Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103993**

ID профиля: **316288**

Вариант 19

Чистовик

Математика, 11 кл.

1 стр.

1. Обозначим разность этой последовательности как d. Тогда $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{14} = a_1 + a_1 + d + \dots + a_1 + 13d = 14a_1 + \frac{13 \cdot 14}{2} d = 14a_1 + 91d$, $a_9 \cdot a_{17} = (a_1 + 8d)(a_1 + 16d) = a_1^2 + 24a_1 \cdot d + 128d^2$; и $a_{11} \cdot a_{15} = (a_1 + 10d)(a_1 + 14d) = a_1^2 + 24a_1 \cdot d + 140d^2$. Из неравенства $a_9 \cdot a_{17} + 35 > S + 47 > a_{11} \cdot a_{15}$, выходит, что

$$a_1 + 24a_1 \cdot d + 128d^2 + 35 > a_1^2 + 24a_1 \cdot d + 140d^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 35 > 12d^2 \Leftrightarrow \frac{35}{12} > d^2.$$

Т.к a_i - целые, то d - тоже целое и положительное (т.к последовательность возрастающая) $\Rightarrow \sqrt{\frac{35}{12}} > d \Rightarrow 2 > \sqrt{\frac{35}{12}} > d \Rightarrow 1 \geq d \Rightarrow d = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_9 \cdot a_{17} = a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 103 \Leftrightarrow (a_1+5)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq 5.$

Теперь подставим d во второе нер-во

$$a_{11} \cdot a_{15} = a_1^2 + 24a_1 + 140 < 14a_1 + 138 \Leftrightarrow 0 > 2 + 10a_1 + a_1^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 > (a_1 - (-5 + 2\sqrt{6}))(a_1 - (-5 - 2\sqrt{6})) = (a_1 + 5 - 2\sqrt{6})(a_1 + 5 + 2\sqrt{6}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5 + 2\sqrt{6} > a_1 > -5 - 2\sqrt{6} \Rightarrow 0 > -5 + 2\sqrt{6} > a_1 > -5 - 2\sqrt{6} > -10 \Leftrightarrow$$

$$-1 \geq a_1 \geq -9$$

Ответ: $a_1 \in [-1; -9]$, где $a_1 \neq -5$ и $a_1 \in \mathbb{Z}$

Подставляя данные значения в первое и второе неравенство, он можно убедится, что они подходят.

Математика, 11 кл.

Чистовик

2 стр.

2. Б.О.О скажем, что C лежит на верхней окр. цилиндра, а D лежит на нижней окр. цилиндра. Заметим, что $\triangle CAD = \triangle CBD$ (по трем равным сторонам $CD=CD$, $CA=6=CB$, и $DA=7=DB$) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle DCB = \angle DCA \Rightarrow$ Мы можем провести плоскость содержащую AB и перпендикулярную оси цилиндра.

Проведём ~~высо~~ перпендикуляры AH и BH к отрезку CD. Тогда $\triangle AHB$ перпендикулярна оси цилиндра, и её радиус R равен опис. окр. $\triangle AHB$ радиусу цилиндра.* (т.к еще CD параллелен оси.)

Пусть O центр опис. окр. $\triangle AHB$, и $CH=a$, и $AH=BH=b$.

Тогда ~~рассмотрим~~ по теореме косинусов в $\triangle AOB$ выходит, что

$$4 = R^2+R^2-2R^2\cdot\cos(\angle AOB) \Rightarrow R^2=\frac{2}{1-\cos(\angle AOB)}.$$

Т.к $1 \geq \cos(\angle AOB) \geq -1$, то

$$R^2=\frac{2}{1-\cos(\angle AOB)} \geq \frac{2}{2}=1 \Rightarrow R\geq 1,$$

и равенство достигается при $\angle AOB = 180^\circ \Rightarrow$ При минимальном R, O лежит на $AB \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ACB = 90 \Rightarrow$ По теореме пифагора в $\triangle ACB$ выходит, что

$$b^2+b^2=4 \Rightarrow b=\sqrt{2}.$$

Т.к $AH \perp CD$, то по теореме пифагора в $\triangle CHA$ выходит, что

$$CH^2+(\sqrt{2})^2=36 \Rightarrow CH=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

Аналогично для $\triangle HAD$

$$DH^2+(\sqrt{2})^2=49 \Rightarrow DH=\sqrt{45}=3\sqrt{5} \Rightarrow$$

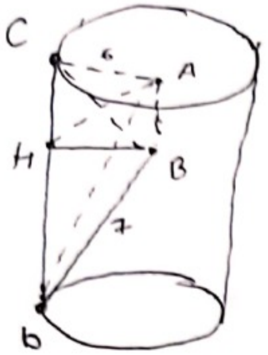
$$CD=CH+DH=4\sqrt{2}+3\sqrt{5}$$

2. Продолжение

Чистовик

Математика, 11 кл.
3 стр.

Ответ: $CD = 4\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$



3. Заметим, что $\forall x, y$, если a, b существуют, то они лежат внутри окр. с центром $(0,0)$ и радиусом 5, т.к

$$a^2+b^2 \leq \cancel{\min(-8a,-6b}, \min(-8a-6b, 25) \leq 25.$$

Также $a>0$ и $b>0$ невозможно, т.к

$$0 \leq a^2+b^2 \leq -8a-6b.$$

Чистовик

Математика, 11 кл.

1 стр.

