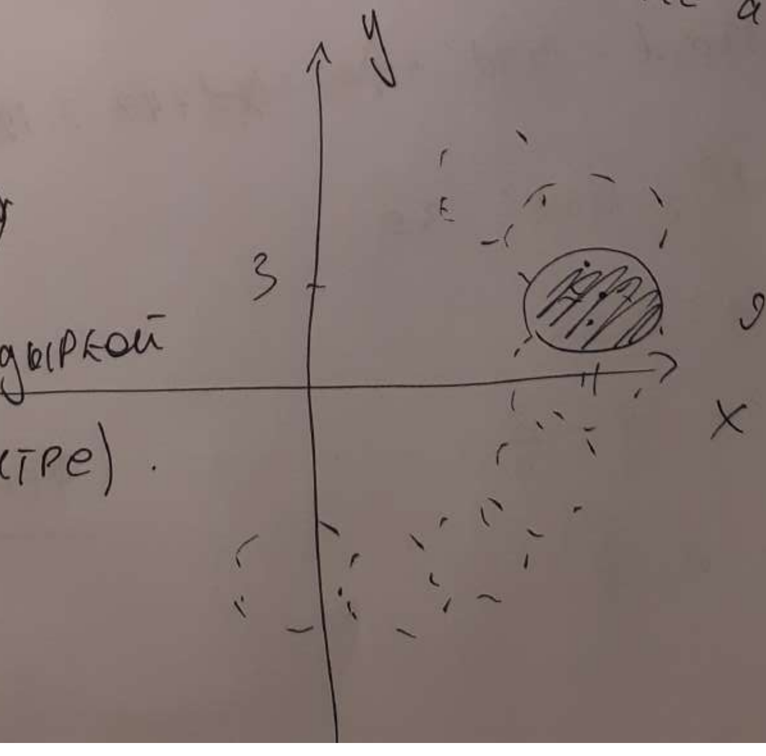
Черновик

$a \in [-9;1]$

$\forall a \to 2b$

увеличенный круг

(или круг с дыркой в центре).



$-8a-6b > 25.$

$d>0.$

① $\boxed{S} = a_1+a_2+\ldots+a_{14} = \frac{a_1+a_{14}}{2}\cdot 14 =$

$= 7(a_1+a_{14}) =$

Черновик

$= 7(2a_1+13d) = \boxed{14a_1+91d}$

$+\,91$
$\;\;47$

$a_9\cdot a_{17} > S+12$

$\Rightarrow$

$a_{11}\cdot a_{15} < S+47;$

$a_1 - ?$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a_1+8d)(a_1+16d) > S+12, \\ (a_1+10d)(a_1+14d) < S+47; \end{cases}$$

(1) $a_1^2+24a_1+128 > 14a_1+103.$

$a_1^2+10a_1+25>0$

$\Rightarrow (a_1+5)^2>0$ $\boxed{a_1 \neq -5}$

(2) $a_1^2+24a_1+140 < 14a_1+138$

$\Rightarrow \cancel{S}+47+\cancel{a_1^2}+\cancel{24a_1d}+128d^2 > \cancel{S}+12+\cancel{a_1^2}+\cancel{24a_1d}+140d^2.$

$12d^2<35$

$d^2 < \frac{35}{12}$ $\quad d\in\left(0;\sqrt{\frac{35}{12}}\right)$ $\quad$ т.к. $a_n > Z$:

$\{-9;-8;\ldots\}$ $\quad \boxed{d\leq 1}$

$a_1^2+10a_1+2<0;$

$(a_1+5)^2<23$

$\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{12}} \vee 2$ $\quad \boxed{d=1}$ и только так.

$|a_1+5|<\sqrt{23}.$

$$\begin{cases} (a_1+8)(a_1+16) > S+12, \\ (a_1+10)(a_1+14) < S+47; \end{cases}$$

$\Rightarrow$ т.к. $a_1\in Z$:

$|a_1+5|<\cancel{4}\,5$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2+ \end{cases}$

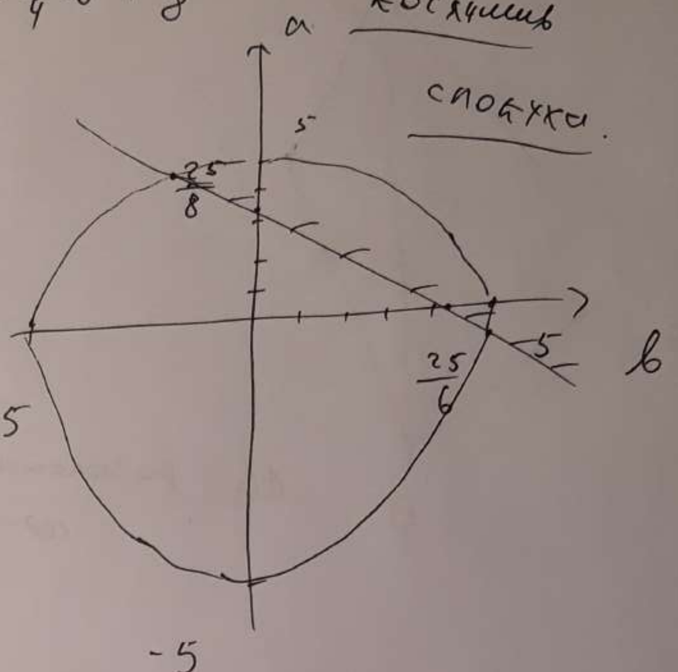
$a_1\in(-10;0);\ /\{-4\}$

$a_1+5\in(-5;5)$

2. Если $-8a-6b \geq 25$.

т.е. $a \leq -\frac{3}{4}b + \frac{25}{8}$.

Тогда: $a^2+b^2 \leq 25$.



Черновик

1. $a = -\frac{3}{4}b - \frac{25}{8}$.

$-8a-6b \leq 25$.

$8a+6b \geq -25$.

$a \geq -\frac{3}{4}b - \frac{25}{8}$.