1. Обозначим разность этой последовательности как d. Тогда $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{14} = a_1 + a_1 + d + \ldots + a_1 + 13d = 14a_1 + \frac{13 \cdot 14}{2} d = 14a_1 + 91d$, $a_9 \cdot a_{17} = (a_1 + 8d)(a_1 + 16d) = a_1^2 + 24a_1 \cdot d + 128d^2$; и $a_{11} \cdot a_{15} = (a_1 + 10d)(a_1 + 14d) = a_1^2 + 24a_1 d + 140d^2$. Из неравенства $a_9 \cdot a_{17} + 35 > S + 47 > a_{11} \cdot a_{15}$, выходит, что

$$a_1 + 24a_1 \cdot d + 128d^2 + 35 > a_1^2 + 24a_1 \cdot d + 140d^2 \iff$$

$$\iff 35 > 12d^2 \iff \frac{35}{12} > d^2.$$

Т.к a_i - целые, то d - тоже целое $\Rightarrow$ и положительное (т.к последовательность возрастающая) $\Rightarrow \sqrt{\frac{35}{12}} > d \Rightarrow 2 > \sqrt{\frac{35}{12}} > d \Rightarrow 1 \geq d \Rightarrow d = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_9 \cdot a_{17} = a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 103 \iff (a_1 + 5)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq 5$.

Теперь подставим d во второе нер-во

$$a_{11} \cdot a_{15} = a_1^2 + 24a_1 + 140 < 14a_1 + 138 \iff 0 > 2 + 10a_1 + a_1^2 \iff$$

$$\iff 0 > (a_1 - (-5 + 2\sqrt{6}))(a_1 - (-5 - 2\sqrt{6})) = (a_1 + 5 - 2\sqrt{6})(a_1 + 5 + 2\sqrt{6}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5 + 2\sqrt{6} > a_1 > -5 - 2\sqrt{6} \Rightarrow 0 > -5 + 2\sqrt{6} > a_1 > -5 - 2\sqrt{6} > -10 \iff$$

$$-1 \geq a_1 \geq -9$$

Ответ: $a_1 \in [-1; -9]$, где $a_1 \neq -5$ и $a_1 \in \mathbb{Z}$

Подставляя данные значения в первое и второе неравенство, можно убедится, что они подходят.

21103993 (U316288 M1297411)

2. Б.О.О скажем, что C лежит на верхней окр. цилиндра, а D лежит на нижней окр. цилиндра. Заметим, что $\Delta CAD = \Delta CBD$ (по трем равным сторонам $CD=CD$, $CA=6=CB$, и $DA=7=DB$) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle DCB = \angle DCA \Rightarrow$ Мы можем провести плоскость содержащую AB и перпендикулярную оси цилиндра.

Проведём ~~высо~~ перпендикуляры AH и BH к ~~от~~ отрезку CD. Тогда опис. окр. ΔAHB перпендикулярна оси цилиндра, и её радиус R равен радиусу цилиндра.* (т.к еще CD параллелен оси.)

Пусть O центр опис. окр. ΔAHB, и $CH=a$, и $AH=BH=b$.

Тогда ~~рассмотрим~~ по теореме косинусов в ΔAOB выходит, что

$$4 = R^2+R^2-2R^2\cdot\cos(\angle AOB) \Rightarrow R^2 = \frac{2}{1-\cos(\angle AOB)}.\ \text{Т.к } 1 \geq \cos(\angle AOB) \geq -1,$$

то $R^2 = \dfrac{2}{1-\cos(\angle AOB)} \geq \dfrac{2}{2} = 1 \Rightarrow R \geq 1$, и равенство достигается при $\angle AOB = 180^\circ \Rightarrow$ При минимальном R, O лежит на $AB \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle ACB = 90 \Rightarrow$ По теореме пифагора в ΔACB выходит, что

$$b^2+b^2 = 4 \Rightarrow b=\sqrt{2}.$$

Т.к $AH \perp CD$, то по теореме пифагора в ΔCHA выходит, что

$$CH^2+(\sqrt{2})^2 = 36 \Rightarrow CH=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

Аналогично для ΔHAD

$$DH^2+(\sqrt{2})^2 = 49 \Rightarrow DH=\sqrt{45}=3\sqrt{5} \Rightarrow$$

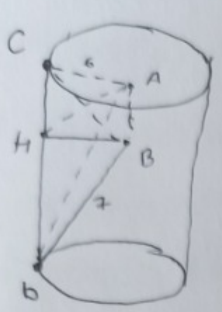
$$CD = CH+DH = 4\sqrt{2}+3\sqrt{5}$$

2. Продолжение

Чистовик

Математика, 11 кл.
3 стр.

Ответ: $CD = 4\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$



21103993 (U316288 M1297411)

Чистовик

3. Заметим, что $\forall x, y$, если a, b существуют, то они лежат внутри окр. с центром $(0,0)$ и радиусом 5, т.к

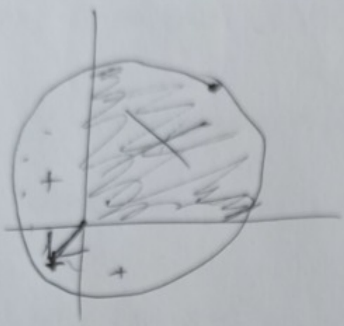
$$a^2+b^2 \leq \cancel{\min(-8a,6b}, \min(-8a-6b, 25) \leq 25.$$