1) $\left(-\frac{3}{4}b - \frac{25}{8} + 4\right)^2 + (b+3)^2 \leq 25$;

$\left(\frac{7}{8} - \frac{3}{4}b\right)^2 + (b+3)^2 \leq 25$.

$\frac{9}{16}b^2 - \frac{21}{16}b + \frac{49}{64} + b^2 + 6b + 9 \leq 25$.

$\frac{25}{16}b^2 + \frac{75}{16}b + \frac{49}{64} \leq 16$; $|\cdot 64$.

$b^2 + \frac{9}{16}b^2 - \frac{21}{16}b + \frac{49}{64} \leq 25$.

$\frac{25}{16}b^2 - \frac{21}{16}b + \frac{49}{64} - 25 \leq 0$;

$25b^2 - 16b + \frac{49}{4} - 400 \leq 0$;

$25b^2 - 16b - \frac{1551}{4} \leq 0$.

$D = 256 + 25 \cdot 1551$

$96 - 21$

$1600 - 49$

1551×25

$38775 + 256 = 39031$

$155100 : 4 = 38775$ 3

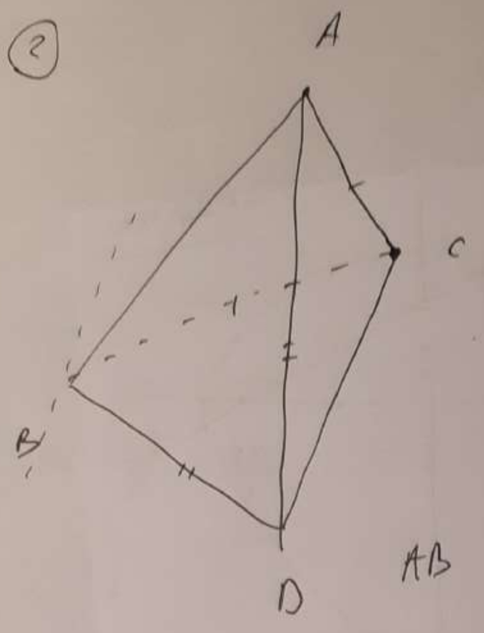
25×16

(2)

$AB = 2.$

$AC = CB = 6.$

$AD = DB = 7.$



каждый ABCD вписан в цилиндр

все вершины ~~от~~ на бок. поверхности.

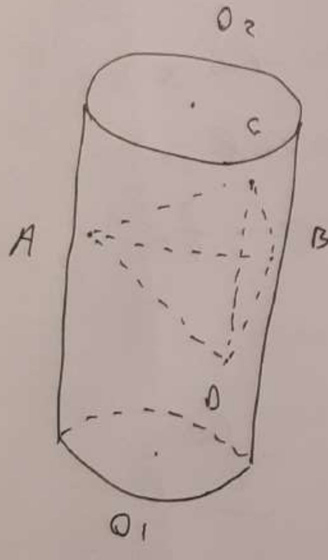
$CD \parallel O_1O_2.$

$r_{цил} \to \min$

$CD - ?$

AB расположен гор-но (?)

Черновик.



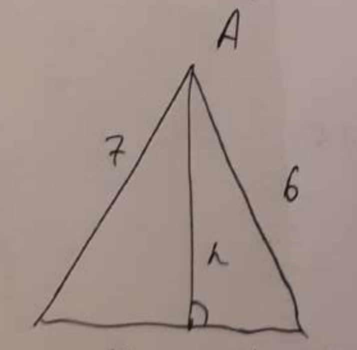
(если $AB \parallel \alpha_{осн}$)

$r_{\min} = \frac{AB}{2} = 1.$

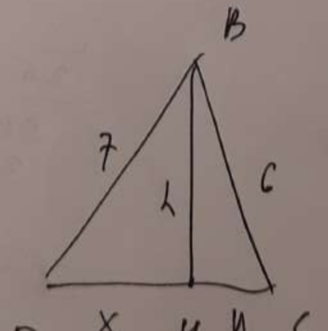
При этом $\angle CAD$ постоянно увеличивается до пред. возм. значения и $CD \uparrow$.

$\sqrt{34} + \sqrt{47} - ?$

Спроецируем AB на (ACD):



и на (BCD):



$2h^2 = AB^2 = 4.$?

$h = \sqrt{2}$

$x = \sqrt{49-2} = \sqrt{47}$

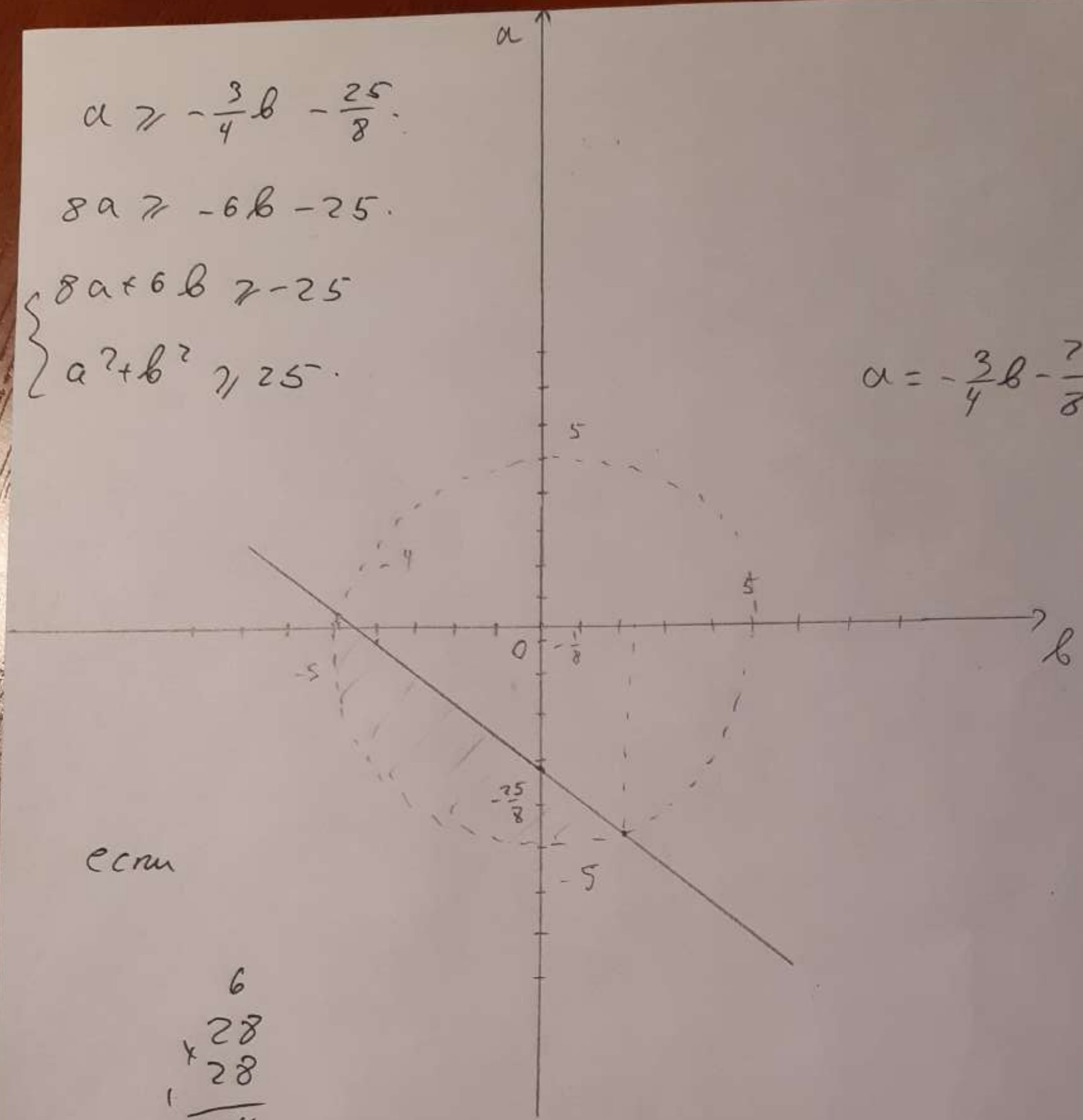
$y = \sqrt{36-2} = \sqrt{34}.$

$a \geq -\frac{3}{4}b - \frac{25}{8}$.

$8a \geq -6b - 25$.

$$\begin{cases} 8a+6b \geq -25 \\ a^2+b^2 \geq 25. \end{cases}$$

$a = -\frac{3}{4}b - \frac{25}{8}$



если

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times\, 28 \\ 28 \\ \hline 224 \\ +\,56 \end{array}$$

$\begin{array}{r} \times\, 64 \\ 25 \\ \hline \end{array}$

$O_2C = 5.$ $O_2D = 5.$

$8 \cdot 5$

$\begin{array}{r} -\,1600 \\ 625 \\ \hline 975 \end{array}$

$\begin{array}{r} 3\ 7 \\ \times\, 975 \\ 400 \\ \hline +\,390000 \\ 78400 \\ \hline 468400 \end{array}$ $|:100$

$a^2+b^2 = 25$

$\frac{9}{16}b^2 + \frac{75}{16}b + \frac{625}{64} + b^2 = 25;$

$\frac{25}{16}b^2 + \frac{75}{16}b - \frac{975}{64} = 0.$

$\begin{array}{r|l} 975 & 25 \\ -\,75 & 35 \\ \hline 225 & \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 4684 & 4 \\ 1171 & \end{array}$

$b_1 = -5.$

$\cancel{b_1 \cdot b_2}$ $b_1 \cdot b_2 = \frac{975}{64} \cdot \frac{16}{25} = \frac{35}{4}.$

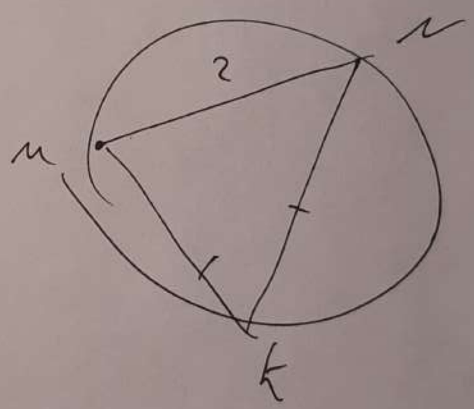
Черновик

$a^2+b^2=25$

$a^2+8b+b^2+6b=0;$

$8b+6b=-25.$

Черновик.



① 1) $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{14}$.

11 класс. 19 вариант

1 часть.

$S = \frac{a_1 + a_{14}}{2} \cdot 14 = 7(a_1 + a_{14}) = 7(2a_1 + 13d)$

$d > 0$.

$d \in Z$.

$S = 14a_1 + 91d$.

2) $\begin{cases} a_9 \cdot a_{17} > S + 12, & (1) \\ a_{11} \cdot a_{15} < S + 47; & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1 + 8d)(a_1 + 16d) > S + 12, \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < S + 47; \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow S + 47 + a_1^2 + 24a_1 d + 128d^2 > S + 12 + a_1^2 + 24a_1 d + 140d^2$.

$35 > 12d^2$.

$d^2 < \frac{35}{12}$.

С учётом всех огр. на d: $\boxed{d = 1}$

3) (1) $(a_1 + 8)(a_1 + 16) > 14a_1 + 91 + 12$;

$a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 103$;

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

$(a_1 + 5)^2 > 0 \Rightarrow \underline{a_1 \neq -5}$

(2) $(a_1 + 10)(a_1 + 14) < 14a_1 + 91 + 47$;

$a_1^2 + 24a_1 + 140 < 14a_1 + 138$;

$a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0$;

$(a_1 + 5)^2 < 23$.

Чистовик 1.

$|a_1+5| < \sqrt{23}$.