Также $a>0$ и $b>0$ невозможно, т.к

$$0 \leq a^2+b^2 \leq -8a-6b.$$

i) $a < 0$

$b > 0$



$a \geq \frac{3}{4} b$ $\quad 45 \leq \frac{18}{6}$

$\leq \underline{a^2 + b^2} \leq 25$

$8 \quad \frac{9}{16}$

$\frac{25}{16} b^2 \leq 25$

$-8a - 6b \leq 25$

$\frac{0 < b \leq 4}{\cancel{a \leq 5}}$

$8a - 24 \leq 8a - 6b \leq 25$

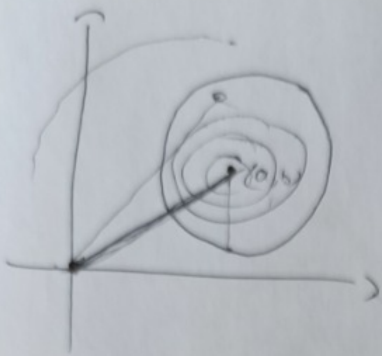
$a \geq -5$

$\cancel{\frac{a > 0}{b <}}$ $\quad a \leq \frac{49}{8}$

$\cancel{0 \geq -a \geq -\frac{49}{8} \approx 6}$

$\cancel{a^2 +}$ $\quad a(a+8) + b(b+6) \leq 0$

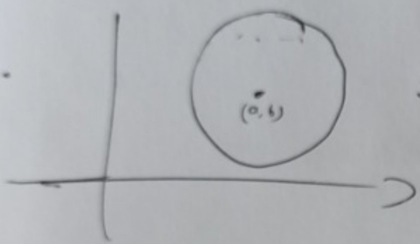
$8a + 6b \geq 25$



$(y-b)^2 = r^2$

$|y-b| = |r|$

a^2+b^2



$a^2+b^2 \le -8a-6b \le 25$

$-8a-6b \ge 0$

$-4a-3b \ge 0$

$a=-A \quad b=-3B$

$4A-3b$

$\cancel{(y+A)}\ (x+a)^2\ (y+b)^2 \le 25$

a

$a^2+b^2 \le -8a-6b$

$S_{14} = \sum_{1}^{14} a_i$

$d > 0$

$14a_1 + 13 \cdot 7d = S$

$(a_1 + 8d)(a_1 + 16d) > 14a_1 + 91d + 12$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < 14a_1 + 91d + 47$

$a_1^2 + \cancel{16}\, 24a_1 d + 128d^2 > 14a_1 + 91d + 12 + 35$

$> a_1^2 + 24a_1 d + 140d^2 +$

$128d^2 + 35 > 140d^2$

$-10 \pm \sqrt{96}$

$35 > 12d^2$

$\sqrt{\frac{35}{12}} > d^2$

$a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 91 + 12 = 14a_1 + 103$

$a_1 + 10a_1 + 25$

$\boxed{a \neq -5}$

$(a+5)^2 \geq 0$

$-5 \pm 2\sqrt{6}$

$(a_1 + 5 - 2\sqrt{6})(a_1 + 5 + 2\sqrt{6}) < 0$

$13 - 7 = 91$ 2

$13 - 3 = 49$

$\frac{35}{12} \approx 2\frac{11}{12}$

2

$1 \Rightarrow d = 1$

$a_1 + 24a_1 + 140 < 14a_1 + 138$

$a_1^2 + 10a_1 + \cancel{2} < 0$

$-10 \pm \sqrt{100 - 8}$

$\frac{-10 \pm \sqrt{96}}{2} =$

$-10 \pm 4\sqrt{6}$

~~$a_1 > -5 + 2\sqrt{6}$~~

~~$a_1 < -5 - 2\sqrt{6}$~~

$a_1 > -5 - 2\sqrt{6}$

8, 16

$160 - 32 = 128$

$-5 + 2\sqrt{6}$

$-0,\ldots$

$2\sqrt{6} = 24$ 4 5

$-1 \geq a_1 \geq -9$

$96 \mid 4$, $24 \mid 4$, 6

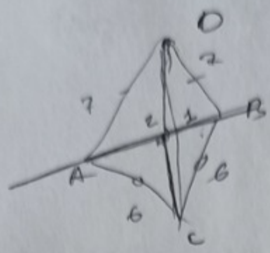
$-5 - 4\ldots$

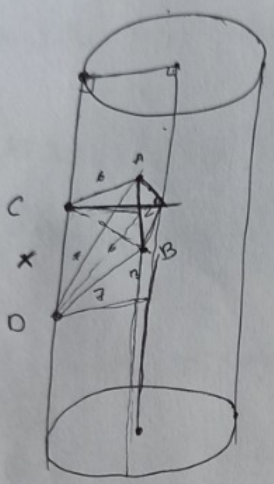
$91 + 47 = 138$

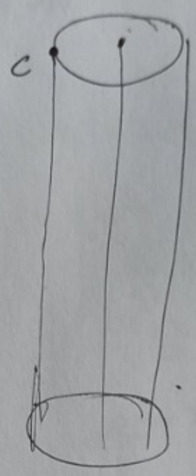
$0 >$ 25

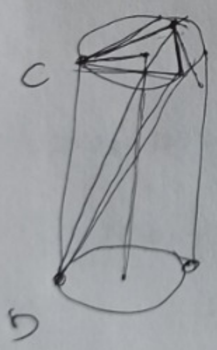
$a_1 < 5 - 2\sqrt{6}$

$\frac{1 + \ldots + 1}{2}$

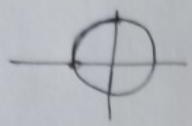

O
7
7
2
1
B
A
6
6
C

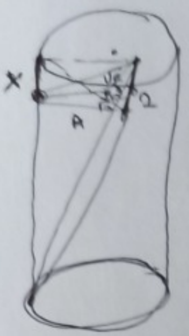

C
x
O
B
7

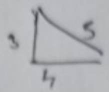

C


C
D


6
2
6







$= > 6$

$\sqrt{6 \cdot (2) \cdot 3 \cdot 1}$

$x^2 + A^2 = 36$

$\frac{2}{\sin\alpha} = 2R$

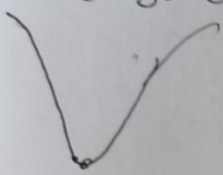
$\frac{\sin\alpha \cdot A^2}{2} = ABC$

$6 \geq A \geq 1$

$\cos 90 = 0$

$\frac{A^2}{2R} = ABC = \sqrt{(A+1)(A-1)}$

$4 = 2R^2 - 2R^2 \cos\alpha$



$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} > \frac{1}{\sqrt{35}}$

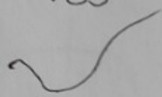
$2 = R^2(1-\cos\alpha)$

$2R = \frac{A^2}{\sqrt{A^2-1}} = \frac{36}{\sqrt{35}} = 2$

$\frac{9}{\sqrt{8}}$

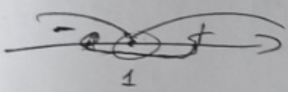
$\frac{2}{1+\cos\alpha} = R^2$

$R = 1$



$\frac{49}{\sqrt{48}}$

$x^2 - 1$



$\frac{x}{\sqrt{x-1}}$

$\frac{7^4}{48} \cdot \frac{6^4}{35}$

$0,0-9$ $x > 1$

$$\frac{\frac{x+\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x-1}} - \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x - 1}}}{\Delta x}$$