с учётом $a_1 \in Z$:

$|a_1+5| < 5$

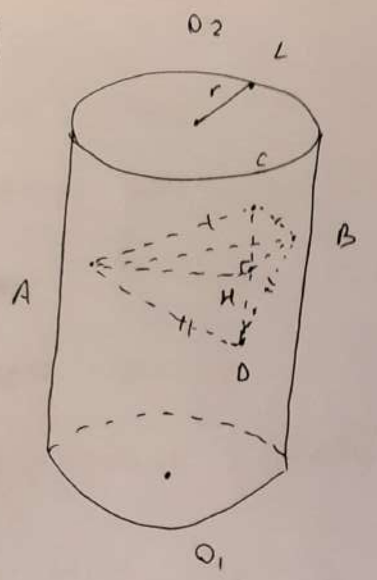
$a_1 \in (-10; 0)$, кроме $a_1 = -5$.

Итого: $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$.

Ответ: $\{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$.

Чистовик.

(2)



$AB = 2.$

$AC = BC = 6.$

$AD = BD = 7.$

$CD \parallel O_1O_2.$

$O_2L = r.$

$r \to min$

$CD - ?$

1. $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ - равнобедренные.

$\triangle BDC = \triangle ADC$ (по 3-м сторонам).

Значит, угол между CD скрещ. с $AB = \frac{\pi}{2}$.

также это можно док-ть, исходя из того, что:

$\begin{cases} CD \perp BH, \\ CD \perp AH, \\ BH \cap AH; \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH),$ где т. H - осн. $\perp$-ра из B и A на CD.

Если $CD \parallel O_1O_2$, то AB расположено горизонтально.

2. r_{min} мы добьёмся, „прижимая" т. A к CD;

r_{min} мы достигнем, когда AB встанет на место диаметра ~~основания~~ кругового сечения цилиндра.

Т.е. $d_{min} = AB \Rightarrow r_{min} = \frac{AB}{2} = 1.$

При этом мы „расширим" углы CAD и CBD.

Чистовик 3

3. Опустим $BK \perp CD$.

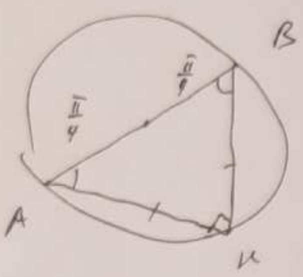
AK также $\perp CD$, т.к. $\triangle ACD = \triangle BCD$.

Причем $AK = BK = h$.

$(ABK) \parallel \alpha$ осн., т.к. AB, BK и $AK \perp O_1O_2$.

~~также~~ ~~BK~~

В сечении (ABK):



$AB = h\sqrt{2}$.

$h = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

В $\triangle BCK$ и $\triangle BDK$ по т. Пифагора:

$CK = \sqrt{36-2} = \sqrt{34}$. $DK = \sqrt{49-2} = \sqrt{47}$.

$CD = CK + KD = \sqrt{34} + \sqrt{47}$.

Ответ: $\sqrt{34} + \sqrt{47}$.

Чистовик 4.

③ М – фигура из $(x;y)$, $\forall\, a;b$: $S_ф$ – ?

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 25, & (1)\\ a^2+b^2 \le \min(-8a-6b;\,25). & (2)\end{cases}$$

1) (1) – круг, огр. окр. с т. $O(a;b)$ – центр, $R=5$.

мн-во точек задающих М образуется при рассмотрении всех $a;b$: таких, что:

(2) $a^2+b^2 \le \min(-8a-6b;\,25)$

1. Если $-8a-6b \le 25$:

$$a \ge -\frac{3}{4}b - \frac{25}{8};$$

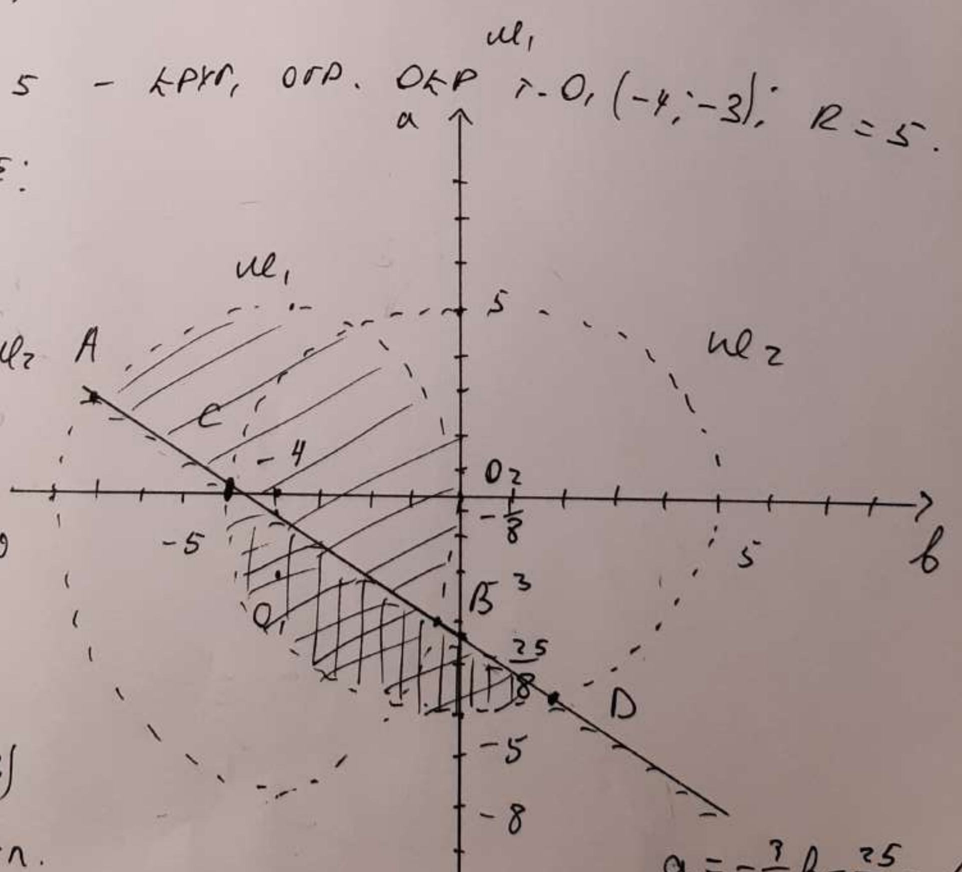
При этом:

$a^2+b^2 \le -8a-6b$;

$(a+4)^2+(b+3)^2 \le 25$ – круг, огр. окр $ш_1$ т. $O_1(-4;-3)$; $R=5$.