$\frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{A-1}{2A}\right) =$

$\cancel{(CB-x)^2}$ 2

$7^5 \cdot 5$ $6^5 \cdot 8$

$A = 1$

$x = \sqrt{2}$

$\cancel{(A-x)^2 + AB}$

$\frac{A-1}{2A}$

$(B-x)^2 + A^2 = 49$

$\frac{A}{\sqrt{A-1}}$ $\frac{A+1}{\sqrt{A}}$

$A = 1$

$\sqrt{A}$ $A^{\frac{1}{2}} + A^{-\frac{1}{2}}$

$x^2 - 1 > 0$

$A^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} + -\frac{1}{2}A^{-1}\right)$

$\frac{1}{2}A^{-\frac{1}{2}} + -\frac{1}{2}A^{-\frac{3}{2}}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103993**

ID профиля: **316288**

Вариант 19

Чистовик

2. Заметим, что т.к $\left(\frac{x}{2}-1\right)^2>0$, то $\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)>0$.

Также ясно, что $x-\frac{11}{4}>0$ (т.к подкорневое выражение должно быть положительным) и т.к $\sqrt{x-\frac{11}{4}}>0$, то $\frac{x}{2}-1>0$.

Пусть $A=\frac{x}{2}-1>0$, $B=x-\frac{11}{4}>0$, и $C=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0$, тогда

$$\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=\log_{A^2}(C)=\frac{\log_A(C)}{2}$$

$$\cancel{\log_{\sqrt{B}}(A)}$$

$$\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)=\log_{\sqrt{B}}(A)=2\log_B(A)$$

$$\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=\log_C(B^2)=2\log_C(B)$$

Пусть какие-то два из этих чисел будут равны a, и третье $a+1$.

Тогда

$$a^2(a+1)=\frac{\log_A(C)}{2}\cdot 2\log_B(A)\cdot 2\log_C(B)=2\log_A(C)\cdot\log_C(B)\cdot\log_B(A).$$

Заметим, что

$$\log_A(C)=\frac{1}{\log_C(A)} \Rightarrow \log_A(C)\cdot\log_C(B)=\frac{\log_C(B)}{\log_C(A)}=\log_A(B)=\frac{1}{\log_A(B)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2(a+1)=2\cdot\frac{\log_{A}(B)}{\log_A(B)}=2 \Leftrightarrow a^3+a^2-2=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (a-1)(a^2+2a+2)=0 \Leftrightarrow$ либо $a=1$, либо $a^2+2a+2=0$. Но заметим, что дискриминант второго уравнения $=4-4\cdot2=-4$ меньше нуля, т.е во втором варианте решений нет. $\Rightarrow a=1$

Рассмотрим 3 случая:

2. Продолжение.

i) $\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=1 \Rightarrow \left(\frac{x}{2}-1\right)^2=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow (x-5)(x-1)=0 \Rightarrow$

$x=5$; $x=1$.

Заметим, что $x=1$ – не подходит т.к $\frac{1}{2}-1=\frac{x}{2}-1>0 \Rightarrow -\frac{1}{2}>0$, противоречие.

При $x=5$

$\log_{(\frac{5}{2}-1)^2}\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{4}\right)=1=\log_{\sqrt{5-\frac{11}{4}}}\left(\frac{5}{2}-1\right)$ и $\log_{(\frac{5}{2}-\frac{1}{4})}\left(5-\frac{11}{4}\right)^2=2=1+1 \Rightarrow$

~~По~~ $\Rightarrow$ $x=5$ подходит.

ii) $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)=1 \Rightarrow \sqrt{x-\frac{11}{4}}=\frac{x}{2}-1 \Rightarrow x-\frac{11}{4}=\left(\frac{x}{2}-1\right)^2=$

$=\frac{x^2}{4}-x+1=x-\frac{11}{4} \Rightarrow x^2-4x+4=4x-11 \Rightarrow x-8x+15=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-5)(x-3)=0.$

$x=5$ – подходит.

При $x=3$

$\log_{(\frac{3}{2}-1)^2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)=\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{5}{4}\right)\neq 1$ и $\log_{(\frac{3}{2}-\frac{1}{4})}\left(3-\frac{11}{4}\right)^2=\log_{\frac{5}{4}}\left(\frac{1}{16}\right)\neq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $x=3$ не подходит.

iii) $\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=1 \Rightarrow \left(x-\frac{11}{4}\right)^2=\frac{x}{2}-\frac{1}{4} \Rightarrow x^2-6x+\frac{125}{16}=0 \Rightarrow$

$x=3\pm\sqrt{\frac{19}{16}}$

$\log_{\left(\sqrt{3\pm\sqrt{\frac{19}{16}}-\frac{11}{4}}\right)}\left(\frac{3\pm\sqrt{\frac{19}{16}}}{2}-1\right)=\log_{\sqrt{\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{19}{16}}}}\left(\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{19}{16}}\cdot\frac{1}{2}\right)\neq 1$

$\log_{\left(\frac{3\pm\sqrt{\frac{19}{16}}}{2}-1\right)^2}\left(\frac{3\pm\sqrt{\frac{19}{16}}}{2}-\frac{1}{4}\right)=\log_{\left(\frac{23}{4}\pm\sqrt{\frac{19}{16}}\right)}\left(\frac{5}{4}\pm\sqrt{\frac{19}{16}}\cdot\frac{1}{2}\right)\neq 1. \Rightarrow$

$x=3\pm\sqrt{\frac{19}{16}}$ не подходят.

Чистовик

2. Продолжение:

Ответ: $x=5$

1. Продолжение:

Аналогично посчитаем кол.во (p_1, p_2, p_3), у нас выйдет

$6 \cdot \cancel{18}^{4} = \cancel{90} \Rightarrow$

Общее кол.во ~~по правилу умн~~ будет ~~90 · 102 = 9180~~
14 · 6 · 6 · 16

Ответ: ~~9180 троек~~ 14 · 36 · 16 троек

21103993 (U316288 M1297412)

3. а) Заметим, что т.к $\angle OAT + \angle OCT = 90+90=180$, то ~~ото~~ OCTA – вписанный четырехугольник => P, C, T, A, и O лежат на одной окр.

Заметим, что $\frac{10}{6} = \frac{S(APK)}{S(CPK)} = \frac{\sin(\angle PKA)\cdot PK\cdot AK}{\sin(\angle PKC)\cdot PK\cdot KC} = \frac{AK}{KC} \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{5}{3}.$

Также ~~нам изв~~ т.к APCT вписанный четырехугольник, то $\angle CPK = \angle CAT = \angle ABC$ (т.к AT касательная) $\Rightarrow PK \parallel AB$.

Т.к $\frac{AK}{KC} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{KC}{AC} = \frac{3}{8}$. Из $PK \parallel AB$ следует, что $\triangle CPK \sim \triangle CBA$ по двум равным углам. $\Rightarrow \frac{S(CPK)}{S(ABC)} = \left(\frac{CK}{AC}\right)^2 = \frac{9}{64} \Rightarrow S(ABC) = \frac{64}{9}\cdot S(CPK) =$

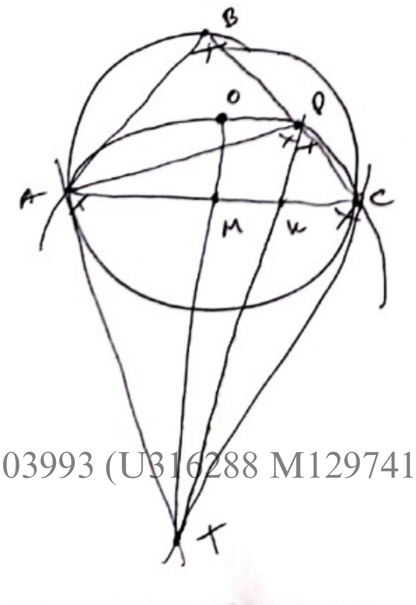
$= \frac{128}{3}$

Ответ к а: $S(ABC) = \frac{128}{3}$.

б) Пусть $AC \cap TO = M$, тогда $ctg(\angle ABC) = ctg(\angle CAT) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 = ctg(\angle CAT) = \frac{\frac{AC}{2}}{MT} \Rightarrow AC = 4MT$. Т.к O, C, T, и A лежат на одной окр, то $OM\cdot MT = \left(\frac{AC}{4}\right)^2 = 4MT^2 \Rightarrow OM = 4MT = AC$.

Пусть R – радиус ~~опис о~~ окр. ω. Тогда по теореме пифагора в $\triangle$ AMO выходит, что $(2MT)^2 + (4MT)^2 = R^2 \Rightarrow R = 2\sqrt{5}\,MT$.



Чистовик   Математика 11 кл.
4 стр.

1. Заметим, что $3^{17}\cdot 7^{15} \vdots a, b, c \Rightarrow a = 3^{\alpha_1}\cdot 7^{\beta_1}, b = 3^{\alpha_2}\cdot 7^{\beta_2}$

и $c = 3^{\alpha_3}\cdot 7^{\beta_3} \Rightarrow 21 = 3\cdot 7 = НОД(a,b,c) = 3^{\min(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}\cdot 7^{\min(\beta_1;\beta_2,\beta_3)} \Rightarrow$

$\min(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = 1$ и $\min(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = 1$.

Также заметим, что

$3^{17}\cdot 7^{15} = НОК(a,b,c) = 3^{\max(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}\cdot 7^{\max(\beta_1,\beta_2,\beta_3)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \max(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = 17$ и $\max(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = 15. \Rightarrow$

$17 \geq \alpha_i \geq 1$ и хотябы один $\alpha_k = 1$ и хотябы один $\alpha_t = 17$.

$15 \geq \beta_i \geq 1$ и хотябы один ~~α~~ $\beta_k = 1$ и хотябы один $\beta_t = 15$.

Посчитаем подходящее кол.во троек $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Разобьём на три случая

~~i) Пусть~~

i) Пусть все три числа различны, тогда кол.в троек будет $3\cdot 2\cdot 15$ (т.к у меня есть три способа выбрать какое число равно 1, два способа и выбрать какое число 17, и ~~оставшееся~~ число, которое осталось может принимать 15 значений (от 2 до 16)).

ii) Пусть там ровно два числа ~~ровн~~ равные одному, тогда кол.во троек будет.

$\cancel{\frac{3!}{2!}}$ $\frac{3!}{2!} = 3$ (т.к мы выбираем упорядочную пару из трех чисел)

iii) Пусть там ровно два числа ровные 17, тогда кол.во будет

$\frac{3!}{2!} = 3$ (Аналогично с (ii) случаем.

Т.е общее кол.во троек $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ будет. $6\cdot 15 + \overset{3+3}{\cancel{6+6}} = 6\cdot 16 = 1\cancel{2}$.

Чистовик

Математика 11 кл.
1 стр.

2. Заметим, что т.к $\left(\frac{x}{2}-1\right)^2 > 0$, то $\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) > 0$.

Также ясно, что $x - \frac{11}{4} > 0$ (т.к подкорневое выражение должно быть положительным) и т.к $\sqrt{x-\frac{11}{4}} > 0$, то $\frac{x}{2} - 1 > 0$.

Пусть $A = \frac{x}{2} - 1 > 0$, $B = x - \frac{11}{4} > 0$, и $C = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} > 0$, тогда

$$\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = \log_{A^2}(C) = \frac{\log_A(C)}{2}$$

~~$\log_{\sqrt{B}}(A)$~~

$$\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right) = \log_{\sqrt{B}}(A) = 2\log_B(A)$$

$$\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2 = \log_C(B^2) = 2\log_C(B)$$

Пусть какие-то два из этих чисел будут равны a, и третье $a+1$.