2. Если $a < -\frac{3}{4}b - \frac{25}{8}$:

$a^2+b^2 \le 25$. – круг $R=5$, огр. окр. $ш_2$ т. $O_2(0;0)$.



▨ – Область точек $(a;b)$ уд. 1. усл

▩ – обл. точек $(a;b)$ уд. 2. усл.

Чист. 5.

каждая точки $(a;b)$ из получившегося мн-ва может стать координатами центра круга (1).

Применив этот факт для каждой точки множества будет верен, факт, что искомое множество точек системы (фигура M) - это уже описанное мн-во точек, со „сдвинутыми" на 5 единиц границами.

3. Необходимо найти сумму площадей частей кругов, огр. дугами AB и CD так, если бы они были образованы не окр. $R=5$, а окр. $R=10$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104197**

ID профиля: **262363**

Вариант 19

$a = \log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$; $b = \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$; $c = \log_{\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$.

2 равны

3-е > на 1.

$$a = \frac{1}{2}\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)}\left(\frac{2x-1}{4}\right); \quad b = 2\log_{\left(\frac{4x-11}{4}\right)}\left(\frac{x-2}{2}\right);$$

$$c = 2\log_{\left(\frac{2x-1}{4}\right)}\left(\frac{4x-11}{4}\right).$$

$$\log_{\left(\frac{4x-11}{4}\right)}\left(\frac{x-2}{2}\right) = \log_{\left(\frac{2x-1}{4}\right)}\left(\frac{4x-11}{4}\right).$$

$\cancel{\frac{1}{\log}}$ $\quad$ $\cancel{\frac{\log_{\left(\frac{2x-1}{4}\right)}\left(\frac{x-2}{2}\right)}{\log_{\left(\frac{4x-11}{4}\right)}}}$

Черновик

$$\frac{\log_{\left(\frac{2x-1}{4}\right)}\left(\frac{x-2}{2}\right)}{\log_{\left(\frac{2x-1}{4}\right)}\left(\frac{4x-11}{4}\right)} = \frac{\log_{\left(\frac{2x-1}{2}\right)}\left(\frac{4x-11}{4}\right)}{\log_{\left(\frac{2x-1}{2}\right)}\left(\frac{2x-2}{4}\right)};$$

$$\log_{(x-\frac{11}{4})}\left(\frac{x}{2}-1\right) = \log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}\left(x-\frac{11}{4}\right).$$

$$\cancel{\log_{(\frac{x}{2}-1)}}$$

$$\frac{\log_{(\frac{x}{2}-4)}\left(\frac{x}{2}-1\right)}{\log_{(\frac{x}{2}-4)}\left(x-\frac{11}{4}\right)} = \frac{\cancel{\log_{(\frac{x}{2}-4)}\left(x-\frac{11}{4}\right)}}{\cancel{\log_{(\frac{x}{2}-4)}}} = \frac{1}{\log}$$

$$a \cdot c = \frac{1}{b}$$

$a =$

$$\begin{cases} a \cdot b \cdot c = 1, \\ a = b, \\ c = a+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2(a+1) = 1; \\ \end{cases}$$

Черновик

$$a = \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right) = \log_{\frac{1}{4}}\frac{5}{4} = -2\log_2\frac{5}{4}$$

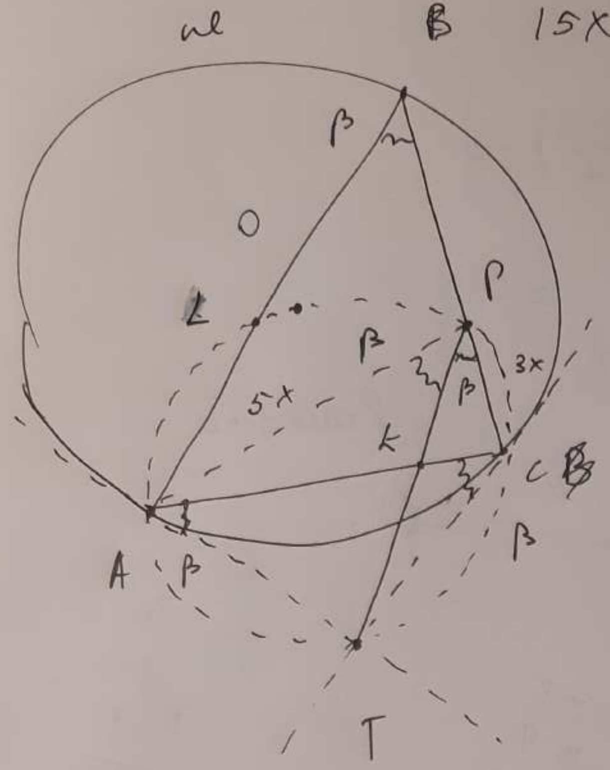
$$b = \log_{\sqrt{\frac{1}{2}}}\frac{1}{2} = 2\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}.$$

$$c = \log_{\frac{5}{4}}\frac{1}{16} \quad ?$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times\, 418 \\ 3 \\ \hline 1254 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times\, 34 \\ 8 \\ \hline 272 \\ +\, 144 \\ \hline 418 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 48 \\ 3 \\ \hline 144 \end{array} \qquad \frac{\sqrt{418}}{\sqrt{3}} =$$

$15x^2 \cdot \sin 2\beta = 16.$



$S_{APK} = 10. \quad S_{CPK} = 6.$

а) $S_{ABC} - ?$

PK – бис. ∠APC.

$S_{APK} = \frac{1}{2} AP \cdot PK \cdot \sin\beta = 10$

$S_{CPK} = \frac{1}{2} PK \cdot PC \cdot \sin\beta = 6.$

$PK \parallel AB.$

$\frac{CP}{BC} = \frac{CK}{AC}.$

Черновик

$\frac{AP}{PC} = \frac{5}{3}$

$AP = \frac{5}{3} PC.$

$\angle ABC = \operatorname{arctg} 2$

$AC - ?$

$tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 =$

$x - \frac{11}{4} > 1:$

$=$

$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 5$

$tg\,\alpha = 2.$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$tg\,2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}}{2 \cdot \frac{1}{5} - 1} =$

$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$= \cancel{\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3}} = -\frac{4}{3}.$

$\frac{34 \cdot 8}{272}$ $\frac{48 \cdot 3}{144}$ $\frac{272 + 144}{416}$

1. $a = b$:

$$\log_{\left(\frac{x-2}{2}\right)}\left(\frac{2x-1}{4}\right) - 4\log_{\left(x-\frac{11}{4}\right)}\left(\frac{x-2}{2}\right) = 0;$$

$$\log_{\left(\frac{x-2}{2}\right)}\left(\frac{2x-1}{4}\right) - \frac{4}{\log_{\left(\frac{x-2}{2}\right)}\left(x-\frac{11}{4}\right)} = 0.$$

Решено.

$$\frac{\log_{\left(\frac{x-2}{2}\right)}\left(\frac{2x-1}{4}\right)\cdot\log_{\left(\frac{x-2}{2}\right)}\left(x-\frac{11}{4}\right) - 4}{\log_{\left(\frac{x-2}{2}\right)}\left(x-\frac{11}{4}\right)} = 0.$$

```
 3
 34
x 8
----
272
```

```
+272
 144
----
 418
```

$48 + \frac{272}{3} = 418$

```
418 | 3
-1  | 13
 11
```

Черновик

```
 3
 34
x 8
----
262
+144
----
408 | 3
    | 136
```

```
 2
 48
x 3
----
144
```

```
 3
 34
x 8
----
272
```

```
 2
 418
x 3
----
1254
```

```
136 | 4
 34 |
```

```
 1
 42
x 36
----
 252
+126
----
1512
```

1) $b = c$:

$$\log_{(x-\frac{11}{4})}\left(\frac{x-2}{2}\right) = \frac{1}{\log_{(x-\frac{11}{4})}\left(\frac{2x-1}{4}\right)};$$

$$\frac{\log_{(x-\frac{11}{4})}\left(\frac{x-2}{2}\right)\cdot\log_{(x-\frac{11}{4})}\left(\frac{2x-1}{4}\right) - 1}{\log_{(x-\frac{11}{4})}\left(\frac{2x-1}{4}\right)} = 0.$$

$x > \frac{11}{4}$:

Черновик

$$\left(\frac{2x-1}{4}\right) > \frac{\frac{11}{2}-1}{4} = \frac{9}{8} > 1$$

$$\frac{x}{2} - 1 > \frac{11}{8} - 1 = \frac{3}{8}.$$

④ Найти кол-во (a, b, c):

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 21, = 3\cdot 7 \quad (1) \\ НОК(a;b;c) = 3^{17}\cdot 7^{15}. \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times\ 36 \\ \hline 252 \\ +\ 126 \\ \hline 1512 \end{array}$$

$a = 3^{\alpha}\cdot 7^{\beta}$

$b = 3^{\gamma}\cdot 7^{\rho}$

$c = 3^{\varepsilon}\cdot 7^{l}$.

В раз у трёх чисел степени 3 и 7 не ~~может~~ могут быть ≥ 2, иначе тогда их НОД > 21

Подумай. Решаемо.

1. Посчитаем все $(a;b;c)$, уд. (2) усл:

$$\begin{cases} \alpha+\gamma+\varepsilon = 17, \\ \beta+\rho+l = 15. \end{cases}$$

$N_1 = \frac{19!}{17!\,2!} = \frac{18\cdot 19}{2} = 9\cdot 19 = 171.$

$N_2 = \frac{17!}{15!\,2!} = 8\cdot 17 = 136.$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 8 \\ \hline 136 \end{array}$$

4 уравнения

$N_0 = 171\cdot 136.$

Те, у которых не выполнено условие выше:

если $\begin{cases} \alpha \geq 2, \\ \gamma \geq 2, \\ \varepsilon \geq 2 \end{cases}$ $N_{1-} = \frac{13!}{11!\,2!} = 12\cdot 13 = 78.$

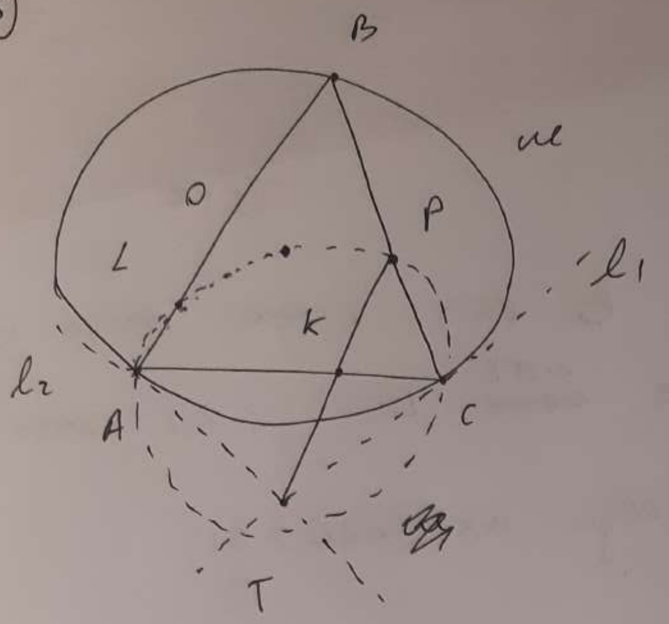
$$\begin{array}{r} 136 \\ -\ 55 \\ \hline 81 \end{array}$$