Тогда

$$a^2(a+1) = \frac{\log_A(C)}{2} \cdot 2\log_B(A) \cdot 2\log_C(B) = 2\log_A(C) \cdot \log_C(B) \cdot \log_B(A).$$

Заметим, что

$$\log_A(C) = \frac{1}{\log_C(A)} \Rightarrow \log_A(C) \cdot \log_C(B) = \frac{\log_C(B)}{\log_C(A)} = \log_A(B) = \frac{1}{\log_A(B)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2(a+1) = 2 \cdot \frac{\log_A(B)}{\log_A(B)} = 2 \Leftrightarrow a^3 + a^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (a-1)(a^2+2a+2) = 0 \Leftrightarrow$ либо $a = 1$, либо $a^2+2a+2=0$. Но заметим, что дискриминант второго уравнения $= 4 - 4 \cdot 2 = -4$ меньше нуля, т.е во втором варианте решений нет. $\Rightarrow a = 1$

Рассмотрим 3 случая!

2. Продолжение.

i) $\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=1 \Rightarrow \left(\frac{x}{2}-1\right)^2=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow (x-5)(x-1)=0 \Rightarrow$

$x=5$; $x=1$.

Заметим, что $x=1$ – не подходит т.к $\frac{1}{2}-1=\frac{x}{2}-1>0 \Rightarrow -\frac{1}{2}>0$, противоречие.

При $x=5$

$\log_{(\frac{5}{2}-1)^2}\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{4}\right)=1=\log_{\sqrt{5-\frac{11}{4}}}\left(\frac{5}{2}-1\right)$ и $\log_{(\frac{5}{2}-\frac{1}{4})}\left(5-\frac{11}{4}\right)^2=2=1+1 \Rightarrow$

~~Но~~ $\Rightarrow x=5$ подходит.

ii) $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)=1 \Rightarrow \sqrt{x-\frac{11}{4}}=\frac{x}{2}-1 \Rightarrow x-\frac{11}{4}=\left(\frac{x}{2}-1\right)^2=$

$=\frac{x^2}{4}-x+1=x-\frac{11}{4} \Rightarrow x^2-4x+4=4x-11 \Rightarrow x-8x+15=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-5)(x-3)=0$.

$x=5$ – подходит.

При $x=3$

$\log_{(\frac{3}{2}-1)^2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)=\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{5}{4}\right)\neq 1$ и $\log_{(\frac{3}{2}-\frac{1}{4})}\left(3-\frac{11}{4}\right)^2=\log_{\frac{5}{4}}\left(\frac{1}{16}\right)\neq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=3$ не подходит.

iii) $\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=1 \Rightarrow \left(x-\frac{11}{4}\right)^2=\frac{x}{2}-\frac{1}{4} \Rightarrow x^2-6x+\frac{125}{16}=0 \Rightarrow$

$x=3\pm\sqrt{\frac{19}{16}}$

$\log_{(\sqrt{3\pm\sqrt{\frac{19}{16}}-\frac{11}{4}})}\left(\frac{3\pm\sqrt{\frac{19}{16}}}{2}-1\right)=\log_{\sqrt{\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{19}{16}}}}\left(\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{19}{16}}\cdot\frac{1}{2}\right)\neq 1$

$\log_{(\frac{3\pm\sqrt{\frac{19}{16}}}{2}-1)^2}\left(\frac{3\pm\sqrt{\frac{19}{16}}}{2}-\frac{1}{4}\right)=\log_{(\frac{23}{4}\pm\sqrt{\frac{19}{16}})}\left(\frac{5}{4}\pm\sqrt{\frac{19}{16}}\cdot\frac{1}{2}\right)\neq 1 \Rightarrow$

$x=3\pm\sqrt{\frac{19}{16}}$ не подходят.

21103993 (U316288 M1297412)

Чистовик

2. Продолжение:

Ответ: $x = 5$

Чистовик Математика 11кл.

4 стр.

1. Заметим, что $3^{17} \cdot 7^{15} \vdots a, b, c \Rightarrow a = 3^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}, b = 3^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$

и $c = 3^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3}$. $\Rightarrow 21 = 3 \cdot 7 = НОД(a,b,c) = 3^{\min(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} \cdot 7^{\min(\beta_1;\beta_2,\beta_3)} \Rightarrow$

$\min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$ и $\min(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 1$.

Также заметим, что

$3^{17} \cdot 7^{15} = НОК(a,b,c) = 3^{\max(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} \cdot 7^{\max(\beta_1,\beta_2,\beta_3)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 17$ и $\max(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 15$. $\Rightarrow$

$17 \geq \alpha_i \geq 1$ и хотябы один $\alpha_k = 1$ и хотябы один $\alpha_t = 17$.

$15 \geq \beta_i \geq 1$ и хотябы один ~~α~~ $\beta_k = 1$ и хотябы один $\beta_t = 15$.

Посчитаем подходящее кол.во троек $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Разобьём на три случа

~~i) Пусть~~

i) Пусть все три числа различны, тогда кол.в троек будет

$3 \cdot 2 \cdot 15$ (т.к у меня есть три способа выбрать какое число равно 1, два способа и выбрать какое число 17, и ~~оставшееся~~ число, которое осталось может принимать 15 значений (от 2, до 16)).

ii) Пусть там ровно два числа ~~равн~~ равные одному, тогда кол.во троек будет.

~~$\frac{3!}{2!}$~~ $\frac{3!}{2!} = 3$ (т.к мы выбираем упорядочную пару из трех чисел)

iii) Пусть там ровно два числа равные 17, тогда кол.во будет

$\frac{3!}{2!} = 3$ (Аналогично с (ii) случаем.

Т.е общее кол.во троек $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ будет. $6 \cdot 15 + \cancel{6+6}^{3+3} = 6 \cdot 16 = 96$.