и/или $N_1 = 171 - 78 = 93.$

$N_{2-} = \frac{11!}{9!\,2!} = \frac{10\cdot 11}{2} = 55.$

$N_2 = 136 - 55 = 81$

⑥



$$x_1 = \log_{a^2} b = \frac{1}{2}\log_a b$$

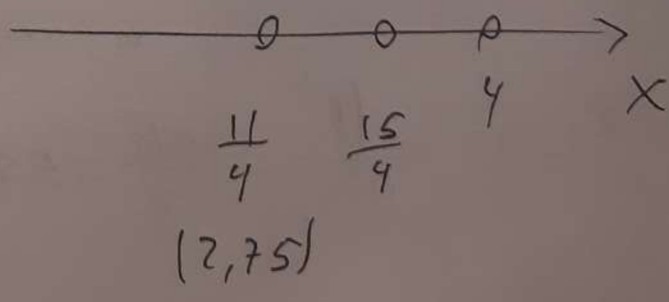
$$x_2 = \log_{\sqrt{c}} a = 2\log_c b$$

$$x_3 = \log_b c^2 = 2\log_b c.$$

черновик

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} = 1 \; ; \; 1\cdot 4$$

$$2x - 1 = 4.$$



$\log_{\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}\left(x-\frac{11}{4}\right) =$ ________

$\frac{1}{2}\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)+1 = 2\log_{\left(x-\frac{11}{4}\right)}\left(\frac{x}{2}-1\right).$

Черновик

I случай:

$$\begin{cases} b = c, & (1) \\ a = b+1; & (2) \end{cases}$$

$$(1)\ 2\log_{(x-\frac{11}{4})}\left(\frac{x}{2}-1\right) = 2\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}\left(x-\frac{11}{4}\right).$$

$$\log_{(x-\frac{11}{4})}\left(\frac{x}{2}-1\right) = \frac{1}{\log_{(x-\frac{11}{4})}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)};$$

Черновик

11 класс.
19 вариант.
2 часть

(4) $\begin{cases} НОД(a;b;c) = 21 = 3\cdot 7, & (1) \\ НОК(a;b;c) = 3^{17}\cdot 7^{15}. & (2) \end{cases}$

1. Пусть $a = 3^{\alpha}\cdot 7^{\beta}$; $b = 3^{\delta}\cdot 7^{\varphi}$; $c = 3^{\varepsilon}\cdot 7^{\ell}$.

Очевидно, других простых делителей у чисел нет.

Из условия (2): (степени ≥ 0 и $\in \mathbb{Z}$).

$\begin{cases} \alpha+\delta+\varepsilon = 17, \\ \beta+\varphi+\ell = 15. \end{cases}$ (*) при этом $\begin{cases} \alpha \geq 1, \\ \delta \geq 1, \\ \varepsilon \geq 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} \beta \geq 1, \\ \varphi \geq 1, \\ \ell \geq 1, \end{cases}$

иначе $НОД(a;b;c) \neq 21$.

Из условия (1):

Не бывает случаев:

$\begin{cases} \alpha \geq 2, \\ \delta \geq 2, \\ \varepsilon \geq 2; \end{cases}$ и/или $\begin{cases} \beta \geq 2, \\ \varphi \geq 2, \\ \ell \geq 2, \end{cases}$ (☆)

т.к. НОД чисел $= 3^{1}\cdot 7^{1}$.

Посчитаем N_1 для условия (*) и вычтем из него неподходящие случаи, когда (*) выполняется при (☆).

Чтобы посчитать кол-во, надо решить класс. задачу про шары и перегородки

$$\begin{cases} \alpha+\gamma+\varepsilon=17, & N_1 \\ \beta+\varphi+\ell=15. & N_2 \end{cases} \qquad \alpha,\gamma,\ldots,\ell \geq 1$$

все $\alpha,\gamma,\varepsilon$ хотя бы 1 — 2 перегородки

$$N_1 = \frac{(17-3+2)!}{2!\,14!} = \frac{16!}{14!\,2!} = \frac{15\cdot16}{2} = 120.$$

$$N_2 = \frac{(15-3+2)!}{12!\,2!} = \frac{13\cdot14}{2} = 13\cdot7 = 91.$$

Теперь посчитаем то же при условии (*):

$$N_{1-} = \frac{(17-6+2)!}{2!\,11!} = \frac{12\cdot13}{2} = 6\cdot13 = 78$$

$$N_{1+} = N - N_{1-} = 42.$$

$$N_{2-} = \frac{(15-6+2)!}{2!\,9!} = \frac{10\cdot11}{2} = 55.$$

$$N_{2+} = N_2 - N_{2-} = 36.$$

кол-во способов расставить степени „3"

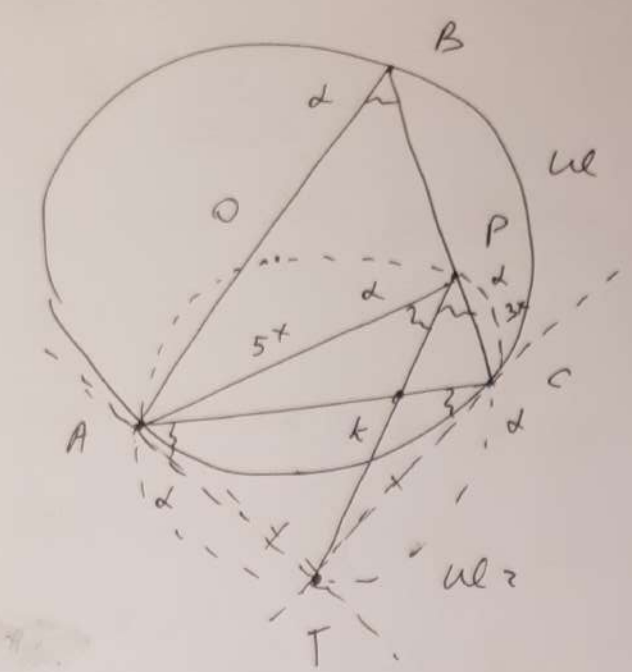
$$N_0 = N_{1+}\cdot N_{2+} = 42\cdot36 = 1512.$$

кол-во спос-в расставить степени „7"

Ответ: 1512.

Чист. 2.

⑥



$S_{APK} = 10.$

$S_{CPK} = 6.$

а) S_{ABC} − ?