1. Продолжение:

Аналогично посчитаем кол.во $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, у нас выйдет

$6 \cdot 18 = 90 \Rightarrow$

Общее кол.во ~~по правилу умн~~ будет ~~$90 \cdot 102 = 9180$~~ $14 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 16$

Ответ: ~~9180 троек~~ $14 \cdot 36 \cdot 16$ троек

3. а) Заметим, что т.к $\angle OAT + \angle OCT = 90+90=180$, то ~~это~~ OCTA – вписанный четырехугольник => P, C, T, A, и O лежат на одной окр.

Заметим, что $\frac{10}{6} = \frac{S(APK)}{S(CPK)} = \frac{\sin(\angle PKA)\cdot PK \cdot AK}{\sin(\angle PKC)\cdot PK\cdot KC} = \frac{AK}{KC} \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{5}{3}$.

Также ~~нам изв~~ т.к APCT вписанный четырехугольник, то

$\angle CPK = \angle CAT = \angle ABC$ (т.к AT касательная) $\Rightarrow PK \parallel AB$.

Т.к $\frac{AK}{KC} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{KC}{AC} = \frac{3}{8}$. Из $PK \parallel AB$ следует, что $\triangle CPK \sim \triangle CBA$ по двум равным углам. $\Rightarrow \frac{S(CPK)}{S(ABC)} = \left(\frac{CK}{AC}\right)^2 = \frac{9}{64} \Rightarrow S(ABC) = \frac{64}{9}\cdot S(CPK) =$

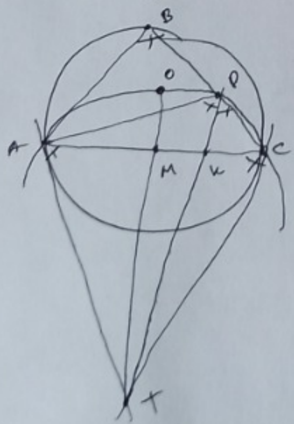
$= \frac{128}{3}$

Ответ к а: $S(ABC) = \frac{128}{3}$.

б) Пусть $AC \cap TO = M$, тогда $ctg(\angle ABC) = ctg(\angle CAT) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 = ctg(\angle CAT) = \frac{\frac{AC}{2}}{MT} \Rightarrow AC = 4MT$. Т.к O, C, T, и A лежат на одной окр, то $OM\cdot MT = \left(\frac{AC}{4}\right)^2 = 4MT^2 \Rightarrow OM = 4MT = AC$.

Пусть R – радиус ~~опис. о~~ окр. ω. Тогда по теореме пифагора в $\triangle$ AMO выходит, что $(2MT)^2 + (4MT)^2 = R^2 \Rightarrow R = 2\sqrt{5}\,MT$.



21103993 (U316288 M1297412)

② $= x^2(x+1)$

$x^3 + x^2 - 2 = 0$

$x = 1$

$x^2 + 2x + 2 = 0$

$-2 \pm \sqrt{4-8}$

$$\begin{array}{l|l} x^3 + x^2 - 2 & x-1 \\ \hline x^3 - x^2 & x^2+2x+2 \\ 2x^2 & \\ 2x^2 - 2x & \\ 2x - 2 & \end{array}$$

$\underline{(x-1)(x^2+2x+2)} = 0$

$x^3 \cancel{+2x^2} \cancel{+2x} \cancel{-x^2} \cancel{-2x} - 2$

$\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)$

$\frac{x^2}{4} - x + 1 = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

$x^2 - \cancel{4}x + \cancel{4} = 2x - 1$

$x^2 - 6x + 5$

-5

-1

$(x-5)(x-1)$

$\boxed{x = 5, 1}$

$\log_A(B^2) = >$

$B \quad A^{\log}$

$\frac{1}{4}\left(\frac{-6\ 5}{4}\right) \neq 1$

$\frac{x^2}{4} - x + 1 = x - \frac{11}{4}$

$\cancel{\frac{x}{2} - \frac{1}{4} > 0}$

$\frac{5}{4}\left(3 - \frac{11}{4}\right) \neq 1$

$\frac{1}{16}$

$x^2 - 8x + 4 = -11$

$+3{,}5$

$$\left|\begin{array}{l} \frac{x}{2} - 1 > 0 \\ \frac{x}{2} - \frac{1}{4} > 0 \\ x - \frac{11}{4} > 0 \end{array}\right.$$

15

3

$\frac{1}{4}\left(\right.$ $8^2 - 64 - 100$

$\frac{13}{2} - \frac{1}{4}$

3 $\frac{5}{4}$

$\frac{6-1}{4} = \frac{5}{4}$

$\frac{4}{2}$

$\frac{x^2}{4} - x + 1 = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$x^2 - 4x + 4 = 2x - 1$

$\text{НОД}(a;b;c) = 21 = 3\cdot 7 = 3^{\min(a,b,c)} \cdot 7$

21

$\boxed{3^{17}\cdot 7^{15}} \vdots\, (a) = 3^{\alpha}\cdot 7^{\beta}$

$1 \leq (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \leq 17$ max

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$

1, 17 17

$\cancel{C_3^1 \cdot C_{17}^2 \cdot C_3^1 \cdot 15^2}$

$\left(\frac{C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot 17}{2}\right)\cdot\left(\frac{C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot 15}{2}\right)$