б) $\angle ABC = \mathrm{arctg}\, 2$

AC − ?

а) 1. В 4-ке $AOCT$: $\angle OAT + \angle TCO = \pi$

(т.к. $r \perp$ кас.)

Значит, $AOCT$ − впис. и т. T лежит на ω_2.

2. Пусть $\angle ACT = \angle CAT = \alpha = \angle ABC$ (между кас. и хордой).

$\angle TPC = \angle APT = \alpha$ (опир. на 1 дугу с $\angle ACT$ и $\angle CAT$).

$S_{APK} = \frac{1}{2} AP \cdot PK \cdot \sin\alpha$; $S_{CPK} = \frac{1}{2} PK \cdot PC \cdot \sin\alpha$;

$\frac{AP}{PC} = \frac{10}{6} \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{5}{3}.$

PK − бис. угла $APC \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{AP}{PC} = \frac{5}{3}.$

$AK = \frac{5}{3} KC.$

$AC = \left(1 + \frac{5}{3}\right) KC = \frac{8}{3} KC.$

3. $\angle TPC = \angle ABC \Rightarrow PK \parallel AB$ и

и $\triangle PCK \sim \triangle BCA$:

$S_{ABC} = \left(\frac{AC}{KC}\right)^2 \cdot S_{PCK} = \frac{64}{9} \cdot 6 = \frac{128}{3}.$

б) $tg\alpha = 2$.

$$tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = 4$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}.\quad \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

пусть $AP = 5x$; $PC = 3x$.

$$S_{APC} = 16 = \frac{1}{2} \cdot 5x \cdot 3x \cdot \sin 2\alpha =$$

$$= 15x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 6x^2.$$

$$x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

по т. косинусов в $\triangle APC$:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = = \frac{2}{5} - 1 = -\frac{3}{5}.$$

$$AC^2 = 25x^2 + 9x^2 - 30x^2 \cdot \cos 2\alpha =$$

$$= 34 \cdot \frac{8}{3} - 30 \cdot \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{2}{5} - 1\right) =$$

$$= 34 \cdot \frac{8}{3} + 80 \cdot \frac{3}{5} = \cancel{+48 = \frac{416}{3} \cdot \frac{408}{3} = 136}$$

$$= \frac{418}{3}. \quad AC = \frac{\sqrt{1254}}{3}.$$

Ответ: а) $\frac{128}{3}$; б) $\frac{\sqrt{1254}}{3}$

⑤ $a = \log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$, $b = \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$,

$c = \log_{\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$.

1. Начнем с условий на x:

(1) Для a:

$x \neq 2$; $x \neq 4$;

$x > \frac{1}{2}$.

(2) Для b:

$x > \frac{11}{4}$. $x \neq \frac{15}{4}$.

$x > 2$.

(3) Для c:

$x > \frac{1}{2}$.

$x \neq \frac{5}{2}$. $x \neq \frac{11}{4}$.

В итоге:

$x \in \left(\frac{11}{4}; \frac{15}{4}\right) \cup \left(\frac{15}{4}; 4\right) \cup (4; +\infty)$.

2. При заданных условиях:

$a = \frac{1}{2}\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$. $b = 2\log_{\left(x-\frac{11}{4}\right)}\left(\frac{x}{2}-1\right)$.

$c = 2\log_{\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}\left(x-\frac{11}{4}\right)$.

3. Заметим, что:

$$\cancel{a\cdot b = \log_{(\frac{x}{2}-1)}\left(x-\frac{11}{4}\right) = \frac{2}{b}}$$

$$a\cdot b\cdot c = 2 \quad (☼)$$

Первый возможный случай.

1) $\begin{cases} a = b, \\ c = a+1; \end{cases}$

(☼) $a\cdot a\cdot(a+1) = 2.$

$f(a) = a^3 + a = 2.$

$f(a) \nearrow\nearrow.$ $a=1$ – решение. (единственное)

$\log_{(\frac{x}{2}-1)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = 2;$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4} = \frac{x^2}{4} - x + 1; \quad |\cdot 4$

$2x-1 = x^2-4x+4;$

$x^2-6x+5=0;$

$x(x-1)-5(x-1)=0;$

$\left[\begin{array}{l} x=1, \ \ominus \ \text{(не уд. усл. в п.1)} \\ x=5 \ \oplus \end{array}\right.$

Проверим $x=5$:

$b=1;$

$2\log_{(5-\frac{11}{4})}\left(\frac{5}{2}-1\right) = 1;$

$2\log_{\frac{9}{4}}\left(\frac{3}{2}\right) = 1;$ (и)

$c=2;$

$\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}\left(x-\frac{11}{4}\right) = 1;$

$\log_{(\frac{10}{4}-\frac{1}{4})}\frac{9}{4} = 1;$ (и).

$x=5$ – решение.

2) $\begin{cases} a = c, \\ b = a+1: \end{cases}$

$a^3 + a = 2;$

$a = 1$ – решение

$x = 5$ (см. пред. пункт).

$c = 1:$

$2\log\left(\frac{10}{4} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{8}{4}\right) = 1;$ (ложь).

Не подходит.

3) $\begin{cases} b = c, \\ a = b+1; \end{cases}$

$b^3 + b = 2.$

Аналогично $b = 1$ – ед. решение.

$2\log\left(x - \frac{11}{4}\right)\left(\frac{x}{2} - 1\right) = 1$

$\frac{x}{2} - 1 = \sqrt{x - \frac{11}{4}}.$

$\frac{x^2}{4} - x + 1 = x - \frac{11}{4}; \,|\cdot 4$

$x^2 - 4x + 4 = 4x - 11;$

$x^2 - 8x + 15 = 0. \quad \sqrt{D} = 2$

$x_1 = 3$ +

$x_2 = 5$ – уже в ответе.

Проверим $x = 3$:

$c = b = 1$;

$2\log\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{11}{4}\right)=1$;

$2\log\left(\frac{6}{4}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{12}{4}-\frac{11}{4}\right)=1$;

$\log\left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$ (ложь).

В итоге подходит только $x=5$.

Ответ: 5.