$\frac{2\cdot 17 \quad 4}{102}$

$A^{\log_A(C)} = C$

$(A^{\log_A(C)})^{\log_C(B)} = C^{\log_C(B)} = B$

log

$2\log_A(C)\cdot\log_B(A)\cdot\log_C(B) = 2$

$\log_B(A^2)\log_B(\sqrt{C})$

$(B^{\log_B(A^2)}) = A^2$

$\frac{\log_{A^2}(C)}{2}, 2\log_{\sqrt{B}}(A)\ 2\log_C(B^2)$

$(A^{\log_A(C)}) = (C) = B$

$(A^2)^{\log_{A^2}(C)} = C$

$\log_A(\sqrt{C}) = \frac{1}{\log_A(\sqrt{B})}$

$\log_C($ $\cancel{\log(C)}$

$A^{\log_{A^2}(C)} = \sqrt{C}$

log

$\log_{A^2}(C) = \boxed{\log_A(\sqrt{C})}$

$\frac{1}{\log_A(\sqrt{B})}$

$\log_B(A^2) \to \log_{\sqrt{C}}(B^2)$

$\log_A{}^2(C)$

$\log_{\sqrt{B}}$

$(C^{\frac{1}{2}})^{\log_{\sqrt{C}}(A)} = A$

$\frac{9}{4}$

$\log_{A^2}(B)\cdot\log_{A^2}(C) = 1$

$C^{\frac{\log_{\sqrt{C}}(A)}{2}}$

$\sqrt{B}^{\log_{\sqrt{B}}(A)} = A$

$\frac{3}{2}$

$\log_C(B^2) = \log_{A^2}($

$(A^2)^{\log_{A^2}(C)} = C$

$= A^{\log_{A^2}(C)\cdot 2} = C$

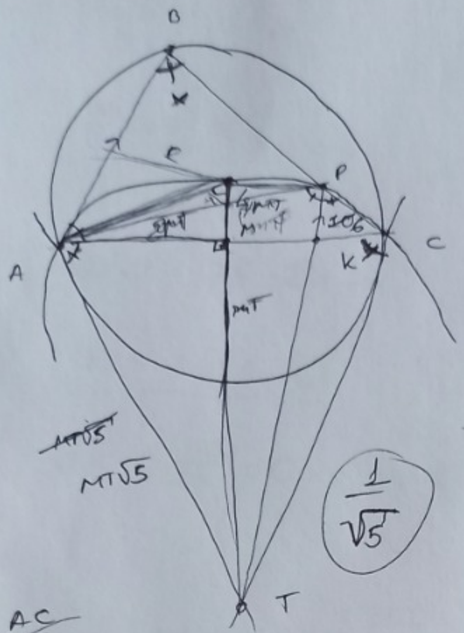
$\frac{5}{2} - 1$

$\log_C(A^2)\cdot\log_C(B^2) = 1$

$(\frac{3}{2})^2$

$\frac{10}{4}$

21103993 (U316288 M1297412)



$S(ABK) = 10$

$S(CPK) = 6$

$S(PKC)$

$$\frac{\sin\alpha \cdot PK \cdot AK}{\sin\alpha \cdot PK \cdot KC} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{AK}{KC} = \frac{5}{3}$$

~~MT√5~~

MT√5

$$\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\cancel{\frac{\frac{AC}{2}}{MT} = 2}$ $\qquad \cancel{\frac{AP}{PC} = \frac{5}{3}}$ $\qquad \cancel{\frac{KC}{AK} = \frac{3}{5}}$

$\cancel{AC = 4MT}$ $\qquad \sin\alpha) =$ $\qquad BP$ $\qquad \cancel{\frac{AC}{AK} = \frac{8}{5}}$

$\cancel{\frac{KC}{AC} = \frac{3}{8}}$

~~OM·MT~~

$OM \cdot MT = 4MT^2$ $\qquad \cancel{\frac{6}{S(ABC)} = \frac{9}{64}}$

$OM = 4MT$ $\qquad \cancel{S(ABC) = \frac{128}{3}}$

$\frac{AC}{2} = 2MT$

$(2MT)^2 + MT^2 => \qquad (5MT)^2 = 5MT^2 + R^2$

$5MT^2 => \qquad 4MT\sqrt{5} = R$

$MT\sqrt{5}$

$$\frac{4MT}{\sin(\alpha)} = 2R = 8MT\sqrt{5}$$

3·2·13

6 $\qquad \frac{1}{2\sqrt{5}} = \cancel{R}\sin\alpha$

6 $\qquad$ 15 × 6 = 90 $\qquad$ 3 $\qquad$ 102 − 9 = 1008 $\qquad$ 1 0 $\qquad$ 9000 $\qquad$ 90 180 $\qquad$ $4MT^2 + 16MT^2$

$2\sqrt{5}MT$

$x^2 - \frac{11x}{2} + \frac{121}{16} = \frac{x}{2} - \frac{4}{16}$

$\frac{x^2}{4} - 2x + \frac{15}{4}$

$16x^2 - 12x \cdot 8 + 125 = 8x - 4$

$\frac{9}{4} - 6 + \frac{15}{4} = 0$

$16x^2 - 80x + 125 = 0$

$x^2 - 5x + \frac{125}{16} = 0 \Rightarrow 5 \pm \sqrt{36 - \frac{125}{4}}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{3}{2} - \frac{1}{4}$

$30 \cdot 4$

$\frac{25}{4} - \frac{5}{4}$

$36 \cdot 4$

$\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{19}{16}}$

$(80)^2 - 4 \cdot 125 \cdot 16$

120

$144 - 125$

$\sqrt{\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{19}{16}}}$

$x - 25$

$$\frac{6 \pm \sqrt{\frac{19}{4}}}{2}$$

$\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{19}{16}}$

$\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{19}{16}} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{19}{16}} + \frac{19}{16}$

$3 \pm \sqrt{\frac{19}{16}}$

$\frac{1}{4} + \frac{19}{16} \pm \frac{19}{16}$

$\frac{23}{4}$

$\left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{19}{16}}\right)^2$

$\left(\frac{5}{4} \pm\right.$

$\frac{23}{16} \pm \sqrt{\frac{19}{16}}$

$3 - \sqrt{\frac{19}{16}}$

$3 - \frac{11}{4}$

$\frac{23}{4} \pm \sqrt{\frac{19}{16}} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{19}{16}}$

$\frac{6}{4} - \frac{\sqrt{\frac{19}{16}}}{2} - \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{19}{16}}$

$\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{\frac{19}{16}}}{2}$

$\frac{1}{16} + \frac{17}{16} - 2$

$\frac{3}{2}$

$\frac{5}{4}$

$\cancel{\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{\frac{19}{16}}}{2} + \frac{19}{16}}$

$\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{\frac{19}{16}}}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{19}{16}\right)$

$\frac{35}{16^2}$

21103993 (U316288 M1297412)